# BAB II

## FUNGSI AUTOKORELASI PROSES STOKASTIK STASIONER

Definisi 2.1 : Bila T himpunan waktu yang diamati, t di dalam T dan $Z_t$ adalah hasil pengamatan pada saat t, maka $\{Z_t, t \in T\}$ disebut proses stokastik.

Definisi 2.2 : Misal $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}$ adalah pengamatan pada saat $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dari proses stokastik $\{Z_t, t \in T\}$ dan distribusi peluang gabungan yang berkaitan adalah $f(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n})$.

Jika dipenuhi :

$$f(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}) = f(Z_{t_1+k}, Z_{t_2+k}, \ldots, Z_{t_n+k})$$

untuk setiap pergeseran waktu sebesar k, maka proses stokastik $\{Z_t, t \in T\}$ disebut proses stokastik stasioner.

Akibat : $f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ bebas dari waktu sehingga proses stokastik stasioner mempunyai mean dan varian yang konstan, yaitu :

$$\text{mean} = \mu = E(Z_t) = E(Z_{t+k})$$

$$\text{varian} = \sigma_Z^2 = E(Z_t - \mu)^2 = E(Z_{t+k} - \mu)^2$$

Untuk sampel data $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ maka taksiran

mean dan varian adalah :

$$\hat{\mu} = \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \qquad (2.1)$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (Z_t - \bar{Z})^2 \qquad (2.2)$$

Definisi 2.3 : Fungsi autokovariansi proses stokastik $\{Z_t, t \in T\}$ adalah :

$$\gamma_{zz}(t_1, t_2) = Cov\{Z_{t_1}, Z_{t_2}\}$$

$$= E\,[(Z_{t_1} - \mu)(Z_{t_2} - \mu)]$$

Untuk proses stokastik stasioner fungsi autokovariansi hanya bergantung pada selang waktu (lag) antara $t_1$ dan $t_2$. Sehingga untuk proses stasioner fungsi autokovariansi lag k adalah :

$$\gamma_{zz}(k) = Cov\{Z_t, Z_{t+k}\}$$

$$= E\,[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]$$

Untuk selanjutnya $\gamma_{zz}(k)$ ditulis $\gamma_k$ .

Definisi 2.4 : Fungsi autokorelasi proses stokastik $\{Z_t, t \in T\}$ adalah :

$$\rho_{zz}(t_1, t_2) = \frac{\gamma_{zz}(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$$

Untuk proses stokastik stasioner, fungsi autokorelasi hanya bergantung pada selang waktu antara $t_1$ dan $t_2$.

Sehingga untuk proses stasioner, autokorelasi lag k adalah :

$$\rho_{zz}(k) = \frac{\gamma_k}{\sigma_z^2}$$

Mengingat $\gamma_o = \text{Cov}\,(Z_t, Z_{t+o})$

$$= E\,[(Z_t - \mu)(Z_{t+o} - \mu)]$$

$$= E\,(Z_t - \mu)^2$$

$$= \sigma_z^2$$

maka :

$$\rho_{zz}(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_o}$$

Selanjutnya $\rho_{zz}(k)$ ditulis $\rho_k$

Pada $\rho_k$ berlaku $\rho_k = \rho_{-k}$

Bukti :

Akan ditunjukkan terlebih dulu bahwa $\gamma_k = \gamma_{-k}$

$$\gamma_k = \text{Cov}\,(Z_t, Z_{t+k})$$

$$= E\,[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]$$

$$= E\,[(Z_{t+k} - \mu)(Z_t - \mu)]$$

$$= E\,[(Z_m - \mu)(Z_{m-k} - \mu)]$$

$$= \gamma_{-k}$$

Maka :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o}$$

$$= \frac{\gamma_{-k}}{\gamma_o}$$

$$= \rho_{-k}$$

Adapun taksiran Autokorelasi lag k adalah :

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n} (Z_t - \bar{Z})^2} \qquad (2.3)$$

Definisi 2.5 : White noise adalah barisan variabel acak $a_t$, $a_{t-1}$, $a_{t-2}$, ..... yang tak berkorelasi yang memiliki mean nol dan variansi konstan.

Autokovariansi lag k White noise adalah :

$$\begin{aligned} Cov\,(a_t, a_{t+k}) &= E\,[(a_t - E(a_t))(a_{t+k} - E(a_{t+k}))] \\ &= E\,[a_t . a_{t+k}] \\ &= \begin{cases} \sigma_a^2 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sehingga Fungsi Autokorelasi dari Proses White Noise adalah :

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$$