BAB III

MESIN LINIER

3.1. Pengertian :

$[S, X, Z, \tau, \omega]$ adalah suatu mesin dengan S, X, dan Z merupakan himpunan-himpunan yang berhingga, dan $\tau : S \times X \longrightarrow S$, dan $\omega : S \times X \longrightarrow Z$ merupakan suatu fungsi, atau dengan kata lain dapat dikemukakan disini bahwa :

S adalah himpunan dari keadaan-keadaan internal.

X adalah himpunan dari masukan-masukan

Z adalah himpunan dari keluaran-keluaran

τ adalah fungsi transisi

ω adalah fungsi yang menghasilkan keluaran.

Kemudian apabila F adalah suatu field, untuk suatu $n \in P$ maka $F^n = Mat_{n\times 1}(F)$ adalah ruang vektor dimensi n dari vektor-vektor kolom atas F. Sehingga jika diketahui $S = F^k$, $X = F^l$ dan $Z = F^m$, dimana $k, l, m \in N$, maka fungsi : $\tau : F^k \times F^l \rightarrow F^l$ atau dapat kita nyatakan sebagai fungsi $\tau : F^k + 1 \rightarrow F$ dapat disajikan sebagai berikut :

$$\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix} \right) \in F^k \times F^l \text{ dan } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \in F^k + 1$$

sehingga secara sama, dapat ditentukan ω sebagai fungsi yang mentransformasikan $F_k + l \rightarrow F_m$ atau dapat ditulis sebagai $\omega : F_k + 1 \rightarrow F_m$

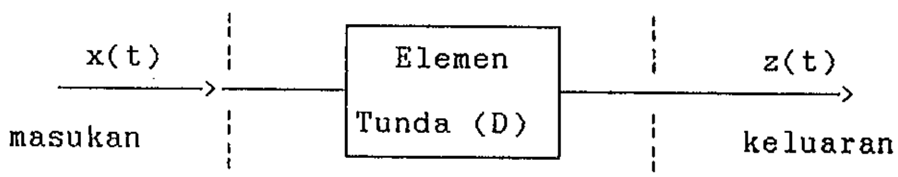
Kemudian dapat didefinisikan bahwa :

Definisi 3.1.1 :

Mesin = $[F_k, F_l, F_m, \tau, \omega]$ disebut mesin linier atas field berhingga F, jika $\tau : F_k + 1 \rightarrow F_k$ dan $\omega : F_k + 1 \rightarrow F_m$ merupakan transformasi-transformasi linier.

3.2. Diagram Blok Pada Pergeseran Register-register

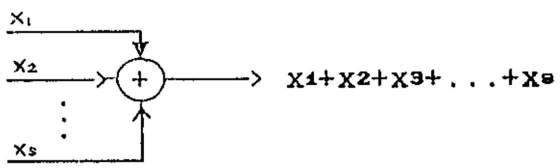
Diagram blok adalah merupakan gambar dari suatu proses dimana elemen dan aliran sinyalnya melukiskan suatu masukan dengan suatu keadaan tertentu (dalam bentuk elemen tunda) yang kemudian menghasilkan suatu keluaran, sehingga dapat dibentuk diagramnya adalah sebagai berikut :



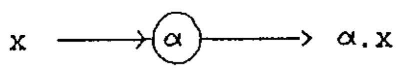
Dari diagram dapat dikemukakan bahwa arah panah yang menuju ke elemen tunda merupakan masukan x(t) dan arah panah yang meninggalkan elemen tunda merupakan keluaran z(t), sedangkan elemen tunda (D) adalah merupakan elemen yang berfungsi untuk menghubungkan masukan x(t) dan keluaran z(t).

Mesin-mesin linier yang terletak pada field berhingga F, umumnya menggunakan tiga macam alat untuk pengoperasiannya, yaitu :

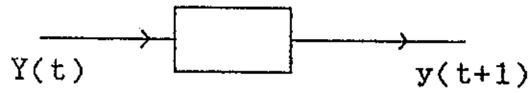
1. Penjumlahan : operasi yang digunakan untuk menjumlahkan semuamasukan menjadi keluaran. Sehingga jika ada masukan x_1, x_2, ... , $x_s \in F$, dimana $s \geq 1$, maka keluarannya ialah $x_1 + x_2 + \ldots + x_s$ (penjumlahan didalam F).



2. Perkalian : Operasi yang merubah masukan $x \in F$ menjadi keluaran dengan cara mengalikannya dengan suatu konstanta $\alpha \in F$, sehingga hasil keluarannya adalah $\alpha.x \in F$.



3. Elemen tunda : merupakan suatu alat yang selain digunakan untuk menghubungkan nilai masukan pada waktu t dan nilai keluaran pada waktu t + 1, juga merupakan alat penyimpanan dari nilai-nilai sebelumnya. Atau dapat kita tuliskan untuk masukan Y(t) maka keluarannya adalah y (t+1), jadi Y(t) = y (t+1). Untuk t = 0, 1, 2, 3, ...



Pada elemen tunda berlaku bahwa $y(t+1) = Y(t)$ dapat dikemukakan bahwa $y(t) = Y(t-1)$ dan apabila ditulis dalam bentuk operator tunda D ialah $y(t) = D\,Y(t)$.
Sebelum membicarakan mesin-mesin linier lebih lanjut maka terlebih dahulu didefinisikan operator tunda D, dimana berlaku :

Definisi 3.2.1 :

Operator tunda D adalah didalam $\mathrm{Hom}_F\ (F^N, F^N)$, sehingga jika ada fungsi f dengan $f \in F^N$, maka $D \in F^N$ didefinisikan sebagai :

$$(Df)(t) = \begin{cases} f(t-1) & , \text{jika } t \geq 1 \\ 0 & , \text{jika } t = 0 \end{cases}$$

atau f didefinisikan untuk $t = 0, 1, 2, \ldots$
Dan untuk D^k, dimana $k > 1$, maka $D^k f \in F^N$ didefinisikan sebagai :

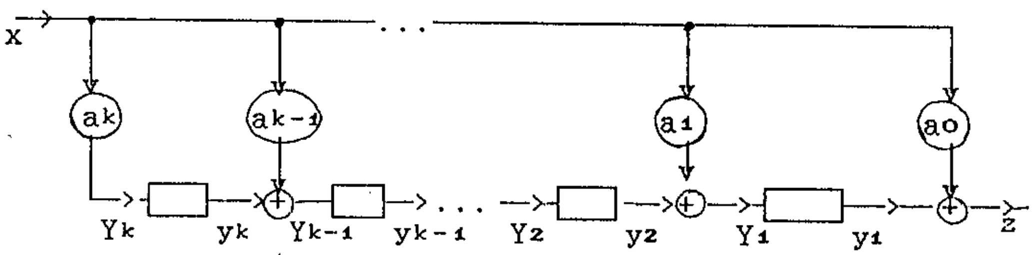
$$(D^k f)(t) = \begin{cases} f(t-k) & , \text{jika } t \geq k \\ 0 & , \text{jika } t < k \end{cases}$$

Jadi $D^k f$ didefinisikan untuk $t = k, k+1, k+2, \ldots$
Berikut ini akan diperkenalkan dua macam contoh sistem kerja yang dipergunakan didalam mesin linier :

1. Sistem kerja untuk mesin linier $M[F_k, F_l, F_m, \tau, \omega]$ dengan dua terminal.
   Didalam mesin ini dinamakan sistem kerja pergeseran register arus maju (Feedforward Shif Register).
   Dalam sistem kerja mesin linier ini digunakan terminal yang pertama sebagai terminal masukan dari

terminal yang kedua sebagai terminal keluaran, atau dengan kata lain l = m = 1, dimana pada masing-masing terminal membawa elemen tunggal dari F.

Pada pergeseran register arus maju mempunyai bentuk sirkuit sebagai berikut :



Gambar 3.2.1 Pergeseran Register Arus Maju

Dari gambar terlihat bahwa :

a_o, a_1, ... , a_k adalah elemen-elemen konstan pada F, $F_l = F_1 = [x]$ merupakan signal masukan, dan $F_m = F_1 = [z]$ merupakan signal keluaran sedangkan Y_i adalah nilai masukan elemen tunda yang ke-i dan y_i adalah nilai keluaran elemen tunda yang ke-i, dengan i = 1, 2, 3, ... , k.

Sehingga akan kita peroleh persamaan :

$Y_k = a_k x$,

$Y_{k-1} = y_k + a_{k-1} x$,

$Y_{k-2} = y_{k-1} + a_{k-2} x$, $Y_{k-3} = y_{k-2} + a_{k-2} x$, ... ,

$Y_2 = y_3 + a_1 x$, $Y_1 = y_2 + a_1 x$

dan :

$z = y_1 + a_o x$

Dan untuk setiap waktu t, persamaannya menjadi :

$Y_k(t) = a_k x(t)$, $Y_i(t) = y_i + 1 (t) + a_i x(t)$, untuk

$1 \le i < k$

$z(t) = y_1(t) + a_0\ x(t)$

Karena didalam elemen tunda $Y(t) = y(t+1)$, maka dapat pula dinyatakan bahwa $Y\ (t-1) = y(t)$, sehingga untuk setiap elemen tunda ke-i diperoleh bahwa $y_i(t) = Y_i\ (t-1)$, atau apabila digunakan operator tunda D maka dapat kita tulis : $y_i(t) = D\ Y_i(t)$, untuk semua $t \ge 1$.

Sehingga persamaan untuk z atau keluarannya dalam bentuk sparator tunda akan menjadi :

$$\begin{aligned} z &= a_0x + y_1 \\ &= a_0x + DY_1 \\ &= a_0x + D\ (a_1x + y_2) \\ &= a_0x + a_1Dx + D(DY_2) \\ &= a_0x + a_1Dx + D^2\ (a_1x + y_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$z = a_0x + a_1Dx + \ldots + a_{k-1}D^{k-1}x + a_k\ D^kx$$

$$z = (a_0 + a_1D + \ldots + a_{k-1}D^{k-1} + a_k\ D^k)\ x$$

Sehingga peroleh suatu bentuk polimonial :

$$T(D) = a_0 + a_1D + \ldots + a_{k-1}D^{k-1} + a_k\ D^k$$

($T(D)$ desebut fungsi transfer dari pergeseran register arus maju dari gambar 3.2.1).

Dari definisi diperoleh bahwa untuk setiap waktu t, maka persamaan keluarannya menurut definisi 3.2.1 dapat ditulis menjadi :

$$z(t) = a_0\ x(t) + a_1x(t-1) + \ldots + a_{k-1}\ x\ (t-k+1) + a_k\ x\ (t-k),\ \text{untuk semua } t \ge k$$

Dan jika $t < k$, maka keluaran $z(t)$ bergantung pada keadaan awal $[y_1(0)\ y_2(0)\ \ldots\ y_k(0)]^T$ dari mesin, dan juga tergantung pada masukan-masukan yang diterima dalam selang waktu t, sehingga diperoleh :

$$
\begin{aligned}
z(t) &= a_0\, x(t) + y_1(t) \\
&= a_0\, x(t) + Y_1(t-1) \\
&= a_0\, x(t) + a_1\, x(t-1) + y_2(t-1) \\
&= a_0\, x(t) + a_1\, x(t-1) + a_2\, x(t-2) + y_3(t-2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

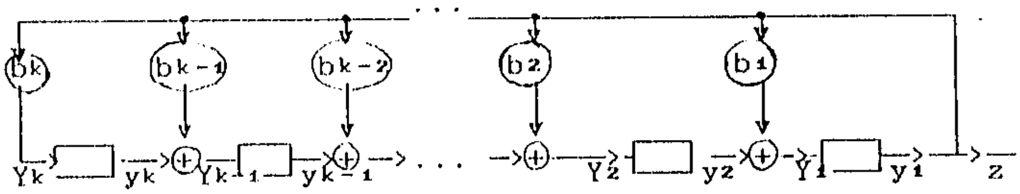
$$
z(t) = a_0\, x(t) + a_1\, x(t-1) + \ldots + a_t x(0) + y_{t+1}(0) \quad \text{untuk } 0 \le t < k
$$

Dari persamaan terlihat bahwa z (t) bergantung pada keadaan awal $y_i(0)$ dan nilai-nilai masukkannya selang waktu t.

2. Sistem kerja untuk mesin linier $M = [F^k, F^l, F^m, \tau, \omega]$ dengan satu terminal atau sistem kerja dari mesin ini dinamakan pergeseran register arus balik (Feed back Shif Register).

   Sistem kerja dalam mesin linier jenis ini hanya digunakan satu terminal saja yaitu terminal keluaran saja atau dengan kata lain l = 0, m = 1.

   Sistem kerja jenis pergeseran register arus balik mempunyai bentuk sirkuit sebagai berikut.



Gambar 3.2.2 Pergeseran Register Arus Balik

Seperti dilihat dari gambar sirkuit diatas, bahwa didalam pergeseran register arus-balik ini, hanya dikenal satu simbul keluaran saja yaitu z, dengan b_1, b_2, ... , b_k adalah elemen-elemen konstan pada $\dot{F}$, sehingga diperoleh persamaan :

$$y_k = b_k\, z,$$

$$Y_{k-1} = y_k + b_{k-1}\, z,$$

$$Y_{k-2} = y_{k-1} + b_{k-2}\, z,$$

$$Y_{k-3} = y_{k-2} + b_{k-2}\, z, \ldots,$$

$$Y_2 = y_3 + b_1 z,\ Y_1 = y_2 + b_1 z$$

dan :

$$z = y_1$$

Untuk persamaan keluaran (z) dalam bentuk operator tunda D akan diperoleh :

$$\begin{aligned}
z = y_1 &= D(Y_1)\\
&= D(y_2 + b_1\, z)\\
&= b_1\, Dz + D(DY_2)\\
&= b_1\, Dz + D^2(y_3 + b_2\, z)\\
&= b_1\, Dz + b_2 D^2 z + D^2(D\, Y_3)\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

$$z = b_1\, D\, z + b_2 D^2 z + \ldots + b_{k-1}\, D^{k-1} z + b_k\, D^k z$$

$$z = (b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_{k-1}\, D^{k-1} + b_k\, D^k) z$$

Sehingga kita peroleh bentuk polimonial :

$$T(D) = b_1\, D + b_2\, D^2 + \ldots + b_{k-1}\, D^{k-1} + b_k\, D^k$$

(dan polinomial ini disebut sebagai fungsi transfer dari pergeseran register arus balik dari gambar 3.2.2)

Kemudian dari definisi operator tunda, diperoleh bahwa untuk setiap waktu t, maka persamaan keluarannya dapat ditulis menurut definisi 3.2.1, menjadi :

$$z(t) = b_1\, z(t-1) + b_2\, z(t-2) + \ldots + b_{k-1}\, z(t-k+1) + b_k\, z(t-k), \text{ untuk semua } t \geq k.$$

Dan untuk t < k, maka keluaran z (t) bergantung pada keadaan awalnya dan juga bergantung pada keluaran-keluaran sebelumnya, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} z(t) &= y_1(t) \\ &= D\, Y_1(t) \\ &= Y_1\,(t-1) \\ &= b_1\, z(t-1) + y_2\,(t-1) \\ &= b_1\, z(t-1) + b_2\, z(t-2) \quad y_3\,(t-2) \\ z(t) &= b_1\, z(t-1) + b_2\, z(t-2) + b_3\, z(t-3)\; y_4\,(t-3) \\ &\vdots \\ z(t) &= b_1\, z(t-1) + b_2\, z(t-2) + \ldots + b_t\, z(0) + \\ &\quad y_t + {}_1(0), \text{ untuk } t < k \end{aligned}$$

[Jika seluruh elemen tunda mempunyai keluaran awal 0, maka z (t) juga akan mempunyai nilai 0 untuk setiap waktu t].

3.3. Matrik-matrik Characterizing dari Mesin Linier.

Dengan menggunakan teorema 2.2.1.,maka pada mesin linier M = [F^k, F^l, F^m, c, w] akan diperoleh elemen-elemen matrik a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, $\in F$, sedemikian sehingga untuk suatu keadaan $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \in F^k$ dan masukan

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix} \in F^l$ akan menghasilkan keadaan berikutnya $\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} \in F^k$.

atau dengan kata lain :

suatu ruang vektor keadaan dimensi -k dengan barisan masukan yang berdimensi-l oleh transformasi τ akan dipetakan ke ruang vektor keadaan berikutnya yang berdimensi- k, sedemikian dapat ditulis τ : $F^{k+l} \rightarrow F^k$

Diperoleh keadaan berikutnya ialah :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{1l} \\ \ldots & & & & & & & \ldots \\ a_{k1} & a_{k1} & \ldots & a_{kk} & b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & & & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{1l} \\ \ldots & & & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}$$

Atau dapat ditulis keadaan berikutnya :

$$Y = Ay + Bx$$

Dan untuk setiap waktu t, maka persamaan matrik characterizing untuk keadaan berikutnya adalah :

$$Y(t) = y(t+1) = Ay(t) + Bx(t) \qquad \ldots.(3.3.1)$$

dengan :

$$Y = [\ Y_i]_{k \times 1} \ ; \ A = [a_{ij}]_{k \times k} \ ; \ B = [b_{ij}]_{k \times l}$$

$y = [y_i]_{k \times 1}$

Kemudian untuk transformasi linier $\omega : F^{k+l} \rightarrow F^m$, yaitu oleh transformasi linier w maka suatu ruang vektor keadaan yang mempunyai dimensi-k dengan suatu ruang vektor masukan yang berdimensi- l akan menghasilkan ruang vektor keluaran yang berdimensi-m, sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & d_{11} & d_{1l} & \dots & d_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2l} \\ \dots & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mk} & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2k} \\ \dots & & \\ c_{m1} & c_{m1} & \dots c_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1l} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{1l} \\ \dots & & & \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis persamaan keluarannya ialah :

$z = Cy + Dx$

Dan untuk setiap waktu t, maka persamaan matrik characterizing untuk keluarannya adalah :

$$z(t) = Cy(t) + Dx(t) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(3.3.2)$$

dimana : $z = [z_i]_{mx1}$, $y = [y_i]_{kx1}$ $C = [c_{ij}]_{mxk}$ dan $D = [d_{ij}]_{mxl}$

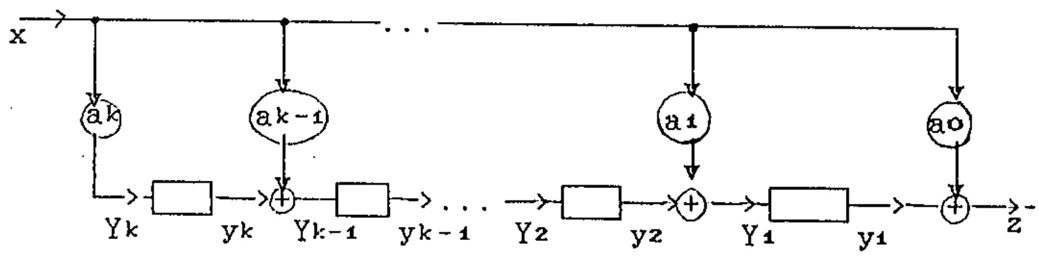
Matrik-matrik A, B, C, D pada persamaan :

$Y = Ay + Dx$ dan $z = Cy + Dx$ adalah merupakan matrik charakterizing dari M, sehingga mesin linier M =

[Fk, Fl, Fm, τ, ω] dapat ditulis sebagai M = [A, B, C, D]

Contoh 3.3 :

Didalam sistem kerja pergeseran register arus maju yang mempunyai gambar sirkuit sebagai berikut :



Gambar 3.3 Pergeseran register Arus Maju

Akan diperoleh persamaan :

$Y_k = a_k x,\ Y_{k-1} = y_k + a_{k-1}\, x,\ \ldots,\ Y_1 = y_2 + a_1 x$

$z = y_1 + a_o\, x$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{k-1} \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix} [x]$$

$$[z] = [\,1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\,0\,] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} + [a_o][x]$$

Jadi diperoleh bahwa matrik-matrik charakterizing dari pergeseran register arus maju yang mempunyai k- unit tunda adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \end{bmatrix} ; \quad C = [1\ 0\ 0\ \dots 0] ;$$

$$D = [a_0]$$

Jadi diperoleh bahwa : A = Mat k x k

B = Mat k x 1

C = Mat 1 x k

D = Mat 1 x 1

Teorema 3.3.1 :

Jika suatu mesin linier M = (A, B, C, D) mempunyai waktu awal t = 0, dan keadaan awal y (0), maka keadaan-keadaan selanjutnya pada waktu t adalah :

$$y(t) = A^t y(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i} B\, x(i) \quad \dots\dots\dots\dots (3.3.3)$$

Dan keluaran-keluarannya pada waktu t adalah :

$$z(t) = CA^t y(0) + \sum_{i=0}^{t-1} CA^{t-1-i} B\, x(i) + Dx(t) \quad \dots (3.3.4)$$

Bukti :

Diambil t = 1 pada persamaan 3.3.3 , maka diperoleh :

$y(1) = A^{1}y(0) + A^{0}\ B\ x(0)$, karena $A^{0} = I$, maka diperoleh :

$y(1) = A^{1}y(0) + I\ B\ x(0) = A\ y(0) + B\ x(0)$

Andaikan berlaku untuk t = n , maka persamaan 3.3.3. akan menjadi :

$$y(n) = A^{n}y(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}\ B\ x(i) \qquad .....(3.3.3a)$$

Sekarang akan dibuktikan berlaku untuk t = n + 1 .

Dari persamaan 3.3.1 untuk t = n , diperoleh :

$$y(n+1) = A\ y(n) + B\ x(n) \qquad ......(3.3.1a)$$

Kemudian substitusikan persamaan 3.3.3a ke persamaan 3.3.1a , diperoleh :

$$y(n+1) = A\left[A^{n}y(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}\ B\ x(i) \right] + B\ x(n)$$

$$y(n+1) = A^{n+1}y(0) + \sum_{i=0}^{n} A^{n-i}\ B\ x(i) \qquad ......(3.3.3b)$$

dari persamaan 3.3.2,untuk t = n + 1 akan diperoleh :

$$z(n+1) = C\ y(n+1) + Dx(n+1) \qquad ....(3.3.2a)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 3.3.3b ke persamaan 3.3.2a , diperoleh :

$$z(n+1) = C\left[A^{n+1}y(0) + \sum_{i=0}^{n} A^{n-i}\ B\ x(i) \right] + Dx(n+1)$$

$$z(n+1) = C\ A^{n+1}y(0) + \sum_{i=0}^{n} C\ A^{n-i}\ B\ x(i) + Dx(n+1)$$

Karena berlaku untuk semua harga t , maka teorema 3.3.1 terbukti .

3.3.1 Jenis-Jenis Mesin Linier :

Definisi 3.3.1.:

Mesin linier Autonomous adalah mesin linier yang tidak mempunyai barisan masukan, atau dengan kata lain $l = 0$ yang berarti ruang vektor input $F_l = F_o = [0]$, yang berarti pula bahwa matrik B dan D tidak ada, sehingga diperoleh persamaan :

$$y(t) = A^t y(0) \quad ....(3.3.5\ a)$$

$$z(t) = CA^t y(0) = Cy(t) ....(3.3.5\ b)$$

Pada mesin linier Autonomous ini digunakan sistem kerja pergeseran register arus balik.

Definisi 3.3.2.:

Mesin linier Inert adalah mesin linier yang mempunyai keadaan awal $y(0) = 0$ sehingga diperoleh persamaan keadaan berikutnya dan persamaan keluarannya pada waktu t adalah :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i} Bx\ (i) \quad ....(3.3.6\ a)$$

dan

$$z(t) = \sum_{i=0}^{t-1} CA^{t-1-i}\ B\ x\ (i) + Dx(t) ..(3.3.6\ b)$$

Pada mesin linier Inert ini digunakan sistem kerja pergeseran register arus maju.

3.4. Fungsi Transfer Rasional

Jika diketahui $m(X) = m_0 + m_1 X + \ldots + m_{r-1} X^{r-1} + X^r$ adalah polinomial monik atas field F, maka dapat didefinisikan :

Definisi 3.4.1 :

A adalah matrik bujur sangkar dan juga merupakan matrik karakteristik dari mesin linier M, maka polinomial monik m(x) atas field F disebut polinomial monik minimal jika : $m(A) = \sum_{j=0}^{r} m_j A^j = 0$

Contoh :

Diketahui : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matrik karakteristik dari mesin linier dan polinomial monik $m(X) = X^2 - 3X + 1$, maka diperoleh :

$$m(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi m(X) merupakan polinomial monik yang minimal matrik A.

Untuk membicarakan fungsi transfer dari mesin linier maka terlebih dahulu akan dibicarakan mesin linier M = (A, B, C, D) yang mempunyai keadaan awal y(n), untuk suatu $n \in N$, maka dari persamaan 3.3.3. akan diperoleh :

$$y(n+t) = A^t\, y(n) + \sum_{j=0}^{t-1} A^{t-1-i}\, Bx\,(n + i)$$

Kemudian dengan mensubstitusi $t = j$ untuk $0 \le j \le r$ maka akan diperoleh bentuk polinomial keadaan :

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ y(n+j) = \sum_{j=o}^{r} mj \left[A^j y(n) + \sum_{i=o}^{j-1} A^{j-1-i} Bx\ (n+i)\right]$$

$$= \left[\sum_{j=o}^{r} mj\ A^j\right] y(n) + \sum_{j=o}^{r} \sum_{i=o}^{j-1} mj\ A^{j-1-i} Bx\ (n+i)$$

Karena pada mesin linier M = (A, B, C, D) mempunyai matrik chracterizing A, maka untuk polinomial monik minimal dari matrik A sedemikian sehingga berlaku $m\ (A) = \sum_{j=o}^{r} mj\ A^j = 0$, maka diperoleh :

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ y(n+j) = \left[\sum_{j=o}^{r} mjA^j\right] y(n) + \sum_{j=o}^{r} \sum_{i=o}^{j-1} mj\ A^{j-1-i} Bx\ (n+i)$$

$$= 0 + \sum_{i=o}^{r-1} \left[\sum_{j=i+1}^{r} mj\ A^{j-1-i} B\right] x\ (n+i)$$

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ y(n+j) = \sum_{i=o}^{r-1} Mi\ x\ (n + i) \qquad \text{.........(3.4.1)}$$

Dimana : $Mi = \sum_{j=i+1}^{r} mj\ A^{j-1-i} B$, untuk $0 \le i \le r-1$

Untuk $Mr = 0$, maka persamaan 3.5.1 bisa dirubah menjadi :

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ y(n+j) = \sum_{i=o}^{r} Mi\ x\ (n + i) \qquad \text{.........(3.4.2)}$$

Kemudian untuk keluaran yang mempunyai keadaan awal y(n) maka dari persamaan 3.3.2 akan diperoleh :

$$z\ (n+t) = Cy\ (n+t) + Dx(n+t)$$

Dengan mensubstitusi : $t = j$ untuk $0 \le j \le r$, maka bentuk polinomial dari keluarannya ialah :

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ z(n+j) = \sum_{j=o}^{r} mj\ [Cy\ (n+j) + Dx\ (n+j)]$$

$$= C \sum_{j=o}^{r} mj\ y(n+j) + D \sum_{j=o}^{r} mj\ x\ (n+j)$$

Karena dari persamaan 3.4.2 maka :

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ y(n+j) = \sum_{j=o}^{r} Mj\ x(n+j)\ ,\ \text{jadi :}$$

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ z(n+j) = C \sum_{j=o}^{r} Mj\ x(n+j) + D \sum_{j=o}^{r} mj\ x\ (n+j)$$

$$= \sum_{j=o}^{r} [CMj + mj\ D]\ x\ (n+j)$$

Atau

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ z(n+j) = \sum_{j=o}^{r} Lj\ x\ (n+j) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.3)$$

dimana : $Lj = CMj + mj\ D$

Dengan mensubstitusikan : $t = n + r$, maka persamaan 3.4.3 menjadi :

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ z(t-r+j) = \sum_{j=o}^{r} Lj\ x\ (t-r+j)\ :\ \text{untuk semua } t \leq r$$

Karena disini yang dipelajari adalah mesin linier dan dua terminal, dimana $l = m = 1$, dan matrik $Lj = [lj]$ adalah merupakan matrik 1 x 1.

Karena Lj atau $[lj]$ adalah matrik 1 x 1, maka persamaan 3.5.3 akan menjadi :

$$\sum_{j=o}^{r} mj\ z(t-r+j) = \sum_{j=o}^{r} lj\ x\ (t-r+j) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.4.4)$$

Untuk $mr = 1$, maka persamaan 3.5.4 dapat tulis menjadi :

$$z(t) + \sum_{j=o}^{r-1} m_j\, z(t-r+j) = \sum_{j=o}^{r} l_j\, x\,(t-r+j) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.5)$$

atau dapat ditulis :

$$z(t) = \sum_{j=o}^{r} l_j\, x(t-r+j) - \sum_{j=o}^{r-1} m_j\, z\,(t-r+j), \text{ untuk semua } t \geq r$$

sehingga menyatakan bahwa keluaran yang sekarang pada waktu t adalah kombinasi linier dari masukan sekarang dan masukan sebelumnya dan juga keluaran pada waktu $t - r$, $t - r + 1, \ldots, t - 1$.

Jika persamaan 3.4.4 dijabarkan, akan diperoleh :

$$m_o\, z(t-r) + m_1\, z(t-r+1) + \ldots + m_{r-1}\, z(t-1) + m_r\, z(t) =$$

$$l_o\, x(t-r) + l_1\, x\,(t-r+1) + \ldots + l_{r-1}\, x\,(t-1) + l_r x(t)$$

dan apabila ditulis bentuk operator tunda D, diperoleh :

$$m_o\, D^r z + m_1\, D^{r-1} z + \ldots + m_{r-1}\, Dz + m_r\, z =$$

$$l_o\, D^r x + l_1\, D^{r-1} x + \ldots + l_{r-1}\, Dx + l_r\, x$$

$$(m_o\, D^r + m_1\, D^{r-1} + \ldots + m_{r-1}\, D + m_r) z =$$

$$(l_o\, D^r x + l_1\, D^{r-1} + \ldots + l_{r-1}\, D + l_r\,) x$$

$$m\,(\overline{D}) = h\,(D)\,x \quad (3.4.6)$$

Kemudian apabila bentuk polinomial dari operator tunda D,dirubah kebentuk polinomial dalam variabel X yang terletak dalam F[x], maka $\overline{m}$ (D) dapat ditulis menjadi :

$$\overline{m}(X) = m_o\, X^r + m_1\, X^{r-1} + \ldots + m_{r-1}\, X + m_r = X^r m(1/X)$$

adalah polinomial reciprocal (berbanding terbalik) dari polinomial $m(X) \in F[X]$ dengan degree $-r$

Menurut persamaan 3.4.3. bahwa $m_r = 1$ maka diperoleh persamaan :

$$\overline{m}\,(D) = m_o\, D^r + m_1\, D^{r-1} + \ldots + m_{r-1}\, D + 1 \ldots\ldots\ldots\; (3.4.7)$$

Didalam persamaan 3.4.7 $\overline{m}(D)$ mempunyai bentuk konstan yang tidak nol yaitu $m_r = 1 \neq 0$, jadi $\bar{m}(D)$ mempunyai invers.

Sehingga persamaan 3.4.6 dapat ditulis sebagai berikut :

$$(\bar{m}(D))^{-1}(\bar{m}(D)) \cdot z = (\bar{m}(D))^{-1}(h(D))\, x$$

$$1 \cdot z = (\bar{m}(D))^{-1}, h(D)\, x$$

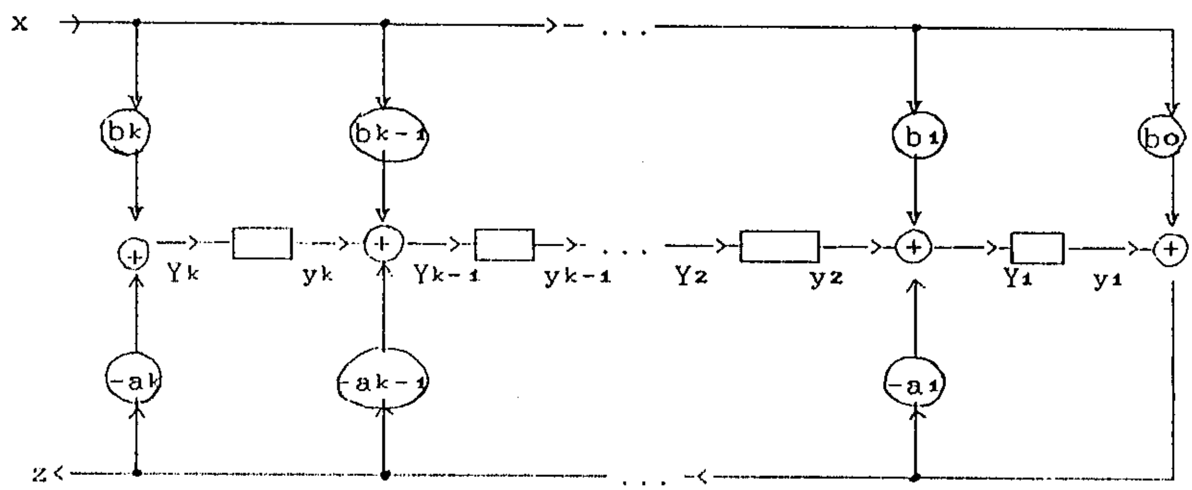
$$z = \frac{h(D)}{\bar{m}(D)} x \qquad (3.4.8)$$

dimana $h(D) / \bar{m}(D)$ adalah fungsi transfer dalam operator tunda D yang digunakan untuk menghubungkan barisan keluaran dengan barisan masukan (fungsi transfernya merupakan hasil bagi dari dua polinomial).

Sekarang akan ditunjukkan bahwa dengan gambar berikut akan diperoleh suatu fungsi transfer rasional

$b(D) / a(D)$ dan $\dfrac{b(D)}{a(D)} = \dfrac{b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k}{1 + a_1 D + \ldots + a_k D^k}$

Untuk itu terlebih dahulu dapat dilihat pada gambar sirkuit berikut ini :



Gambar 3.4.1 Fungsi transfer $(b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k) / (1 + a_1 D + \ldots + a_k D^k)$

Dari gambar 3.4.1 diperoleh :

$$Y_k = b_k\ x - a_k\ z$$

$$Y_i = y_{i+1} + b_i\ x - a_i\ z\ ;\ \text{untuk } 1 \le i \le k-1$$

$$Y_i = D(Y_{i+1}) + b_i x - a_i\ z$$

dan :

$$\begin{aligned}
z &= y_1 + b_o\ x \\
&= D(Y_1) + b_o\ x \\
&= D(DY_2 + b_1\ x - a_1\ z) + b_o\ x \\
&= D^2 Y_2 + b_1\ Dx - a_1\ Dz + b_o\ x \\
&= D^2\ (DY_3 + b_2\ x - a_2 z) + b_1\ Dx - a_1\ Dz + b_o\ x \\
&\ \ \vdots \\
z &= D^{k-1}(DY_k + b_{k-1}\ x - a_{k-1}\ z) + b_{k-2}\ D^{k-2}x \\
&\quad - a_{k-2}\ D^{k-2} + \ldots + b_1\ Dx - a_1 Dz + b_o\ x \\
&= D^k Y_k + b_{k-1} D^{k-1} x - a_{k-1} D^{k-1} z + b_{k-2}\ D^{k-2} x \\
&\quad - a_{k-2}\ D^{k-2}\ z + \ldots + b_1\ Dx - a_1 Dz + b_o\ x \\
&= D^k (b_k\ x - a_k\ z) + b_{k-1}\ D^{k-1} x - a_{k-1}\ D^{k-1} z \\
&\quad + b_{k-2}\ D^{k-2} x - \ldots + b_1 Dx - a_1\ Dz + b_o x \\
z &= b_k\ D^k x - a_k D^k z + b_{k-1}\ D^{k-1} x - a_{k-1}\ D^{k-1} z \\
&\quad + b_{k-2}\ D^{k-2} - \ldots + b_1\ Dx - a_1 Dz + b_o x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_k\ D^k z + a_{k-1}\ z + \ldots + a_1\ Dz + z &= b_k\ d^k x + b_{k-1}\ D^{k-1} x \\
&\quad + \ldots + b_1 Dx + b_o x \\
(a_k\ D^k + a_{k-1} + \ldots + a_1\ D + 1)\ z &= (b_k\ d^k + b_{k-1}\ D^{k-1}) \\
&\quad + \ldots + b_1 D + b_o\ )x \\
a(D)\ z &= b(D)\ x \\
z &= \frac{b(D)}{a(D)}\ x
\end{aligned}$$

Jadi terlihat bahwa fungsi transfer rasional dari gambar

3.4.1 ialah :

$$\frac{b(D)}{a(D)} = \frac{b_0 + b_1 D + \ldots + b_{k-1} D^{k-1} + b_k D^k}{1 + a_1 D + \ldots + a_{k-1} D^{k-1} + a_k D^k}$$

Jadi diperoleh bahwa $a_0 = 1$ atau $a_0 \neq 0$

Definisi 3.4.2 :

Suatu polinomial monik d(x) disebut pembagi persekutuan terbesar dari polinomial yang bukan nol $a(X), b(X) \in F[X]$, jika :

a) d(X) adalah pembagi persekutuan dari a(X) dan b(X)

b) Setiap pembagi persekutuan dari a(X) dan b(X) adalah juga pembagi d(X) dan biasanya ditulis : $(a(X), b(X)) = d(X)$

Untuk memperoleh polinomial monik d(X) dapat diperoleh melalui algoritma berikut :

ALGORITMA EUCLIDEAN :

Untuk setiap pasangan dari bentuk polinomial bukan nol a(X) dan $b(X) \in F[X]$ maka bisa diperolehpembagi persekutuan terbesar dari a(X) dan b(X) dengan proses pembagian yang dilakukan secara berulang-ulang, sehingga menghasilkan polinomial sisanya $r_1(X) > r_2(X) > \ldots$, Misal pembagian antara a(X) dengan b(X) maka akan diperoleh polinomial-polinomial q(X), $r(X) \in F[X]$ yaitu :

i) $a(X) = q_1(X)\, b(X) + r_1(X)$

Jika $r_1(X) = 0$ atau $\deg r_1(X) < \deg b(X)$ maka

$q_1(X)$ dan $b(X)$ adalah faktor dari $a(X)$

ii) Apabila $r_1(X) \neq 0$, maka diperoleh :

$b(X) = q_2(X)r_1(X) + r_2(X)$

Jika $r_2(X) = 0$ atau deg $r_2(X) <$ deg $r_1(X)$ maka $q_2(X)$ dan $r_1(X)$ adalah faktor dari $b(X)$.

iii) Demikian seterusnya, sampai pada

$r_{k-2}(X) = q_k(X)\, r_{k-1}(X) + r_k(X)$

Jika $r_k(X) = 0$ atau deg $r_k(X) <$ deg $r_{k-1}(X)$ maka $q_k(X)$ dan $r_{k-1}(X)$ adalah faktor dari $r_{k-2}(X)$

iv) Sampai akhirnya diperoleh :

Jika $r_{k-1}(X) \neq 0$ dan $r_k(X) = 0$ atau dapat tulis

$r_{k-1}(X) = q_{k+1}(X)\, r_k(X) + 0$

Jadi didapat bahwa $r_k(X)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari $a(X)$ dan $b(X)$.

Contoh :

Diketahui : fungsi transfer dari

$$\frac{b(D)}{a(D)} = \frac{D^6 + D^5 + 2D^4 + 1}{2D^5 + D^4 + D^2 + 2D + 2}$$

Terletak pada GF (3)

Kemudian fungsi transfer diatas akan dirubah menjadi bentuk yang sudah tereduksi. Untuk itu fungsi transfernya terlebih dahulu dirubah ke dalam bentuk polinomial-polinomial dalam F[X] yaitu : $b(X) = X^6 + X^5 + 2X^4 + 1$ dan $a(X) = 2X^5 + X^4 + X^2 + 2X + 2$, kemudian akan dibagi $b(X)$ dengan $a(X)$

menurut algoritma Euclidean, hingga diperoleh :

$$X^6 + X^5 + 2X^4 + 1 = (2X+1)(2X^5 + X^4 + X^2 + 2X + 2) + (X^4 + X^3 + X^2 + 2)$$

$$r_1(X) = X^4 + X^3 + X^2 + 2$$

$$2X^5 + X^4 + X^2 + 2X + 2 = (2X+2)(X^4 + X^3 + X^2 + 2) + (2X^3 + 2X^2 + X + 1)$$

$$r_2(X) = 2X^3 + 2X^2 + X + 1$$

$$X^4 + X^3 + X^2 + 2 = (2X)(2X^3 + 2X^2 + X + 1) + (2X^2 + X + 2)$$

$$r_3(X) = 2X^2 + X + 2$$

$$2X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X + 2)(2X^2 + X + 2) + 0$$

$$r_4(X) = 0$$

Jadi pembagi persekutuan terbesar dari (a(X), b(X)) = $2X^2 + X + 2 = d(X)$, dan karena d(X) adalah merupakan polinomial monik, maka :

$$d(X) = 2\,(2X^2 + X + 2) = X^2 + 2X + 1$$

Kemudian dengan membagi a(X) dan b(X) dengan d(X) akan diperoleh :

$$a(X) = 2X^5 + X^4 + X^2 + 2X + 2$$
$$= (X^2 + 2X + 1)\,(2X^3 + X^2 + 2)$$

$$b(X) = X^6 + X^5 + 2X^4 + 1$$
$$= (X^2 + 2X + 1)\,(X^4 + 2X^3 + X + 1)$$

Jadi fungsi transfer yang telah tereduksi ialah :

$$\frac{b(D)}{a(D)} = \frac{D^4 + 2D^3 + D^4 + 1}{2D^3 + D + 2} = \frac{2D^4 + D^3 + 2D + 2}{D^3 + 2D + 1}$$

Terlihat bahwa untuk menggambar fungsi transfer diatas maka :

$$z = \frac{b(D)}{a(D)}\, x \quad \text{atau : } a(D)z = b(D)\ x$$

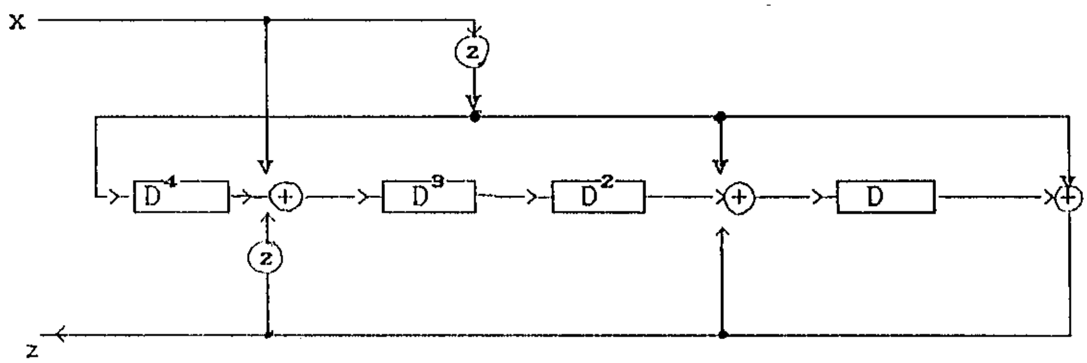
$$(D^3+2D+1)z = (2D^4+D^3+2D+2)\ x$$

$$z = -(D^3+\ 2D\ )\ z + (2D^4 + D^3 + 2D + 2)\ x$$

Karena terletak dalam GF(3) maka :

$$z = (2D^3+\ D)z + (2D^4 + D^3 + 2D + 2)\ x$$

Jadi bentuk gambarnya adalah sebagai berikut :



Gambar 3.4.2 Fungsi Transfer Tereduksi

3.5. Tanggapan Impuls (Impuls Respon).

Didalam bab ini akan dibicarakan mengenai mesin inert yang mempunyai dua terminal, dimana didalam mesin ini dianggap bahwa mesin mempunyai barisan masukan x(0) x(1) ... x(w-1) dengan panjang berhingga w, dan menghasilkan suatu barisan keluaran z(0) z(1) ... z(w-1) yang juga mempunyai panjang w.

Mengingat bahwa disini digunakan suatu barisan yang mempunyai panjang tetap w dari suatu mesin inert, maka dengan menggunakan definisi 3.2.1 dari operator tunda D akan diperoleh :

Definisi 3.5.1 :

untuk D^i dengan $i > 0$ maka dalam operator tunda D, yang bekerja pada suatu barisan masukan dengan panjang tetap, w, akan berlaku :

$$D^i(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_v) = \underbrace{0\ 0\ 0\ \ldots\ 0}_{\text{digeser sebanyak } i}\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{v-i}$$

Definisi 3.5.2 :

Dalam suatu mesin inert yang mempunyai dua terminal maka didefinisikan bahwa $T_m : F_v \longrightarrow F_v$ atau :

T_m (barisan masukan) = (barisan keluaran)

atau $T_m\ i_o = v$, dengan $i_o = 1000 \ldots 00$

Dengan mengingat bahwa suatu impuls respons v dengan panjang w adalah sekaligus juga merupakan barisan keluarannya jika barisan masukkannya adalah $i_o = 1000 \ldots 00$ (panjang w).

Sehingga dengan menggunakan pengertian diatas dan definisi 3.5.1 dan 3.5.2 dapat dihitung suatu impuls respon v yang juga barisan keluarannya dari suatu mesin yang mempunyai barisan masukan $x(0)x(1) \ldots x(t)\ 000 \ldots 0$
Jika diketahui impuls respon v :

$$\begin{aligned} T_M(x(0)x(1) \ldots x(t)000\ldots0) &= T_M\ (x(0)i_o + x(1)Di_o + \ldots \\ &\quad + x(t)D^t i_o \\ &= x(0)\ T_M i_o + x(1)\ T_M\ (Di_o) + \end{aligned}$$

$$\ldots + x(t)\ T_M\ (D^t i_o)$$

$$T_M(x(0)x(1)\ \ldots x(t)000\ldots 0) = x(0)\ v + x(1)\ Dv\ + \ \ldots + x(t)D^t v$$

Contoh :

Diketahui : w = 9,

F = GF(5),

impuls respon (v) = 103210000,

barisan imput (x) = 314000000,

maka barisan keluarannya ialah :

$$T_M(314000000) = 3\ v + 1.Dv + 4D^2v + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0$$
$$= 3.103210000 + 1.010321000 + 4.001032100$$
$$= 304130000 + 010321000 + 004023400$$
$$= 313424400$$

Terlihat bahwa barisan io = 1000 ... 00 adalah konstan (setelah bagian awalnya 1), sehingga dapat dikatakan bahwa impuls respon v adalah merupakan barisan yang periodik setelah bagian awalnya tidak periodik, dan sebaliknya apabila diberikan suatu barisan impuls respon v yang pada bagian akhirnya periodik maka akan diperoleh suatu mesin inert dua terminal yang mempunyai impuls respon v. untuk lebih jelasnya dapat dilihat bahwa dalam contoh berikut :

Contoh :

Diketahui suatu barisan tanggapan impuls v = 102120121201212........................... (3.5.1.)

yang terletak atas GF(3), dimana terlihat bahwa bagian akhir dari barisan tanggapan impuls v-nya adalah periodik, sehingga bisa ditulis tanggapan impulsnya menjadi :

$v = 0121201212012120 1212 \ldots + 12000 \ldots$

$v = vp + vt$

dengan : vp = bagian periodik dan vt = bagian transient.Barisan masukan x dengan x = io = 1000 ... 00 akan menghasilkan suatu barisan impuls respon v yang juga merupakan keluarannya, sehingga diperoleh bahwa :

$$vt = x + 2\,Dx = (1 + 2\,D)\,x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.5.2)$$

sedangkan :

$$\begin{aligned} vp &= 0x + 1.Dx + 2D^2x + 1D^3x + 2D^4x + 0D^5x + 1D^6 \\ &\quad + 2D^7 + 1D^8x + 2D^9x + \ldots \\ &= Dx + 2D^2x + D^3x + 2D^4x + D^6 + 2D^7 + D^8x \\ &\quad + 2D^9x + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vp &= (Dx + 2D^2x + D^3x + 2D^4x) + D^5 * (Dx + 2D^2x \\ &\quad + D^3x + 2D^4x) + \ldots \end{aligned}$$

$$vp = (\;1 + D^5 + D^{10} + \ldots\;)(D + 2D^2 + D^3 + 2D^4)\;x$$

Deret $1 + D^5 + D^{10} + \ldots$ adalah merupakan deret yang berhingga sebab $D^u = 0$, untuk $u > w$.

Akibatnya $1 + D^5 + D^{10} + \ldots$ mempunyai invers, yaitu : $(1 + D^5 + D^{10} + \ldots)^{-1} = 1 - D^5 = 1 + 2D^5$ (karena atas GF(3)) atau oleh karena

$$\begin{aligned} (1 - D^5)(1 + D^5 + D^{10} + \ldots) &= 1 - D^5 - D^5 + D^{10} - D^{10} + \ldots \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi :

$$vp = \frac{D + 2D^2 + D^3 + 2D^4}{1 + 2D^5}\,x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\;(3.5.3)$$

Dengan menggabungkan persamaan (3.5.2) dan (3.5.3) diperoleh :

$$v = vp + vt$$

$$= \frac{D + 2D^2 + D^3 + 2D^4}{1 + 2D^5}\, x + (\,1+2D)\, x$$

$$= \frac{(D + 2D^2 + D^3 + 2D^4)x + (1 + 2D)(1 + 2D^5)x}{1 + 2D^5}$$

$$= \frac{(D + 2D^2 + D^3 + 2D^4)x + (1 + 2D^5 + 2D + D^6)x}{1 + 2D^5}$$

$$v = \frac{1 + 2D^2 + D^3 + 2D^4 + 2D^5 + D^6}{1 + 2D^5}\, x$$

Dengan menggunakan Algoritma Euclidean, akan direduksi fungsi transfer dari :

$$\frac{b(D)}{a(D)} = \frac{1 + 2D^2 + D^3 + 2D^4 + 2D^5 + D^6}{1 + 2D^5}, \text{ atas } GF(3)$$

Terlebih dahulu fungsi transfer diatas akan dirubah kedalam bentuk-bentuk polinomial-polinomial dalam F[x], yaitu : $b[x] = 1 + 2X^2 + X^3 + 2X^4 + 2X^5 + X^6$ dan $a(X) = 1 + 2X^5$, sehingga menurut algoritma Euclidean diperoleh :

$$X^6 + 2X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 + 1 = (2X + 1)(2X^5 + 1) + (2X^5+1)$$
$$+ (2X^4 + X^3 + 2X^2 + X)$$

$$r_1(X) = 2X^4 + X^3 + 2X^2 + X$$

$$2X^5 + 1 = (X+1)(2X^4+X^3+2X^2+ X)(2X+1)$$

$$r_2(X) = 2X + 1$$

$$2X^4 + X^3 + 2X^2 + X = (X^3 + X)(2X+1) + 0$$

$$r_3(X) = 0$$

Jadi pembagi persekutuan terbesar $d(X)$ dari $(a(X), b(X))$ adalah $2X + 1$ karena $d(X)$ selalu dalam bentuk polinomial monik maka : $2(2X+1) = X + 2$.

Kemudian dengan membagi $a(X)$ dan $b(X)$ dengan $d(X)$ diperoleh :

$$a(X) = 2X^5 + 1 = (X+2)(2X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 2)$$

$$b(X) = X^6 + 2X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 + 1 = (X+2)(X^5 + 2X^3 + 2X + 2)$$

Jadi fungsi transfer yang telah direduksi ialah :

$$\frac{b(D)}{a(D)} = \frac{D^5 + 2D^3 + 2D + 2}{2D^4 + 2D^3 + 2D^2 + 2D + 2} = \frac{2D^5 + D^3 + D + 1}{D^4 + D^3 + D^2 + D + 1}$$

Untuk menggambarkan diagram balok dengan fungsi transfer diatas, maka :

$$v = \frac{b(D)}{a(D)}x \text{ atau } a(D)\,v = b(D)x$$

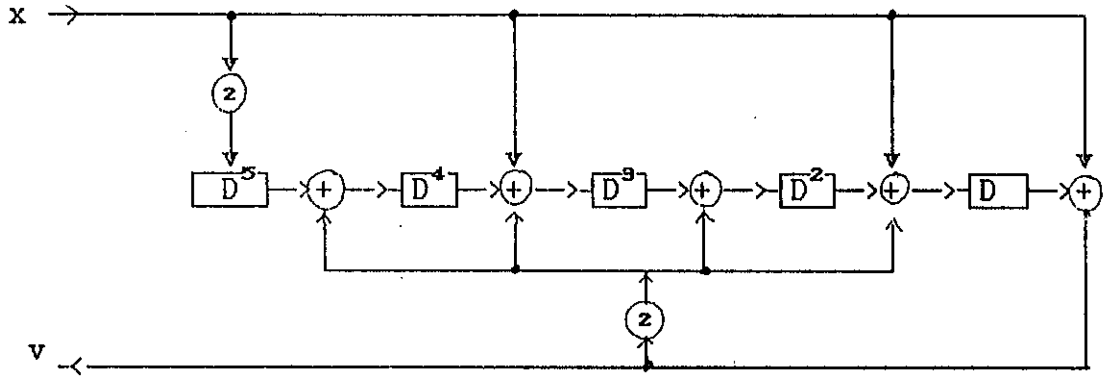
$$(D^4 + D^3 + D^2 + D + 1)v = (2D^5 + D^3 + D + 1)x$$

$$v = -(D^4 + D^3 + D^2 + D)\,v + (2D^5 + D^3 + D + 1)x$$

Karena atas GF(3) maka

$$v = (2D^4 + 2D^3 + 2D^2 + 2D)\,v + (2D^5 + D^3 + D + 1)x$$

Bentuk diagram balok dari suatu sirkuit dengan dimensi-5 dari suatu barisan tanggapan impuls v pada persamaan (3.5.1)



Gambar 3.5.1 Fungsi transfer $(2D^5 + D^3 + D + 1)$ /
$(D^4 + D^3 + D^2 + D + 1)$