

BAB II

KONSEP DASAR PENUNJANG

2.1. MATRIKS

DEFINISI 1 :

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Dan untuk batas suatu matriks diberi notasi :

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \text{ atau } \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right) \text{ atau } \left| \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right|$$

Skalar-skalar yang tersebut dalam definisi di atas disebut elemen matriks.

Suatu matriks diberi notasi dengan huruf besar A, B, P, C dan lain-lain.

Secara lengkap ditulis matriks $A = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen-elemennya a_{ij} , dimana indeks i menyatakan baris ke i yaitu $i = 1, 2, \dots, m$ dan indeks j menyatakan kolom ke j dari elemen tersebut yaitu $j = 1, 2, \dots, n$.

Sehingga bisa ditulis matriks A berukuran $(m \times n)$ dan ini menyatakan ordo dari matriks A.

Jika suatu matriks dengan banyak baris = banyak kolom = n , maka disebut matriks bujur sangkar berordo n .

CONTOH 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & \frac{1}{2} & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks A berukuran (3x4), dengan banyaknya baris 3 dan banyaknya kolom 4.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

.ls2

B adalah matriks bujur sangkar berordo 2.

2.2. HIMPUNAN

DEFINISI 2 :

Himpunan adalah suatu koleksi atau klas dari suatu objek-objek .

Dinotasikan dengan huruf besar, misalnya :

A , B , X , Y ,

CONTOH 2 :

1. Nama-nama mahasiswa matematika Undip
2. Solusi dari persamaan $x^2 - 3x - 2 = 0$

DEFINISI 3 :

Elemen / anggota dari suatu himpunan adalah objek-objek dari suatu himpunan.

Dinotasikan dengan huruf kecil, misalnya :

a , b , x , y ,

Jika objek x adalah elemen / anggota dari himpunan A atau A memuat x yang merupakan salah satu dari elemen-elemennya.

Ditulis $x \in A$.

Jika objek x bukan anggota / elemen dari himpunan A atau A tidak memuat x yang merupakan salah satu dari elemen-elemennya.

Ditulis $x \notin A$.

DEFINISI 4 :

Jika setiap elemen / anggota dari himpunan A juga merupakan anggota dari himpunan B , maka A disebut subset dari B .

Yaitu A adalah subset dari B jika $x \in A$ maka $x \in B$.

Ditulis $A \subset B$.

CONTOH 3 :

Jika $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ adalah himpunan bilangan genap positif.

$B = \{1, 2, 3, \dots\}$ adalah himpunan bilangan asli

$A \subset B$.

DEFINISI 5 :

Dua himpunan A dan B adalah sama, ditulis $A=B$ bila $A \subset B$ dan $B \subset A$.

CONTOH 4 :

Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 4, 1, 3\}$

Maka

$A \subset B$ dan $B \subset A$, jadi $A = B$

DEFINISI 6 :

Union dari himpunan H dan K, ditulis dengan $H \cup K$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan H atau K.

Atau dengan kata lain :

$$H \cup K = \{ x \mid x \in H \text{ atau } x \in K \}$$

CONTOH 5 :

Jika $H = \{2,4\}$ dan

$$K = \{2,3,5\}$$

Maka

$$H \cup K = \{2,3,4,5\}$$

DEFINISI 7 :

Interseksi dari dua himpunan H dan K, ditulis dengan $H \cap K$, adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekaligus berada dalam H maupun K.

Atau dengan kata lain :

$$H \cap K = \{ x \mid x \in H \text{ dan } x \in K \}$$

CONTOH 6 :

Jika H dan K anggota-anggotanya seperti dalam contoh 5, maka $H \cap K = \{ 2 \}$.

2.3. PEMETAAN

DEFINISI 8 :

U disebut pemetaan dari A ke B, jika untuk setiap elemen pada himpunan A, maka u menentukan dengan tunggal elemen pada himpunan B.

Ditulis

$$u : A \longrightarrow B$$

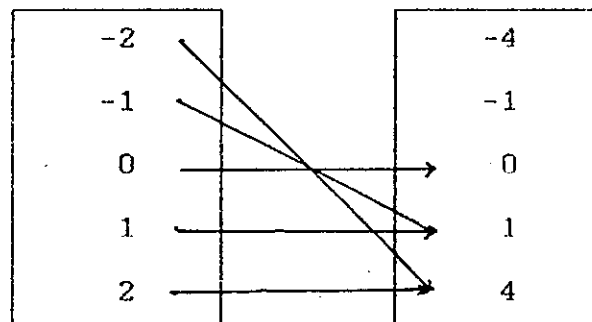
CONTOH 7 :

Jika A adalah himpunan bilangan real.

B adalah himpunan bilangan real.

Untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x) = x^2$

$$A \xrightarrow{u} B$$



Ternyata setiap elemen pada himpunan A menentukan dengan tunggal elemen pada himpunan B.

Berarti $u : A \longrightarrow B$ merupakan suatu pemetaan.

DEFINISI 9 :

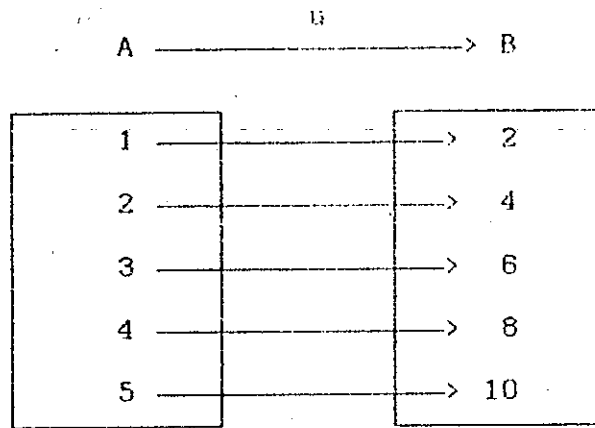
u disebut pemetaan yang bijektif jika setiap elemen pada himpunan A, maka u menentukan dengan tunggal elemen pada himpunan B dan juga untuk sebaliknya.

CONTOH 8 :

Jika A adalah himpunan bilangan asli dan

B adalah himpunan bilangan genap positif

Untuk setiap $x \in A$ dan $u(x) \in B$ dengan $u(x) = 2x$



Ternyata setiap elemen pada himpunan A maka u menentukan dengan tunggal setiap elemen pada himpunan B dan juga sebaliknya.

Berarti $u : A \longrightarrow B$ merupakan pemetaan yang bijektif.

2.4. OPERASI BINARI

DEFINISI 10 :

Hasil kali cartesian (cartesian product) $A \times B$ dari dua himpunan tak kosong A dan B merupakan himpunan pasangan terurut (a,b) , dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Atau dengan kata lain :

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

CONTOH 9 :

Misal $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a,b\}$

maka :

$$A \times B = \{(1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b)\}$$

DEFINISI 11 :

Suatu operasi binari pada sebuah himpunan tak kosong G adalah suatu pemetaan yang memetakan setiap pasangan elemen berurutan (a,b) dari himpunan $G \times G$ ke dalam G

itu sendiri.

Notasi-notasi yang digunakan dalam operasi binari dapat dinyatakan dengan : $.$, o , $+$, $*$, x dan lain-lain.

CONTOH 10 :

$P=\{2,3\}$ dan α merupakan operasi binari di dalam P yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\alpha : (i,j) \longrightarrow j, \text{ dimana } (i,j) \in P \times P$$

Maka didapat :

$$\alpha : (2,2) \longrightarrow 2$$

$$\alpha : (2,3) \longrightarrow 3$$

$$\alpha : (3,2) \longrightarrow 2$$

$$\alpha : (3,3) \longrightarrow 3$$

SIFAT-SIFAT OPERASI BINARI

DEFINISI 12 :

Sebuah operasi binari o pada sebuah himpunan S disebut komutatif bila $x o y = y o x$ untuk setiap $x,y \in S$.

CONTOH 11 :

Penjumlahan dan perkalian biasa merupakan operasi binari komutatif, sedang pembagian bukan merupakan operasi binari komutatif, dimana Q^+ bilangan rasional positif.

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$2 \times 4 = 4 \times 2$$

$$\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$$

DEFINISI 13 :

Sebuah operasi binari $\circ$ pada sebuah himpunan S disebut asosiatif bila $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, untuk setiap $x, y, z \in S$

CONTOH 12 :

Misal $\circ$ merupakan sebuah operasi binari pada bilangan riil R yang didefinisikan dengan :

$$a \circ b = a + 2b, \text{ untuk semua } a, b \in R$$

$$\begin{aligned} \text{Karena } (a \circ b) \circ c &= (a + 2b) \circ c \\ &= a + 2b + 2c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sedangkan } a \circ (b \circ c) &= a \circ (b + 2c) \\ &= a + 2(b + 2c) \\ &= a + 2b + 4c \end{aligned}$$

Maka operasi binari $\circ$ yang didefinisikan di atas tidak asosiatif.

CONTOH 13 :

Penambahan dan perkalian adalah operasi binari yang asosiatif pada $\mathbb{Q}^+$

$$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$$

$$2 + 7 = 5 + 4$$

$$9 = 9$$

$$3 \times (4 \times 1) = (3 \times 4) \times 1$$

$$3 \times 4 = 12 \times 1$$

$$12 = 12$$

DEFINISI 14 :

Sebuah himpunan S dikatakan mempunyai elemen identitas (elemen unit atau elemen netral) terhadap suatu operasi binari $\circ$ pada S , bila terdapat sebuah elemen $u \in S$ dengan sifat $u \circ x = x \circ u = x$, untuk setiap

$$x \in S.$$

CONTOH 14 :

Sebuah elemen dari Q yang merupakan elemen identitas terhadap operasi penambahan adalah 0.

$$\text{Sebab } x \circ 0 = 0 \circ x$$

$$x = x, \text{ untuk setiap } x \in Q$$

2.5. GROUPOID

DEFINISI 15 :

Suatu groupoid adalah sebuah pasangan $(G, \circ)$ yang terdiri dari himpunan tidak kosong G yang disebut carrier dan suatu operasi binari $\circ$ yang didefinisikan pada G .

CONTOH 15 :

Misal $G = \{1,2,3,4\}$ dan operasi binari $\circ$ pada G didefinisikan sebagai berikut :

$$\forall x_1 \in S, \text{ dan } x_2 = 1, \text{ maka } (x_1, 1) \longrightarrow x_1$$

$$x_1 = 1 \text{ dan } \forall x_2 \in S, \text{ maka } (1, x_2) \longrightarrow x_2$$

$$x_1 = x_2, \text{ maka } (x_1, x_2) \longrightarrow 1$$

$$x_1 = 2 \text{ dan } x_2 = 3, 4 \text{ maka } (x_1, 3) \longrightarrow 4 \text{ dan } (x_1, 4) \longrightarrow 3$$

$$x_1 = 3 \text{ dan } x_2 = 2, 4 \text{ maka } (x_1, 2) \longrightarrow 4 \text{ dan } (x_1, 4) \longrightarrow 2$$

$$x_1 = 4 \text{ dan } x_2 = 2, 3 \text{ maka } (x_1, 2) \longrightarrow 3 \text{ dan } (x_1, 3) \longrightarrow 2$$

Maka dihasilkan :

$$1 \circ 1 = 1 \quad 2 \circ 1 = 2 \quad 3 \circ 1 = 3 \quad 4 \circ 1 = 4$$

$$1 \circ 2 = 2 \quad 2 \circ 2 = 1 \quad 3 \circ 2 = 4 \quad 4 \circ 2 = 3$$

$$1 \circ 3 = 3 \quad 2 \circ 3 = 4 \quad 3 \circ 3 = 1 \quad 4 \circ 3 = 2$$

$$1 \circ 4 = 4 \quad 2 \circ 4 = 3 \quad 3 \circ 4 = 2 \quad 4 \circ 4 = 1$$

sehingga didapat tabel :

o	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Selanjutnya karena operasi binari $\circ$ didefinisikan untuk semua elemen dalam G , maka $(G, \circ)$ adalah sebuah groupoid dengan carrier $G = \{1, 2, 3, 4\}$.

DEFINISI 16 :

Jika A dan B adalah dua subset tak kosong dari suatu groupoid G , maka hasil kali AB didefinisikan sebagai

$$AB = \{ ab : a \in A, b \in B \}$$

Jika $g \in G$ dan A adalah subset tak kosong dari S , maka hasil kali gA didefinisikan sebagai $gA = \{ ga : a \in A \}$

dan hasil kali $A g$ didefinisikan sebagai $A g = \{ ag : a \in A \}$.

Catatan :

Untuk hasil kali beberapa himpunan berlaku dengan cara yang sama seperti definisikan di atas.

Misalnya :

$S \times a \subseteq S$, dengan S merupakan semigroup dan $a \in I$ merupakan hasil kali binari dari elemen S dengan a , kemudian hasilnya dioperasikan dengan S .

DEFINISI 17 :

Suatu subgroupoid T dari groupoid G adalah subset tak kosong dari G sedemikian sehingga hasil kali dua elemen dari T termuat dalam T , yaitu $T \circ T \subseteq T$.

CONTOH 16 :

Diberikan groupoid $G = \{1,2,3,4\}$ dan operasi binari pada G didefinisikan seperti pada contoh 15.

Ambil $T \subseteq G$, yaitu dengan $T = \{1,2\}$

Maka didapat tabel

$\circ$	1	2
1	1	2
2	2	1

Sehingga T merupakan subgroupoid dari G , karena $TT \subseteq T$

2.6. SEMIGROUP DAN MONOID

DEFINISI 18 :

Suatu semigroup $(S, \circ)$ adalah himpunan tak kosong S dengan operasi binari $\circ$ yang berlaku pada S , sedemikian sehingga operasi binari $\circ$ berlaku hukum asosiatif

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \text{ dengan } x, y, z \in S$$

Suatu semigroup S mempunyai sebuah identitas, apabila terdapat sebuah elemen $i \in S$ sedemikian sehingga $i \circ x = x \circ i = x$, untuk $\forall x \in S$.

Sebuah semigroup disebut komutatif jika $x \circ y = y \circ x$, untuk

$$\forall x, y \in S.$$

DEFINISI 19 :

Suatu monoid semigroup adalah semigroup yang mempunyai elemen identitas i , yaitu $i \circ x = x \circ i = x$, untuk

setiap $x \in S$.

CONTOH 17 :

$S = \{1,2,3,4\}$ dan operasi binari yang berlaku dinyatakan dengan $\circ$ yang didefinisikan pada contoh 15.

Sehingga didapatkan tabel sebagai berikut :

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Akan ditunjukkan bahwa himpunan S dengan operasi binari $\circ$ memenuhi sifat asosiatif.

$$(i) \quad (1 \circ 2) \circ 4 = 1 \circ (2 \circ 4)$$

$$2 \circ 4 = 1 \circ 3$$

$$3 = 3$$

$$(ii) \quad (4 \circ 3) \circ 1 = 4 \circ (3 \circ 1)$$

$$2 \circ 1 = 4 \circ 3$$

$$2 = 2$$

dst.

Karena setiap elemen dalam S dapat dioperasikan secara asosiatif, maka operasi binari $\circ$ di atas merupakan operasi yang asosiatif sehingga $(S, \circ)$ adalah suatu semigroup.

Dan karena semigroup ini mempunyai elemen identitas, yaitu $2 \circ 1 = 1 \circ 2 = 2$, $3 \circ 1 = 1 \circ 3 = 3$, $4 \circ 1 = 4 \circ 1 = 4$

Maka $(S, \circ)$ juga merupakan monoid semigroup

Bila S tidak memuat elemen identitas, maka dengan memperluas operasi binari pada S ke himpunan $S \cup \{1\}$, dengan 1 merupakan elemen identitas. Maka $S \cup \{1\}$ merupakan monoid semigroup yang disebut ajungsi (adjunction) dari elemen identitas 1 ke semigroup S .

Sebuah monoid semigroup yang dibentuk dengan ajungsi sebuah elemen identitas ke dalam himpunan S yang tidak mengandung elemen identitas, dinotasikan dengan S^1 .

Sehingga untuk semigroup S yang sudah memuat elemen identitas, $S^1 = S$.

CONTOH 18 :

$S = \{2,3,4,5\}$ dan operasi binari yang berlaku dinyatakan dengan $\circ$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$\forall x_1 \in S \text{ dan } \forall x_2 \in S, \text{ maka } (x_1, x_2) \longrightarrow x_1$

Sehingga didapat :

$\circ$	2	3	4	5
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

Tabel S (tanpa elemen identitas)

Semigroup $(S, \circ)$ di atas tidak mempunyai elemen identitas, yaitu $3 \circ 2 = 3$, sedang $2 \circ 3 = 2$, maka $3 \circ 2 \neq 2 \circ 3$.

Sehingga semigroup di atas akan dibentuk menjadi $S \cup \{1\}$, dengan $\{1\}$ merupakan elemen identitas, akhirnya menjadi S^1 , yaitu :

o	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5

TABEL S^1 (semigroup dengan elemen identitas)

Akan ditunjukkan bahwa semigroup di atas mempunyai elemen identitas, yaitu :

$$1 \circ 1 = 1 \circ 1 = 1$$

$$2 \circ 1 = 1 \circ 2 = 2$$

$$3 \circ 1 = 1 \circ 3 = 3$$

$$4 \circ 1 = 1 \circ 4 = 4$$

$$5 \circ 1 = 1 \circ 5 = 5$$

DEFINISI 20 :

Misal S merupakan semigroup, maka dengan memperluas operasi binari pada S ke himpunan $S \cup \{0\}$, dimana 0 adalah elemen nol yang tidak termuat dalam S , dengan definisi $0 \circ 0 = 0 \circ s = s \circ 0 = 0$ untuk setiap $s \in S$.

Maka $S \cup \{0\}$ merupakan semigroup yang disebut adjungsi (adjunction) dari 0 sebagai elemen nol ke semigroup S .

CONTOH 19 :

S merupakan semigroup dengan $S = \{ 2,3,4,5 \}$ dan operasi binari $\circ$ yang berlaku pada S didefinisikan seperti pada contoh 18 dan terbentuk tabel S seperti pada contoh 18.

Semigroup di atas akan dibentuk menjadi $S \cup \{ 0 \}$, dengan $0 \notin S$ dan menurut definisi 20 berlaku $0 \circ 0 = 0$ $s \circ 0 = s \circ 0 = 0$, untuk setiap $s \in S$.

Akhirnya membentuk tabel sebagai berikut :

$\circ$	0	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
2	0	2	2	2	2
3	0	3	3	3	3
4	0	4	4	4	4
5	0	5	5	5	5

TABEL $S \cup \{ 0 \}$

DEFINISI 21 :

Suatu subgroupoid T dari sebuah semigroup S disebut subsemigroup dari S .

Dan T adalah subsemigroup sejati dari S jika $T \subsetneq S$ dan $T \neq S$.

DEFINISI 22 :

Suatu submonoid dari monoid semigroup adalah suatu subsemigroup dari S yang memuat elemen identitas dari S .

CONTOH 20 :

Diberikan semigroup dengan $S = \{ 1,2,3,4 \}$ dan operasi binari $\circ$ pada S didefinisikan pada tabel seperti contoh 17.

Diambil $T \subset S$, dengan $T = \{ 1,2 \}$.

Menurut contoh 16 didapatkan bahwa $T = \{ 1,2 \}$ adalah subgroupoid dari $S = \{ 1,2,3,4 \}$.

Selanjutnya karena $T \subset S$ dan $T \neq S$, maka T adalah subsemigroup sejati dari S .

Karena menurut contoh 17 elemen identitas dari S adalah 1 termuat dalam T , maka T juga merupakan submonoid dari S .

2.7. GROUP

DEFINISI 23 :

Suatu group adalah suatu himpunan tak kosong G bersama dengan suatu operasi binari dalam S , yang memenuhi :

(i). Adanya suatu elemen identitas $i \in G$, dengan kata lain

$$a \cdot i = a = i \cdot a, \text{ untuk } \forall a \in G$$

(ii). Berlakunya hukum asosiatif

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ untuk } \forall a, b, c \in G$$

(iii). Setiap elemen $a \in G$ mempunyai invers dalam G , yaitu a^{-1}

$$a \cdot a^{-1} = i = a^{-1} \cdot a$$

Atau dengan kata lain suatu group adalah suatu semigroup yang mempunyai suatu elemen identitas yang tiap elemennya mempunyai invers di dalamnya.

DEFINISI 24 :

Subgroup H dari group $(F, *)$ adalah himpunan bagian tak kosong H dari group $(F, *)$, yang merupakan group terhadap operasi binari $*$.

CONTOH 21 :

Diberikan $F = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ dan operasi binari yang berlaku dinyatakan dengan $\circ$ yang didefinisikan pada contoh 15.

Maka operasi binari $\circ$ pada S dapat didefinisikan seperti pada contoh 15.

Sehingga didapat tabel sebagai berikut :

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Akan ditunjukkan bahwa S merupakan suatu group, yaitu :

- Menurut contoh 17, dibuktikan elemen identitasnya 1.
- Menurut contoh 17, dibuktikan berlakunya hukum asosiatif.
- Setiap elemen $a \in G$ mempunyai invers a^{-1} dalam S

$$a \circ a^{-1} = i$$

$$1 \circ 1 = 1 \implies 1^{-1} = 1$$

$$2 \circ 2 = 1 \implies 2^{-1} = 2$$

$$3 \circ 3 = 1 \implies 3^{-1} = 3$$

$$4 \circ 4 = 4 \implies 4^{-1} = 4$$

Karena memenuhi aksioma (i),(ii),(iii), maka $(F, \circ)$ merupakan suatu group.

Dari contoh 20, jika diambil himpunan $R = \{1, 2\}$ dengan $R \subseteq S$, maka R merupakan subgroup dari group $(F, \circ)$, karena memenuhi aksioma (i),(ii) dan (iii).

DEFINISI 25 :

N merupakan subgroup normal bila dan hanya bila
 $(\forall a \in G). \quad aNa^{-1} = N.$

Syarat di atas bila ditulis menjadi :

$$a N a^{-1} \subset N \dots\dots\dots I$$

Karena a sebarang, maka rumus (I) berlaku juga untuk a^{-1} .

$$\text{Sehingga } a^{-1} N a \subset N.$$

$$\text{Dari ini diturunkan } N \subset a N a^{-1} \dots\dots\dots II$$

$$\text{Rumus (I) dan (II) menghasilkan } aNa^{-1} = N.$$

Rumus $a N a^{-1} \subset N$ dapat diberi bentuk : $a n a^{-1} \in N$,
 untuk setiap $n \in N$.

Sehingga syarat perlu-cukup agar N merupakan subgroup normal ialah $a n a^{-1} \in N$, untuk setiap $a \in G$ dan setiap $n \in N$.

$$\text{Demikian juga rumus } a N a^{-1} = N \text{ dapat diberi bentuk } a N = N a.$$

Sehingga syarat perlu-cukup supaya N subgroup normal ialah bahwa N komutatif dengan setiap elemen a dari G .

Maka syarat perlu-cukup supaya N subgroup normal ialah:

$$(\forall a \in G) . \quad a N = N a$$

$$(\forall a \in G)(\forall n \in \mathbb{N}). a^n a^{-1} \in N$$

2.8. TEORI IDEAL PADA SEMIGROUP

DEFINISI 26 :

Suatu ideal kanan R dari suatu semigroup S adalah suatu subset tak kosong dari S , sedemikian sehingga $\forall r \in R$ dan $\forall x \in S$ mengakibatkan $rx \in R$ dan ini ekuivalen dengan $RS \subseteq R$.

CONTOH 22 :

Diberikan semigroup (S, o) dengan $S = \{1, 2, 3\}$ dan operasi binari o didefinisikan sebagai berikut :

$\forall x_1 \in S, x_2 = 1$, maka $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1$
 $x_1 = 1, \forall x_2 \in S$, maka $(x_1, x_2) \longrightarrow x_2$
 $x_1 = x_2$, maka $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1$
 $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$, maka $(x_1, x_2) \longrightarrow x_2$
 $x_1 = 3$ dan $x_2 = 2$, maka $(x_1, x_2) \longrightarrow x_1$

Maka didapat :

$1 o 1 = 1$	$1 o 2 = 2$	$1 o 3 = 3$
$2 o 1 = 2$	$2 o 2 = 2$	$2 o 3 = 3$
$3 o 1 = 3$	$3 o 2 = 3$	$3 o 3 = 3$

Sehingga diperoleh tabel sebagai berikut :

o	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

TABEL 1

Ambil $R = \{2, 3\}$

Maka $R \subset S$

Dari tabel 1 di atas, maka didapat

o	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

$$RS \subseteq R$$

TABEL 2

Dari tabel 2, maka didapat $RS \subseteq R$, yaitu :

$$2 \circ 1 = 2, \{2\} \subseteq R$$

$$2 \circ 2 = 2, \{2\} \subseteq R$$

$$2 \circ 3 = 3, \{3\} \subseteq R$$

$$3 \circ 1 = 3, \{3\} \subseteq R$$

$$3 \circ 2 = 3, \{3\} \subseteq R$$

$$3 \circ 3 = 3, \{3\} \subseteq R$$

Sehingga R merupakan ideal kanan dari S .

DEFINISI 27 :

Suatu ideal kiri L dari suatu semigroup S adalah suatu subset tak kosong dari S , sedemikian sehingga $\forall l \in L$ dan $\forall x \in S$ mengakibatkan $xl \in L$, dan ini ekuivalen dengan $SL \subseteq L$.

Sehingga two-sided ideal I (juga disebut ideal) adalah subset tak kosong dari S , sedemikian sehingga, $\forall r \in R$, $\forall l \in L$ dan $\forall x \in S$, maka $rx = xl$.

Dan ini memenuhi $IS \cup SI \subseteq I$.

CONTOH 23 :

Diberikan semigroup $(S, \circ)$ dengan $S = \{1, 2, 3\}$ dan operasi binari didefinisikan pada tabel 1 dalam contoh 22.

Ambil $L = \{2, 3\}$.

Maka $L \subset S$.

Dari tabel 1 dalam contoh 22, maka didapat :

$\circ$	2	3
1	2	3
2	2	3
3	3	3

$$SL \subseteq L$$

TABEL 3

Dari tabel 3, maka didapat $SL \subseteq L$, yaitu :

$$1 \circ 2 = 2, \{2\} \subseteq L$$

$$2 \circ 2 = 2, \{2\} \subseteq L$$

$$3 \circ 2 = 3, \{3\} \subseteq L$$

$$1 \circ 3 = 3, \{3\} \subseteq L$$

$$2 \circ 3 = 3, \{3\} \subseteq L$$

$$3 \circ 3 = 3, \{3\} \subseteq L$$

Sehingga L merupakan ideal kiri dari S .

Dari contoh 22 dan contoh 23, maka didapat $RS = SL$ dan disebut dengan two-sided ideal I .

Sehingga $\{2, 3\}$ merupakan two-sided ideal dari S .

2.9. RELASI BINARI PADA HIMPUNAN

2.9.1. RELASI EQUIVALENSI

Suatu relasi binari ρ pada himpunan A adalah subset product cartesian $A \times A$ pada A dengan dirinya sendiri. Jika ρ dan σ adalah dua relasi pada A , maka komposisi $\rho \circ \sigma$ didefinisikan sebagai berikut.

DEFINISI 28 :

$$\rho \circ \sigma = \{(x,y) \in A \times A : \text{terdapatlah } z \in A \text{ dengan } (x,z) \in \rho \text{ dan } (z,y) \in \sigma\}, \text{ untuk } \forall \rho, \sigma \in A.$$

DEFINISI 29 :

Suatu relasi ρ pada sebuah himpunan A disebut relasi equivalensi, jika memenuhi relasi :

1. Refleksif :

$$\text{Jika } \forall x \in A, \text{ maka } (x,x) \in \rho \text{ atau } \rho \subset \rho$$

2. Symetri :

$$\text{Jika } \forall x,y \in A, (x,y) \in \rho \implies (y,x) \in \rho \text{ atau } \rho \subset \rho^{-1}.$$

3. Transitif :

$$\text{Jika } \forall x,y,z \in A, (x,y) \in \rho \text{ dan } (y,z) \in \rho \implies (x,z) \in \rho \text{ atau } \rho \circ \rho \subset \rho$$

CONTOH 24 :

Diberikan $\mathbb{Q}$ adalah himpunan bilangan rasional dengan adalah relasi kesamaan "=" dalam $\mathbb{Q}$.

Maka akan ditunjukkan bahwa ρ adalah relasi equivalensi pada $H = \{ \frac{n}{2n} \mid n \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{Q}$, dengan $n=1,2,\dots$

ENYELESAIAN :

Menurut definisi 29, maka akan ditunjukkan bahwa adalah relasi equivalen, yaitu memenuhi relasi :

1. Refleksif, karena :

Dengan mengambil $1/2 \in Q$, maka $(1/2, 1/2) \in \rho$

2. Symetri, karena :

Dengan mengambil $1/2, 2/4 \in Q$, $(1/2, 2/4) \in \rho \implies (2/4, 1/2) \in \rho$

3. Transitif, karena :

Dengan mengambil $1/2, 2/4, 3/6 \in Q$, $(1/2, 2/4) \in \rho$ dan $(2/4, 3/6) \in \rho \implies (1/2, 3/6) \in \rho$

2.9.2. RELASI ORDER

DEFINISI 30 :

Suatu relasi ρ pada sebuah himpunan A disebut relasi order jika memenuhi relasi :

1. Refleksif :

Jika $\forall x \in A$, maka $(x, x) \in \rho$

2. Anti Symetri :

Jika $\forall x, y \in A$, $(x, y) \in \rho$ dan $(y, x) \in \rho \implies x = y$

3. Transitif :

Jika $\forall x, y, z \in A$, $(x, y) \in \rho$ dan $(y, z) \in \rho \implies (x, z) \in \rho$

CONTOH 25 :

Misal Q adalah himpunan bilangan rasional dengan ρ adalah relasi ketidaksamaan " $\leq$ " dalam Q , maka akan ditunjukkan bahwa ρ adalah relasi order.

ρ adalah relasi order, yaitu memenuhi relasi :

1. Refleksif, karena :

Dengan mengambil $1/4 \in \mathbb{Q}$, maka $(1/4, 1/4) \in \rho$

2. Anti symetri, karena :

Dengan mengambil $1/4, 2/8 \in \mathbb{Q}$, $(1/4, 2/8) \in \rho$ dan
 $(2/8, 1/4) \in \rho \implies 1/4 = 2/8$.

3. Transitif, karena :

Dengan mengambil $1/4, 2/8, 3/8 \in \mathbb{Q}$. $(1/4, 2/8) \in \rho$ dan
 $(2/8, 3/8) \in \rho \implies (1/4, 3/8) \in \rho$.

DEFINISI 31 :

Misal A adalah suatu himpunan, dan ρ adalah relasi equivalensi dalam A .

Jika $x \in A$, maka klas equivalensi dari A modulo ρ memuat x adalah himpunan $\bar{x}$ yang didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{ y \in A : (y, x) \in \rho \} \\ &= \{ y \in A : y \sim x \}\end{aligned}$$

Sehingga dapat dikatakan $\bar{x}$ adalah himpunan dari semua elemen A yang equivalen terhadap x .

Jelas $x \in \bar{x}$, untuk setiap $x \in A$, dan jika $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ maka $\bar{x} = \bar{y}$.

Himpunan dari klas-klas equivalensi modulo ρ disebut himpunan faktor dari A oleh ρ dan ditulis A/ρ .

CONTOH 26 :

Diberikan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan

$$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b),$$

$$(b, a), (c, d), (d, c)$$

Jelas ρ adalah relasi equivalensi pada A.

Akan ditunjukkan kelas-kelas equivalensi dari A.

PENYELESAIAN :

Menurut definisi 31, maka diambil :

$$\bar{a} = \{(a, a), (b, a)\} = \{b, a\}$$

$$\bar{b} = \{(b, b), (a, b)\} = \{a, b\}$$

$$\text{Jadi } \bar{a} = \bar{b}$$

$$\bar{c} = \{(c, c), (d, c)\} = \{d, c\}$$

$$\bar{d} = \{(d, d), (c, d)\} = \{c, d\}$$

$$\text{Jadi } \bar{c} = \bar{d}$$

$$\bar{e} = \{(e, e)\} = \{e\}$$

Maka himpunan A/ρ adalah $\{\bar{a}, \bar{c}, \bar{e}\}$

2.10. HIMPUNAN TERURUT PARSIAL DAN LATTICE

DEFINISI 32 :

Misal A sebuah himpunan, dan ρ sebuah relasi order pada A, maka (A, ρ) disebut himpunan terurut parsial.

DEFINISI 33 :

Misal A suatu himpunan terurut parsial, jika setiap pasangan $\{x, y\} \subset A$ mempunyai sebuah supremum dan infimum maka A disebut suatu lattice.

Jika suatu lattice, maka $\sup \{x, y\}$ ditulis dengan $x \vee y$, dan disebut "join" dari x dan y.

Sedangkan $\inf \{x, y\}$ ditulis dengan $x \wedge y$, dan disebut "meet" dari x dan y.

DEFINISI 34 :

Misal A adalah lattice dan B subset dari A , $x \in B$ dan $y \in B \implies x \vee y \in B$ dan $x \wedge y \in B$, maka B disebut sublattice dari A .

DEFINISI 35 :

Misal ρ_1 dan ρ_2 merupakan relasi equivalensi dalam suatu himpunan S .

Himpunan tersebut parsial dari relasi-relasi equivalensi ini membentuk sebuah lattice, sehingga didapat :

$$\text{glb}(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 \cap \rho_2$$

dan

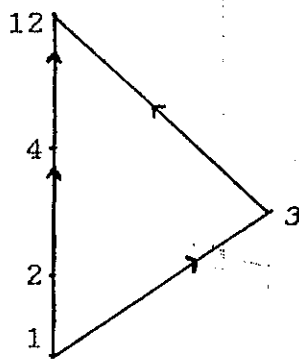
$\text{lub}(\rho_1, \rho_2) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\rho_1 \cup \rho_2)^n$, yang juga dinyatakan dengan $\rho_1 \vee \rho_2$ dan selanjutnya $(x, y) \in \rho_1 \vee \rho_2$ jika hanya jika terdapat $z_1, z_2, \dots, z_n \in S$, sedemikian bahwa $x = z_1, y = z_n$ dan $(z_i, z_{i+1}) \in \rho_1 \cup \rho_2$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Akibatnya bila $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$, maka $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

CONTOH 27 :

a. Misal $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$

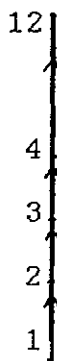
Jika relasi order pada A adalah " $\leq$ ", maka $(A, \leq)$ seperti yang ditunjukkan pada gambar (1) merupakan himpunan terurut parsial dengan $\sup A = 12$, dan $\inf A = 1$.



Gambar 1

b. Misal $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$.

Jika relasi order ρ pada A adalah " $\leq$ ", maka (A, ρ) merupakan himpunan terurut parsial (gambar 2) dan $\sup A = 12$, $\inf A = 1$.



Gambar 2

c. Karena setiap pasangan $\{x, y\} \subset A$ pada himpunan A diatas mempunyai sebuah sup dan inf, maka A adalah sebuah lattice yaitu :

$$\{1, 2\} \subset A \text{ maka } \sup\{1, 2\} = 1 \vee 2 = 2$$

$$\inf\{1, 2\} = 1 \wedge 2 = 1$$

$$\{2, 12\} \subset A \text{ maka } \sup\{2, 12\} = 2 \vee 12 = 12$$

$$\inf\{2, 12\} = 2 \wedge 12 = 2$$

..... dan seterusnya.