BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1 Arti Probabilitas

Definisi 2.1

Definisi frekuensi relatif.

Probabilitas $P(\mathscr{A})$ peristiwa $\mathscr{A}$ adalah limit

$$P(\mathscr{A}) \simeq \lim_{n \to \infty} \frac{n_{\mathscr{A}}}{n} \qquad (2\text{-}1)$$

dimana $n_{\mathscr{A}}$ adalah jumlah terjadinya $\mathscr{A}$ dan n adalah jumlah usaha.

Definisi 2.2

Definisi klasik.

Probabilitas $P(\mathscr{A})$ peristiwa $\mathscr{A}$ ditentukan a priori tanpa pelaksanaan eksperimen yang sebenarnya. Probabilitas diberikan oleh rasio :

$$P(\mathscr{A}) = \frac{N_{\mathscr{A}}}{N} \qquad (2\text{-}2)$$

dimana N jumlah hasil yang mungkin dan $N_{\mathscr{A}}$ jumlah hasil yang sesuai dengan peristiwa $\mathscr{A}$.

Definisi klasik diperkenalkan sebagai akibat prinsip alasan tak cukup : "Dalam ketiadaan pengetahuan awal, harus diandaikan bahwa peristiwa $\mathscr{A}_i$ mempunyai probabilitas sama".

Contoh 2-1 :

Melemparkan dua dadu dan ingin ditentukan probabilitas p bahwa jumlah bilangan yang tampak sama dengan 7.

Untuk menyelesaikan soal di atas harus dihitung semua pasangan bilangan dengan membedakan antara dadu pertama dan kedua. Total jumlah hasil yang sesuai adalah 6 pasangan (3,4),(4,3),(5,2),(2,5),(6,1),(1,6), sehingga p = 6/36.

2.2 Aksioma-aksioma Probabilitas

2.2.1 Teori himpunan

Definisi 2.3

Himpunan adalah koleksi objek yang dinamakan elemen atau anggota.

Himpunan akan dilambangkan dengan huruf Latin : $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, dan sebagainya.

Elemen suatu himpunan biasanya dilambangkan dengan huruf Yunani ζ. Jadi :

$$\mathscr{A} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$$

mempunyai arti himpunan $\mathscr{A}$ dengan elemen-elemen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

Himpunan-himpunan yang dibicarakan adalah himpunan bagian dari himpunan $\mathscr{S}$, dimana $\mathscr{S}$ disebut semesta.

Dalam teori probabilitas digunakan istilah sebagai berikut :

Ruang $\mathscr{S}$ disebut ruang pasti.

Elemen-elemen $\mathscr{S}$ disebut hasil eksperimen.

Himpunan-himpunan bagian $\mathscr{S}$ disebut peristiwa.

Peristiwa $\{\zeta_i\}$ yang memuat elemen tunggal ζ_i disebut peristiwa elementer.

Definisi 2.4

Himpunan saling asing.

Dua himpunan disebut saling asing atau terpisah bila kedua himpunan itu tidak mempunyai elemen yang sama, yaitu bila

$$\mathscr{A}\,\mathscr{B} = \emptyset$$

Himpunan-himpunan $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ disebut saling asing bila :

$$\mathscr{A}_i \mathscr{A}_j = \emptyset \qquad \text{untuk setiap } i \text{ dan } j \neq i$$

Definisi 2.5

Partisi.

Suatu partisi $\mathfrak{U}$ dari himpunan $\mathscr{S}$ adalah koleksi himpunan bagian $\mathscr{A}_i$ dari $\mathscr{S}$ yang saling asing dimana gabungannya sama dengan $\mathscr{S}$.

$$\mathscr{A}_1 + \ldots + \mathscr{A}_n = \mathscr{S} \qquad \mathscr{A}_i \mathscr{A}_j = \emptyset \qquad i \neq j$$

Partisi akan dinyatakan dengan notasi :

$$\mathfrak{U} = [\ \mathscr{A}_1, \ \ldots \ , \mathscr{A}_n\ ]$$

Definisi 2.6

Dua peristiwa $\mathscr{A}$ dan $\mathscr{B}$ disebut independen bila

$$P(\ \mathscr{A}\,\mathscr{B}\ ) = P(\ \mathscr{A}\ )\,P(\ \mathscr{B}\ )$$

Aksioma-aksioma Probabilitas.

Untuk peristiwa $\mathscr{A}$ ditetapkan bilangan $P(\mathscr{A})$ yang disebut probabilitas $\mathscr{A}$. Bilangan ini dipilih sedemikian hingga memenuhi :

I. $P(\ \mathscr{A}\ ) \geq 0$

II. $P(\ \mathscr{S}\ ) = 1$

III. Bila $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$, maka

$$P(\ \mathscr{A} + \mathscr{B}\ ) = P(\ \mathscr{A}\ ) + P(\ \mathscr{B}\ )$$

Definisi 2.7

Probabilitas bersyarat

Probabilitas bersyarat peristiwa $\mathscr{A}$ dengan diketahui $\mathscr{M}$, ditulis $P(\mathscr{A}|\mathscr{M})$ didefinisikan sebagai :

$$P(\mathscr{A}|\mathscr{M}) = \frac{P(\mathscr{A}\mathscr{M})}{P(\mathscr{M})}$$

dimana diandaikan $P(\mathscr{M})$ tidak nol.

2.3 Konsep Variabel Random

Definisi 2.8

Suatu fungsi dari himpunan $\mathscr{S}_t$ ke $\mathscr{S}_x$ adalah suatu aturan untuk setiap $t \in \mathscr{S}_t$ menentukan dengan tunggal bilangan $x(t)$ yang ada dalam himpunan $\mathscr{S}_x$. Himpunan $\mathscr{S}_t$ disebut wilayah fungsi dan $\mathscr{S}_x$ disebut jelajah fungsi.

Contoh 2-2 :

Misal $\mathscr{S}_t$ adalah himpunan anak-anak dan $\mathscr{S}_x$ adalah himpunan ayah-ayahnya.

Definisi 2.9

Suatu variabel random (VR) $\mathbf{x}$ adalah proses penentuan $\mathbf{x}(\zeta)$ untuk setiap hasil ζ dari suatu eksperimen.

Fungsi yang dihasilkan harus memenuhi dua syarat :

I. Himpunan $\{\mathbf{x} \le x\}$ adalah peristiwa untuk setiap x. Dimana peristiwa adalah himpunan-himpunan bagian $\mathscr{S}$.

II. Probabilitas peristiwa $\{x = \infty\}$ dan $\{x = -\infty\}$ sama dengan nol.

Lambang $\{x \le x\}$ menyatakan himpunan bagian $\mathcal{S}$ yang terdiri dari hasil-hasil ζ sedemikian hingga $x(\zeta) \le x$.

Lambang $\{x_1 \le x \le x_2\}$ menyatakan himpunan bagian $\mathcal{S}$ yang terdiri dari hasil-hasil ζ sedemikian hingga $x_1 \le x(\zeta) \le x_2$ dimana x_1 dan x_2 adalah dua bilangan yang diketahui.

Lambang $\{x = x\}$ menyatakan himpunan bagian $\mathcal{S}$ yang terdiri dari hasil-hasil ζ sedemikian hingga $x(\zeta) = x$.

Contoh 2-3 :

(a). Pada eksperimen pelemparan sebuah dadu, ditentukan bilangan 1 pada setiap hasil genap dan bilangan 0 pada setiap hasil ganjil. Jadi $x(f_1) = x(f_3) = x(f_5) = 0$ dan $x(f_2) = x(f_4) = x(f_6) = 1$. Wilayah fungsi terdiri dari 6 muka suatu dadu dan jelajah fungsi terdiri dari 2 elemen yaitu 0 dan 1.

(b). Pada pelemparan sebuah dadu, ditentukan pada keenam hasil f_i bilangan $x(f_i) = 10i$ (gambar 2-1). Jadi $x(f_1) = 10, \ldots, x(f_6) = 60$. Wilayah fungsi adalah himpunan $\mathcal{S} = \{f_1, \ldots, f_6\}$ dan jelajah fungsi adalah 6 bilangan $(10, \ldots, 60)$.

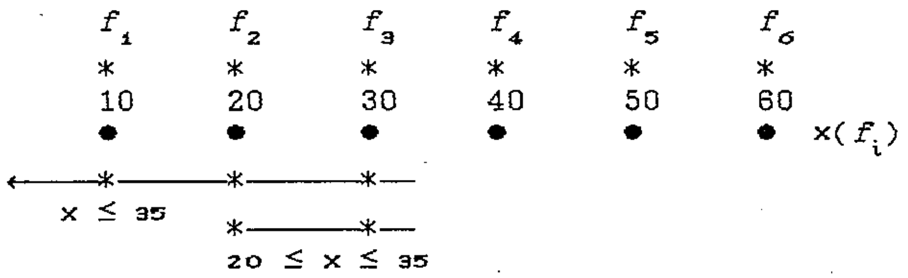
Himpunan $\{x \le 35\}$ terdiri dari elemen

f_1, f_2, f_3 karena $x(f_i) \leq 35$ hanya jika i = 1,2, atau 3.

Himpunan $\{x \leq 5\}$ adalah himpunan kosong karena tidak ada hasil sedemikian hingga $x(f_i) \leq 5$.

Himpunan $\{20 \leq x(f_i) \leq 35\}$ terdiri dari elemen f_2 dan f_3 karena $20 \leq x(f_i) \leq 35$ hanya jika i = 2 atau 3.

Himpunan $\{x = 40\}$ terdiri dari elemen f_4 karena $x(f_i) = 40$ hanya jika i = 4.



Gambar 2-1

Sebelum melanjutkan tentang pengertian fungsi distribusi dan fungsi kepadatan akan dibahas pengertian limit , fungsi kontinu dan fungsi impuls (fungsi delta).

2.4. Fungsi Kontinu dan Fungsi Impuls (Delta)

Definisi 2.10

Bila x_0 dalam selang terbuka (x_1, x_2) dan diketahui bahwa fungsi $f(x)$ terdefinisi dalam selang (x_1, x_2) kecuali mungkin di x_0, maka L disebut limit $f(x)$ untuk x mendekati x_0 ditulis $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ bila dan hanya bila untuk sebarang bilangan positif kecil sekali ε, dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sehingga apabila $0 < |x-x_o| < \delta$ berlaku $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Definisi 2.11

Diberikan fungsi $f(x)$ dalam selang (x_1,x_2). Fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu di $x=x_o$ bila dan hanya bila :.

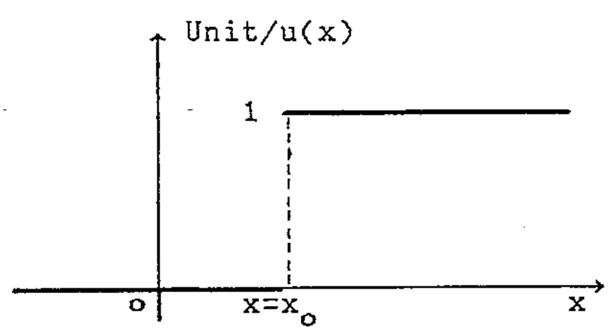
1. $f(x)$ terdefinisi
2. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ ada dan
3. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

Definisi 2.12

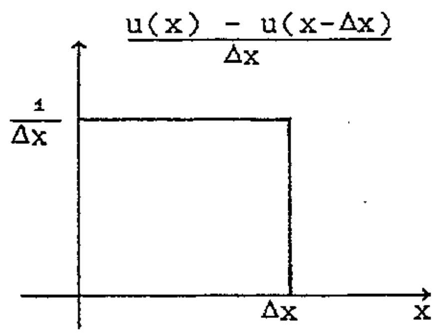
Fungsi tangga atau fungsi unit adalah fungsi yang dapat dinyatakan dengan $u(x - x_o)$ dan didefinisikan oleh :

$$u(x-x_o) = \begin{cases} 1 & x > x_o \\ 0 & x \le x_o \end{cases}$$

Gambar grafik untuk fungsi tangga diberikan dalam gambar 2-2.



Gambar 2-2



Gambar 2-3

Definisi 2.13

Fungsi impuls (fungsi delta) $\delta(x)$ bisa didefinisikan oleh :

$$\delta(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \left[\frac{u(x) - u(x-\Delta x)}{\Delta x} \right]$$

Pasangan $\left[\begin{matrix} \Delta x \longrightarrow 0 \\ \Delta x > 0 \end{matrix} \right]$ bisa disingkat $\Delta x \longrightarrow 0^+$, yang berarti bahwa Δx mendekati nol dari kanan. Hasil bagi dalam kurung itu menyatakan suatu segiempat yang tingginya $1/\Delta x$ dan lebarnya Δx seperti terlihat dalam gambar 2-3. Proses pembatasan tersebut menghasilkan sebuah fungsi yang tingginya mendekati tak terhingga dan lebarnya mendekati nol. Luas dibawah kurvanya sama dengan satu untuk semua harga Δx, yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Fungsi impuls (delta) mempunyai sifat yaitu :

- Sifat penyaring :

Integral dari hasil kali suatu fungsi impuls $\delta(x-x_o)$ dan suatu fungsi $\varphi(x)$ yang kontinu pada $x=x_o$ dalam selang yang meliputi x_o, sama dengan fungsi $\varphi(x)$ yang dihitung di x_o.

Dengan kata lain, bila fungsi impuls bergeser dari titik awalnya sampai titik x_o dan masih bersifat kontinu pada titik itu maka fungsi impulsnya dinyatakan sebagai :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x - x_o)\, dx = \varphi(x_o)$$

2.5. Fungsi Distribusi dan Fungsi Kepadatan

2.5.1. Fungsi Distribusi

Definisi 2.14

Fungsi distribusi VR x adalah fungsi :

$$F_x(x) = P\{x \le x\}$$

yang didefinisikan untuk setiap x dari ∞ sampai -∞. Secara jelasnya, untuk bilangan x yang diberikan maka $F_x(x)$ adalah sama dengan probabilitas $\{x \le x\}$. Dapat ditulis $F(x)$.

Contoh 2-4 :

Pada pelemparan mata uang, probabilitas muka sama dengan p dan probabilitas belakang sama dengan q. Didefinisikan VR x sedemikian hingga :

$$x(m) = 1 \qquad\qquad x(b) = 0$$

Akan ditentukan fungsi distribusi $F(x)$ untuk setiap x dari - ∞ sampai ∞ .

Bila $x \ge 1$, maka $x(m) = 1 \le x$ dan $x(b) = 0 \le x$
Karena itu (gambar 2-4),

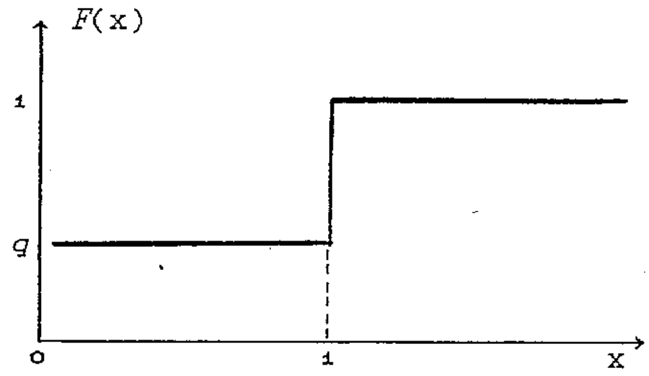
$$F(x) = P\{x \le x\} = P(m,b) = 1 \qquad x \ge 1$$

Bila $0 \le x \le 1$ maka $x(m) = 1 > x$ dan $x(b) = 0 \le x$

$$F(x) = P\{x \le x\} = P\{b\} \qquad 0 \le x \le 1$$

Bila $x < 0$, maka $x(m) = 1 > x$ dan $x(b) = 0 > x$

$$F(x) = P\{x \le x\} = P\{\emptyset\} = 0 \qquad x < 0$$



Gambar 2-4

Bertitik tolak dari pengertian diatas dapat didefinisikan fungsi distribusi tingkat n, yaitu :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{x \le x_1, \ldots, x \le x_n\}$$

Apabila disajikan dua variabel random x dan y, maka dinamakan fungsi distribusi gabungan :

$$F_{xy}(x,y) = F(x,y) = P\{x \le x, y \le y\}$$

Sifat-sifat fungsi distribusi

$F(x^+)$ dan $F(x^-)$ akan berarti limit kanan dan limit kiri.

$F(x^+) = \text{limit } F(x+\varepsilon)$ $\quad F(x^-) = \text{limit } F(x-\varepsilon)$ $\quad 0<\varepsilon \longrightarrow 0$

Fungsi distribusi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. $F(+\infty) = 1 \qquad F(-\infty) = 0$

   Bukti :

   $F(+\infty) = P\{x \le \infty\} = P\{\mathscr{S}\} = 1 \qquad F(-\infty) = P\{x = -\infty\} = 0$

2. $F(x)$ adalah fungsi tidak turun.

   Bila $x_1 < x_2$ maka $F(x_1) \le F(x_2)$

   Bukti :

   Peristiwa $\{x \le x_1\}$ adalah himpunan bagian peristiwa $\{x \le x_2\}$ karena, bila $x(\zeta) \le x_1$ untuk suatu ζ, maka $x(\zeta) \le x_2$.

   Karena itu : $P\{x \le x_1\} \le P\{x \le x_2\}$

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

Dari sifat 1 dan 2 terlihat bahwa $F(x)$ naik dari 0 ke 1 untuk x naik dari $-\infty$ sampai ∞.

3. $P\{\mathbf{x} > x\} = 1 - F(x)$

Bukti :

Peristiwa $\{\mathbf{x} \leq x\}$ dan $\{\mathbf{x} > x\}$ saling asing dan :

$$\{\mathbf{x} \leq x\} + \{\mathbf{x} > x\} = \mathscr{S}$$

Karena itu :

$$P\{\mathbf{x} \leq x\} + P\{\mathbf{x} > x\} = P\{\mathscr{S}\} = 1$$

$$F(x) + P\{\mathbf{x} > x\} = 1$$

$$P\{\mathbf{x} > x\} = 1 - F(x)$$

4. $P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

Bukti :

Peristiwa $\{\mathbf{x} \leq x_1\}$ dan $\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\}$ adalah saling asing karena $\mathbf{x}(\zeta)$ tidak dapat kurang dari x_1 dan diantara x_1 dan x_2.

$\{\mathbf{x} \leq x_2\} = \{\mathbf{x} \leq x_1\} + \{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\}$, karena itu :

$$P\{\mathbf{x} \leq x_2\} = P\{\mathbf{x} \leq x_1\} + P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\}$$

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\}$$

$$P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

5. $P\{\mathbf{x} = x\} = F(x) - F(x^-)$

Bukti :

Dengan mengambil $x_1 = x - \varepsilon$ dan $x_2 = x$ pada sifat 4, didapat :

$$P\{x-\varepsilon < \mathbf{x} \leq x\} = F(x) - F(x-\varepsilon)$$

$$= F(x) - F(x^-) \qquad \varepsilon \longrightarrow 0$$

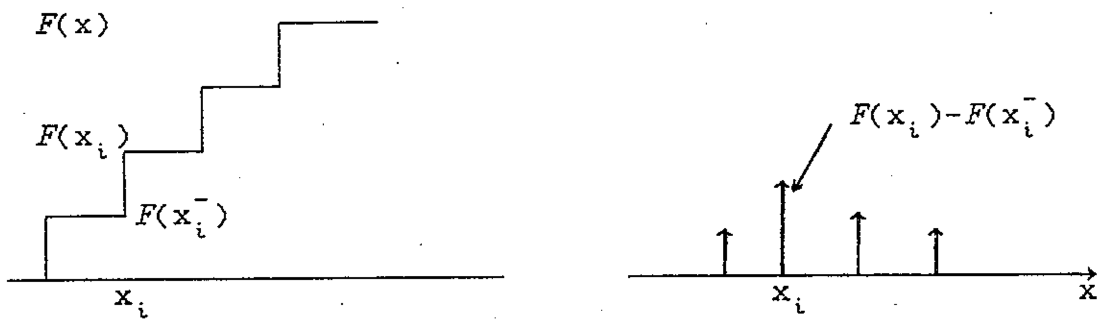
6. $P\{x_1 \leq \mathbf{x} \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1^-)$

Bukti :

Terbukti dari sifat 4 dan 5 :

$$\{x_1 \le x \le x_2\} = \{x_1 < x < x_2\} + \{x = x_1\}$$
$$= F(x_2) - (x_1) + F(x_1) - F(x_1^-)$$
$$= F(x_2) - (x_1^-)$$

Dari sifat-sifat diatas dapat dikatakan bahwa VR x kontinu bila fungsi distribusinya $F(x)$ kontinu. Untuk keadaan ini $F(x^-) = F(x)$. Karena itu $P\{x = x\} = 0$ untuk setiap x. Variabel bertipe diskrit bila $F(x)$ berbentuk fungsi tangga seperti pada gambar 2-5.



Gambar 2-5

2.5.2. Fungsi Kepadatan

Definisi 2.15

Untuk x yang diberikan maka fungsi kepadatan VR x merupakan derivatif (pendefferensialan) fungsi distribusinya, yaitu :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Bila VR x bertipe diskrit yang menjalani harga-harga x_i dengan probabilitas p_i, maka :

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \qquad p_i = P\{x = x_i\}$$

dimana $\delta(x)$ adalah fungsi impuls (gambar 2-5), Suku $p_i\delta(x-x_i)$ ditunjukkan sebagai anak panah tegak pada $x = x_i$ dengan panjang sama dengan p_i.

Contoh 2-5 :

Pada eksperimen pelemparan sebuah dadu, ditentukan pada keenam hasil f_i bilangan $x(f_i) = 10i$. Jadi : $x(f_1) = 10, \ldots, x(f_6) = 60$

VR x bertipe diskrit yang menjalani enam harga $x_1=10, \ldots, x_6=60$ dengan $p_i = 1/6$. Karena itu :

$$f(x) = \frac{1}{6}\,[\delta(x-10) + \delta(x-20) + \ldots + \delta(x-60)]$$

Sifat-sifat fungsi kapadatan

Dari sifat $F(x)$ terlihat bahwa : $f(x) \geq 0$.

Dengan mengintegralkan fungsi kepadatan dari $-\infty$ sampai x dan menggunakan sifat bahwa $F(-\infty) = 0$, didapat :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\zeta)\, d\zeta$$

Karena $F(\infty) = 1$, bentuk di atas menghasilkan :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = F(\infty) = 1$$

dan terlihat bahwa :

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Karena itu dari sifat 4 fungsi distribusi, didapat :

$$P\{x_1 < x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

Sedangkan fungsi kepadatan tingkat n adalah :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$

Jika disajikan dua VR x dan y kepadatan gabungan adalah :

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Pada pembicaraan berikut akan diberikan beberapa kepadatan yang umum.

Definisi 2.16

Fungsi Gauss atau normal dinyatakan dengan :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Definisi 2.17

VR x disebut normal atau gaussian bila kepadatannya dinyatakan dengan :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} g\left[\frac{x-\eta}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2}$$

Digunakan lambang $N(\eta,\sigma)$ untuk menyatakan VR x yang mempunyai distribusi normal. (η = mean, σ = deviasi standar).

Definisi 2.18

VR x dikatakan seragam di antara x_1 dan x_2 bila kepadatannya konstan dalam selang (x_1,x_2) dan nol untuk lainnya.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_2-x_1} & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

2.6. Mean, Varian, Momen, dan Kovarian

2.6.1. Harga Harapan (Mean)

Untuk eksperimen yang diulangi n kali dan didapat hasil-hasil eksperimen (outcome) ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n, tiap outcome menentukan harga numerik tertentu. Selanjutnya dari outcome didapat n bilangan yaitu $x(\zeta_1)$, ..., $x(\zeta_n)$. Jika harga n cukup besar, maka mean dari bilangan $x(\zeta_i)$; $i = 1,2,\ldots,n$ mendekati harga rata-rata dari variabel random x yang diberikan. Dapat disimpulkan bahwa :

$$E\{x(\zeta)\} \simeq \frac{x(\zeta_1) + \ldots + x(\zeta_n)}{n}$$

Definisi 2.19

Harga harapan atau mean VR x didefinisikan sebagai :

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Bilangan ini juga dinyatakan dengan η_x atau η.

Untuk VR bertipe diskrit :

$$E\{x\} = \sum_i p_i\, x_i \qquad p_i = P\{x = x_i\}$$

Bukti :

Misalkan x menjalani harga-harga x_i dengan probabilitas p_i. Untuk keadaan ini :

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$$

Jika diambil $\varphi(x) = x$, maka sesuai sifat penyaring fungsi impuls didapat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, \delta(x - x_i)\, dx = x_i$$

Dari definisi harga harapan didapat :

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_i p_i\, \delta(x - x_i)\, dx$$

$$= \sum_i p_i \int_{-\infty}^{\infty} x\, \delta(x - x_i)\, dx$$

$$= \sum_i P_i \, x_i \qquad\qquad P_i = P\{x = x_i\}$$

terbukti.

Definisi 2.20

Harga harapan atau mean bersyarat VR x dengan diketahui $\mathcal{M}$ didefinisikan sebagai :

$$E\{x|\mathcal{M}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(x|\mathcal{M}) \; dx$$

Untuk VR bertipe diskrit

$$E\{x|\mathcal{M}\} = \sum_i x_i P\{x = x_i|\mathcal{M}\}$$

2.6.2. Varian

Definisi 2.21

Varian VR x didefinisikan sebagai :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^2 f(x) \; dx$$

σ atau σ_x disebut deviasi standar x.

Dari definisi terlihat bahwa σ^2 adalah mean VR $(x-\eta)^2$. Jadi :

$$\sigma^2 = E\{(x-\eta)^2\} = E\{x^2-2x\eta+\eta^2\}$$
$$= E\{x^2\} - 2\eta E\{x\} + \eta^2 = E\{x^2\} - \eta^2$$
$$= E\{x^2\} - E^2\{x\}$$

2.6.3. Momen

Definisi 2.22

Momen VR x didefinisikan sebagai :

$$m_k = E\{x^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) \; dx \qquad\qquad k = 0,1,\ldots$$

Untuk k = 0 maka $m_o = 1$ dan untuk k = 1 maka $m_1 = E\{x\} = \eta$, untuk k = 2 maka $m_2 = E\{x^2\}$ dinamakan varian.

Sedang momen sentral disekitar η didefinisikan sebagai :

$$\mu_k = E\{(x - \eta)^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^k f(x)\, dx$$

Jika diberikan dua VR x dan y maka momen gabungan tingkat k+r = n didefinisikan sebagai :

$$\mu_{kr} = E\{x^k y^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r f(x,y)\, dxdy$$

Jadi $m_{10} = \eta_x$, $m_{01} = \eta_y$ adalah momen tingkat pertama dan $m_{20} = E\{x^2\}$, $m_{11} = E\{xy\}$, $m_{02} = E\{y^2\}$ adalah momen tingkat kedua.

2.6.4. Kovarian

Definisi 2.23

Kovarian C atau C_{xy} dua VR x dan y didefinisikan sebagai :

$$C = E\ \{(x-\eta_x)(y-\eta_y)\}$$

dimana : $E\{x\} = \eta_x$ dan $E\{y\} = \eta_y$

Jadi :

$$\begin{aligned} C &= E\{(x - \eta_x)(y - \eta_y)\} \\ &= E\{xy - x\eta_y - y\eta_x + \eta_x\eta_y\} \\ &= E\{xy\} - E\{x\}\eta_y - E\{y\}\eta_x + \eta_x\eta_y \\ &= E\{xy\} - \eta_x\eta_y - \eta_y\eta_x + \eta_x\eta_y \\ &= E\{xy\} - \eta_x\eta_y \\ &= E\{xy\} - E\{x\}E\{y\} \end{aligned}$$

Definisi 2.24

Koefisien korelasi r atau r_{xy} VR x dan y didefinisikan sebagai rasio :

$$r = \frac{C}{\sigma_x \sigma_y}$$

dimana $|r| \leq 1$

Definisi 2.25

Dua VR disebut takberkorelasi bila kovariannya sama dengan nol.

$$C = 0 \qquad r = 0 \qquad E\{xy\} = E\{x\}E\{y\}$$

Definisi 2.26

VR x dan y normal bergabungan bila kepadatan gabungannya diberikan oleh :

$$f(x,y) = A \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\eta_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-\eta_1)(y-\eta_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\eta_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

....(2-3)

Fungsi ini positif dan integralnya sama dengan 1 dimana :

$$A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \qquad |r| < 1$$

Fungsi $f(x,y)$ dinyatakan dengan $N(\eta_1,\eta_2;\sigma_1,\sigma_2;r)$