BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1 Ring,Daerah Integritas,Field.

Definisi 2.1.1 :

Suatu ring ialah suatu himpunan R yang tidak kosong dengan dua operasi yaitu terhadap penjumlahan dan pergandaan, akan memenuhi aksioma-aksioma berikut :

I. Terhadap aksioma penjumlahan.

1. $\forall r_1, r_2 \in R$, $\exists r_3 \in R$, sedemikian sehingga $r_1 + r_2 = r_3$
2. $\forall r_1, r_2 \in R, r_1 + r_2 = r_2 + r_1$ (komutatif)
3. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R, r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$ (assosiatif)
4. $\exists 0 \in R \ni \forall r \in R, r + 0 = r$ (adanya elemen identitas)
5. $\forall r \in R \exists -r \in R \ni r + (-r) = 0$ (elemen invers penjumlahan)

II. Terhadap aksioma Pergandaan.

1. $\forall r_1, r_2 \in R, \exists r_3 \in R$, sedemikian sehingga $r_1 . r_2 = r_3$
2. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R, r_1(r_2 . r_3) = (r_1 . r_2) r_3$ (asosiatif)

III. Terhadap aksioma Distributif.

1. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R, r_1(r_2 + r_3) = r_1 r_2 + r_1 r_3$ (distributif kiri)
2. $\forall r_1, r_2, r_3 \in R, (r_1 + r_2) r_3 = r_1 r_3 + r_2 r_3$ (distributif kanan)

Definisi 2.1.2. :

R disebut Ring komutatif jika berlaku $r_1 r_2 = r_2 r_1, \forall r_1, r_2 \in R$

Definisi 2.1.3.:

R disebut ring dengan elemen unit, jika ada elemen tidak nol $e \in R$, sedemikian sehingga $r_1.e = e.r_1 = r_1$, $\forall r_1 \in R$.

Definisi 2.1.4.:

R disebut ring pembagi bila memenuhi seluruh aksioma ring dan juga mmenuhi pula aksioma $ax=b$ ($a \neq 0$, b sembarang).

Definisi 2.1.5.:

R disebut disebut field bila memenuhi seluruh aksioma ring, juga memenuhi aksioma :

II 3. $\exists e \in R \ni \forall r \in R, re=er=r$. (elemen identitas terhadap pergandaan).

4. $\forall r \in R-\{0\}$, $\exists r^{-1} \in R \ni r.r^{-1}=r^{-1}r= e$.

5. $\forall r_1, r_2 \in R, r_1.r_2=r_2.r_1$ (komutatif terhadap pergandaan)

Definisi 2.1.6.:

Suatu elemen r_1 dalam R disebut pembagi nol sejati , jika ada $r_2 \neq 0$, sedemikian sehingga $r_1r_2=r_2r_1=0$ bila hanya bila r_1 tidak sama dengan nol.

Definisi 2.1.7.:

R disebut Daerah Integritas bila seluruh aksioma ring dipenuhi dan juga memenuhi aksioma :

II 3 dan II 5 serta tidak memiliki pembagi nol sejati

Teorema 2.1.1.:

Suatu daerah integritas yang berhingga merupakan field.

Bukti :

Misalkan $\{0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ adalah daerah integritas. Untuk membuktikan bahwa daerah integritas merupakan field maka harus diperlihatkan bahwa setiap $a_i \neq 0$ mempunyai invers di dalam himpunannya. Kemudian berturut-turut a_i digandakan dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan di dapat $a_1 a_i, a_2 a_i, \ldots, a_n a_i$ ....(2.4.1). Mengingat tertutup terehadap pergandaan maka anggauta-anggauta dari deretan di atas adalah elemen-elemen dalam daerah integritasnya. Selanjutnya suatu anggauta $a_i a_j$ tidak mungkin sama dengan 0 dari sebab daerah integritas tidak mempunyai pembagi nol sejati. Sekarang dibuktikan bahwa deretan 2.4.1 dengan sendirinya tidak melebihi n. Tetapi juga tidak kurang dari n. Sebab, misalkan $a_i a_j = a_i a_k$, maka $a_i a_j - a_i a_k = a_i(a_j - a_k) = 0$. Karena daerah integritas tidak memiliki pembagi nol sejati maka $a_j - a_k = 0$. Jadi $a_j = a_k$. Kontraposisinya menghasilkan ,apabila $a_j \neq a_k$ maka $a_i a_j \neq a_i a_k$. Dengan demikian terbukti bahwa deretan 2.4.1 di atas terdiri atas n anggauta, sehingga tidak lain adalah deretan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dengan urutan pada umumnya lain. maka dari itu salah satu dari hasil ganda itu pasti sama dengan elemen e. Misalkan $a_i a_j = e$. Maka a_j adalah invers dari a_i. ∎

2.2 Ring Bilangan Bulat Modulo p

Misal p adalah suatu bilangan positip yang lebih besar daripada 1, maka terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dari ring bilangan bulat modulo p yaitu Z_p = {0, 1, ..., p-1} akan dilakukan seperti biasa. Dan untuk semua k dalam Z_p akan berlaku bahwa $0+k \equiv k$; $k+(p-k) \equiv 0$, Jadi $-k \equiv p - k$; $1.k \equiv k$ [semua dalam modulo p]

Contoh :

Pada $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Misalkan : $0 + 1 \equiv 1 \pmod 5$

$1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod 5$

$2 + (5 - 2) \equiv 0 \pmod 5$ atau

$-2 \equiv 3 \pmod 5$

Teorema 2.2.1.:

Ring Z_p adalah field bila hanya bila p adalah priem .

Bukti :

(==>)Zp adalah field ==>p priem .Demikian . Andaikan p tidak priem maka $p = p_1 p_2$ dengan $p_1 > 1, p_2 >$. Sehingga $\overline{p_1} . \overline{p_2} = \overline{p_1 p_2} = \overline{p} = \overline{o}$. Maka terlihat adanya pembagi nol sejati. Jadi Z_p bukan field. Dengan demikian kontraposisi (terbukti).

(<==)p priem==>Z_p adalah field.Ambil dua anggauta $\overline{n_1} \neq \overline{0}$ dan $\overline{p_2} \neq \overline{0}$dari Z_p = {0,1,2,...,p-1}. Tentukan hasil gandamereka, yaitu $\overline{p_1 p_2} = \overline{p_1 p_2}$. Perhatikan bahwa $p_1 p_2$ pasti bukan kelipatan p. Sebab p priem dan suatu hasil ganda itu habis dibagi oleh bilangan priem p, hanya apabila sekurang-kurangnya satu faktor habis dibagi oleh p. Karena $p_1 p_2$ bukan kelipatan p maka $\overline{p_1 p_2} \neq \overline{0}$. Terbukti $\overline{p_1} \neq \overline{0}$ dan $\overline{p_2} \neq \overline{0}$ ==>$\overline{p_1 p_2} \neq \overline{0}$. Yaitu Z_p tidak memuat pembagi nol sejati karena Z_p suatu ring komutatif, dan mempunyai elemen satuan maka Z_p suatu daerah integritas. Dari sebab Z_p berhingga maka menurut teorema 2.4.1, Z_p merupakan suatu field.

Definisi 2.2.1.:

Suatu field Z_p disebut Galois field GF(p).

Definisi 2.2.2.:

Field berhingga adalah suatu field yang memuat berhingga elemen-elemen.

Contoh :

Untuk setiap p priem maka terdapat suatu field GF(p) = {0,1,2,...,p-1} dari sejumlah p elemen-elemen.

Definisi 2.2.3.:

Karakteristik dari suatu ring R ialah bilangan bulat positif terkecil n,sedemikian sehingga n.a = 0, untuk setiap a dalam R.

Contoh :

R = Z_5 = {0,1,2,3,4} maka bilangan 5 merupakan karakteristik dari R, sebab berlaku 5.a = 0,untuk setiap $a \in Z_5$.

Definisi 2.2.4.:

Suatu Grup G disebut siklik jika terdapat elemen $a \in G$ sedemikian sehingga $G = \{a^n | n \in Z\}$, sedemikian sehingga elemen a merupakan elemen pembangun G.

Contoh :

Pada $U(10) = \{1,3,7,9\} = \{3^0, 3^1, 3^3, 3^2\} = \langle 3 \rangle$

$\{1,3,7,9\} = \{7^0, 7^3, 7^1, 7^2\} = \langle 7 \rangle$

Jadi 3 dan 7 adalah pembangun U(10).

Definisi 2.2.5.:

Jika G adalah grup dan $a \in G$, maka order atau periode dari dari elemen a adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^m = e$, jika tidak ada bilangan bulat yang demikian dapat dikatakan bahwa a adalah mempunyai order tak berhingga.

Contoh :

Pada $U(15) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ terhadap perkalian modulo 15.Maka diperoleh order dari elemen-elemennya adalah : $7^4 = 1$, maka order dari 7 adalah 4 dan bisa ditulis dengan $|7| = 4, |1| = 1, |2| = 4, |4| = 2, |8| = 4, |11| = 2, |13| = 4, |14| = 2$.

Definisi 2.2.6.:

Jika $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{k-1}X^{k-1} + a_kX^k \in F[X]$ maka degree dari p(X) adalah bilangan bulat $k \geq 0$, dimana a_k adalah koefisien tidak nol dari p(X) dan a_k adalah koefisien tertinggi dari p(X).

Contoh :

$c(X) = X^5 + X^3 + X^2 + X + 1$, maka degree dari polinomial c(X) adalah 5.

Pada filed yang berhingga, misal K, maka untuk setiap p priem dan n adalah bilangan bulat positif maka field K akan memuat sebanyak p^n elemen-elemen dan bisa ditulis sebagai $K = GF(p^n)$. Elemen-elemen primitif di dalam K terdiri atas elemen-elemen yang tidak nol dari K. sehingga K akan memuat sebanyak $p^n - 1$ elemen-elemen .Kemudian jika $\gamma \in K$ adalah elemen primitif, maka dapat ditulis untuk $f(X) = Irr(\gamma,F)$ adalah suatu polinomial primitif yang tak bisa diuraikan (irreducible)

Contoh :

Misalkan γ adalah akar di dalam $K= GF(3^2)$ dari polinomial primitif : $f(X) = X^2 + X + 2$ atas $F=GF(3)$

Maka elemen-elemen di dalam K sebanyak $3^2 = 9$ elemen, adalah :

$$0 \; ; \gamma^0 = 1 \; ; \gamma^1 = \gamma \; ; \gamma^2 = -\gamma - 2 = \gamma + 2 = 2\gamma + 1;$$

$$\gamma^3 = \gamma^2.\gamma = (2\gamma + 1) = 2\gamma^2 + \gamma = 2(2\gamma + 1) + \gamma = 2\gamma+2$$

$$\gamma^4 = \gamma^3.\gamma = (2\gamma + 2).\gamma = 2\gamma^2+2\gamma+2(2\gamma+1)+ 2\gamma=\gamma+2+2\gamma =2$$

$$\gamma^5 = \gamma^4.\gamma = 2\gamma$$

$$\gamma^6 = \gamma^5.\gamma = 2\gamma.\gamma = 2\gamma^2 = 2(2\gamma + 1) = 4\gamma + 2 = \gamma + 2$$

$$\gamma^7 = \gamma^6.\gamma = (\gamma + 2).\gamma = \gamma^2 + 2\gamma = (2\gamma + 1) + 2\gamma = \gamma+1$$

Jadi di dapat 9 elemen dalam field K adalah :

$\{0,1,2,\gamma,\gamma+1,\gamma+2,2\gamma,2\gamma+1,2\gamma+2\}$, dan karena 0 bukan merupakan elemen primitif, maka akar-akar dari polinomial primitif $X^2 + X + 2$ atas $GF(3)$ terdapat sebanyak $3^2 - 1 = 9-1 = 8$ elemen-elemen dalam K.

Definisi 2.2.7.:

Suatu ideal I dalam suatu ring komutatif R dengan 1 adalah suatu ideal pokok jika $I = (a)$, himpunan dari seluruh kelipatan $ra, r\in R$, dari suatu elemen kontan $a\in R$.

Dan elemen a ini disebut suatu pembangun (generator) dari I.

Contoh :

Suatu bilangan bulat modulo priem yang dibangun oleh 3 yaitu 3Z.

Definisi 2.2.8.:

Ring R/I disebut ring pembagi dari R modulo I, dan masing-masing koset r + I disebut klas residu, kemudian R/I disebut klas residu ring.

Definisi 2.2.9.:

Suatu ideal I dalam ring R adalah ideal maximal jika I $\neq$ R, tetapi I$\subseteq$J$\subseteq$R,I $\neq$ J untuk suatu ideal J menentukan bahwa J=R.

Contoh :

Z adalah bilangan bulat.

J = [3Z,+,.] adalah ideal maximal dalam Z, tetapi I=[6Z,+,.] bukan , sebab I $\subset$ J $\neq$ Z.

2.3. Beberapa Bentuk Polinomial

Jika F[X] adalah merupakan ring-ring polinomial dalam varisbel X atas field F, maka dapat ditulis :

$$F[X] = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \mid a_i \in F,\ n \in N\},$$

maka dapat didefinisikan untuk bentuk-bentuk polinomial adalah :

Definisi 2.3.1.:

Suatu polinomial $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$

disebut polinomial tidak konstan apabila mempunyai degree m dengan m $\geq$ 1 ,jika tidak demikian maka polinomial f(X) disebut polinomial konstan.

Contoh :

$f(X) = X + 1$

Definisi 2.3.2.:

Suatu polinomial $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ mempunyai koefisien-koefisien dalam GF(p) disebut sebagai polinomial atas GF(p) [p adalah priem].

Contoh :

$f(X) = X^4 + 3X^2 + X + 4$ atas GF(5).

Definisi 2.3.3.:

suatu polinomial $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots a_1 X + a_0$ atas GF(p) disebut polinomial yang tak bisa diuraikan (irreduciblé), apabila polinomial f(X) tersebut tidak bisa difaktorkan ke dalam bentuk dua polinomial yang tidak konstan dengan degree yang lebih rendah atas GF(p)[p adalah priem].

Contoh :

$f(X) = X^2 + X + 1$ atas GF(3) maka f(X) tidak bisa diuraikan, sedang $f(X) = X^2 + 4 = (X + 4)(X + 1)$ atas GF(5) atau dengan kata lain dapat diuraikan.

Definisi 2.3.4.:

Polinomial $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ disebut polinomial monik bila konstanta pada degree tertinggi adalah 1 yaitu $a_n = 1$.

Contoh :

$f(X) = X^2 + X + 1$

Definisi 2.3.5. :

Polinomial $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, dimana koefisien dari polinomial $f(X)$, dengan $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ adalah bilangan bulat, maka bentuk polinomial diatas disebut polinomial primitif jika pembagi persekutuan terbesar dari $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ adalah 1.

Contoh :

$f(X) = 2X^2 + 3X + 1$

2.4 Ruang Vektor atas Field

Apabila diketahui suatu himpunan V dalam suatu field F, maka V disebut ruang vektor atas field F bila memenuhi :

1) $\forall$ u, v, w $\in$ V , maka u + v = w
2) $\forall$ u, v, w $\in$ V , maka (u + v) + w = u + (v + w)
3) $\forall$ u $\in$ V, $\exists$ 0 $\in$ V, sedemikian hingga 0 + u = u + 0 = u
4) $\forall$ u, v $\in$ V , dan $\alpha \in$ F , maka α(u + v) = αu + αv
5) $\forall$ u $\in$V, $\exists$ -u $\in$V, sedemikian hingga (-u)+u = u+(-u) = 0
6) $\forall$ u, v $\in$ V , maka u + v = v + u
7) $\forall$ u $\in$ V , dan α , $\beta \in$ F , maka (α + β)u = αu + βu
8) $\forall$ u $\in$ V , dan α , $\beta \in$ F , maka ($\alpha\beta$)u = α(βu)
9) $\forall$ u $\in$ V , $\exists$ 1 $\in$ F , sedemikian hingga 1 u = u

2.5 Transformasi Linier Pada Ruang Vektor.

Definisi 2.5.1. :

Jika V dan W adalah ruang vektor atas field F, maka suatu transformasi linier atau ruang vektor homomorfisma dari V ke W adalah suatu fungsi $f: V \longrightarrow W$, sedemikian sehingga :

1. $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall\, u,v \in V$
2. $f(\alpha.v) = \alpha.f(v), \forall\, \alpha \in F, \&\ v \in V$

Kemudian himpunan dari seluruh transformasi linier dari V ke W dapat di tulis sebagai $Hom_F(V, W)$.

Contoh :

Misal : $f : R^3 \longrightarrow R^3$ adalah pemetaan ke dalam garis x,y, yaitu : $f(x,y,z) = (x,y,0)$, maka akan ditunjukan bahwa f adalah linier.

Misal : $v = (v_1, v_2, v_3)$ dan $w = (w_1, w_2, w_3)$

$$f(v+w) = f(v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3) = (v_1+w_1, v_2+w_2, 0)$$
$$= (v_1, v_2, 0) + (w_1, w_2, 0) = f(v) + f(w)$$

kemudian untuk setiap $\alpha \in R$, berlaku :

$$f(\alpha v) = f(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, 0)$$
$$f(\alpha v) = \alpha(v_1, v_2, 0) = \alpha(f(v)).$$

Definisi 2.5.2.:

Suatu transformasi linier $f \in Hom_F(V,W)$ adalah isomorfisma, jika dan hanya jika f adalah fungsi yang bijektif atau f adalah pemetaan homomorfisma yang injektif (satu-satu) dan surjektif (onto).

Contoh :

$f: R^2 \longrightarrow R^2$ dan didefinisikan : $f(x,y) = f(x+y, x-y)$, jadi misalkan $f(1,0) = (1,1)$, $f(1,1) = (2,0)$, dan seterusnya. Dan didapat untuk setiap nilai yang diperoleh bahwa untuk setiap $(x,y) \in R^2$; maka akan dihasilkan $(x,y) \in R^2$ atau R^2 dipetakan onto R^2 yang pemmetaannya juga satu-satu. Kemudian untuk membuktikan f adalah transformasi linier yang homomorfisma adalah :

$$f(v+w) = f(v_1+w_1) = (v_1+w_1+v_2+w_2,\ v_1+w_1-(v_2+w_2))$$
$$= (v_1+v_2+w_1+w_2,\ w_1-w_2+v_1-v_2)$$
$$= (v_1+v_2,\ v_1-v_2)+(w_1+w_2,\ w_1-w_2)$$
$$= f(v) + f(w)$$

$$f(\alpha(v)) = f(\alpha v_1, \alpha v_2) = (\alpha v_1+\alpha v_2, \alpha v_1-\alpha v_2) = \alpha(v_1+v_2, v_1-v_2)$$
$$f(\alpha(v)) = \alpha f(v).$$

2.6. Representasi Matrik Pada Transformasi Linier.

Jika $f \in Hom_F(V,W)$ maka $f : V \longrightarrow W$ adalah transformasi linier yang memetakan ruang vektor V ke W, dimana diketahui dimensi V= m dan dimensi W= n.

Teorema 2.6.1 :

Jika diketahui B_1 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ adalah basis ruang vektor V dari F dan $B_2=\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ adalah basis dari ruang vektor W dari F, dan $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, adalah m vektor sembarang di W, maka ada satu dan hanya satu transformasi linier $f : V \longrightarrow W$ yang bersifat $f(v_j) = b_j$ untuk $0 \leq j \leq m$, sehingga nantinya dapat ditentukan bahwa $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i$.

Bukti :

Transformasi $f : V \longrightarrow W$ didefinisikan sebagai

$$f(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j$$

adalah transformasi linier yang bersifat : $f(v_j)=b_j$: $j = 1,2,3,\ldots,m$. Misalkan f_1 dan f_2 dua transformasi linier yang bersifat ; $f_1(v_j) = b_j$ dan $f_2(v_j) = b_j$ $j = 1,2,3,\ldots,m$, dan misalkan x vektor sembarang di V, oleh karena $\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_m\}$ adalah basis dari V, maka x dapat ditulis secara tunggal sebagai kombinasi linier dari $\{v_1,v_2,v_2,\ldots,v_m\}$.

Misal : $f(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j)= x$, maka :

$$f_1(x)=f(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j)=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \; f(v_j)=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \; f_2(v_j)=$$
$$f_2(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j)= f_2(x).$$

dan karena $f_1(x) = f_2(x)$, untuk sembarang x di V berarti $f_1 = f_2$ dan dari teorema diatas akan diperolah bahwa jika diketahui :

$\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ adalah basis dari V atas F, dan

$\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ adalah basis dari W atas F, maka apabila $f \in Hom_F(V,W)$ atau $f : V \longrightarrow W$ akan berlaku :

$$\text{jika } v_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{mj} \end{bmatrix} \text{maka } f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i \; ; j=1,2,\ldots,m$$

dimana $[\alpha_{ij}]_{n\times m} = [f]_{B1,B2}$

atau dapat ditulis sebagai :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{mj} \end{bmatrix} \text{dimana} [\alpha_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

Contoh : Basis $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ atas R^2

$B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ atas R^3

Persamaan :

$$[\alpha_{ij}]_{n\times m} = [f]_{B1,B2} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

didefinisikan $f \in Hom_R(R^2,R^3)$ sedemkian sehingga :

$f((1,0)) = 2.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + (-2).(0,0,1) = (2,1,-2)$

$f((0,1)) = 1.(1,0,0) + (-3)(0,1,0) + (0,0,1) = (7,-3,4)$

2.7. Akar - Akar dan Vektor - Vektor Karakteristik.

Definisi 2.7.1.:

Misalkan $f \in Hom_F(V,V)$, maka suatu elemen X disebut akar karakteristik dari f jika ada vektor $v \neq 0$ dalam V, sehingga $Tv = Xv$, maka vektor $v \neq 0$ tersebut disebut vektor karakteristik yang berkaitan dengan X.

Contoh :

didefinisikan $f: R^2 \longrightarrow R^2$ dengan $f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$

akan dicari $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sehingga $\begin{pmatrix} -v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Sistim persamaan diatas menghasilkan :

$-v_2 = Xv_1$ atau $Xv_1 + v_2 = 0$

$-v_1 = Xv_2$ atau $v_1 + Xv_2 = 0$

Sistim homogen ini mempunyai jawab jika :

$\begin{vmatrix} X & 1 \\ 1 & X \end{vmatrix} = 0$, hinggadiperoleh: $X^2 - 1 = 0$,

$X = \pm 1$, untuk $X = 1$, berarti $v_1 + v_2 = 0$, ambil $v_1 = 1$

dan $v_2 = -1$, maka $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

untuk $X = -1$, berarti $-v_1 + v_2 = 0$, ambil $v_1 = 1$

dan $v_2 = 1$, maka $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

terlihat bahwa $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah vektor karakteristiknya dan akar karakteristiknya 1 ,dan $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah vektor karakteristiknya dan akar karakteristiknya adalah -1.

Teorema 2.7.1.:

Misalkan $f \in Hom_F(V,V)$ dan A matrik transformasi yang berukuran nxn dari f, maka X adalah harga karakteristik dari f jika dan hanya jika det $(A-XI) = 0$

Bukti :

X adalah vektor karakteristik dari f jika dan hanya jika untuk suatu $v \neq 0$ dalam V. Pernyataan ini benar jika hanya jika untuk setiap $v \neq 0$ dalam V berlaku :

$$Av = XI.v$$

$$(Av - XI.v) = 0$$

$$(A - XI)v = 0$$

Karena $v \neq 0$, maka haruslah $(A-XI) = 0$. Agar sistim persamaan homogen mempunyai jawab maka $| A-XI | = 0$

Contoh :

Carilah akar karakteristik dari transformasi:$R^3 \longrightarrow R^3$ dengan matrik karakteristik $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab :

$| A - XI | = 0$, maka : $\begin{vmatrix} 1-X & 0 & 2 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = 0$

$$0 = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1-X & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)((1-X)^2 - 2) - 0 + (1.2(1-X))$$

$$= (1-X)(1-X)^2-2-2$$

$$= (1-X)(1-X)^2-4$$

$$= (1-X)(1-X^2-2X-4)$$

$$0 = (1-X)(X-3)(X+1)$$

Jadi akar-akar karakteristiknya adalah X=1,X=3,dan X=1

Definisi 2.7.2.:

Misalkan $f \in Hom_F(V,V)$ dengan matrik transformasi A yang berukuran nxn, maka polinomial $g(X) = |\ A-XI\ |$ adalah polinomial karakteristik dari A.

Contoh :

Misal : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka $g(X) = |\ A-XI|$

$$g(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 2 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1-X \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)(1-X)(1-X) + 2\ (-(1-X))$$

$$= (1-X)^3 - 2(1-X)$$

$$= 1-3X+3X^2-X^3-2X+2X$$

$g(X) = -1-3X+3X^2-X^3$ adalah polinomial karakteristik dari A.