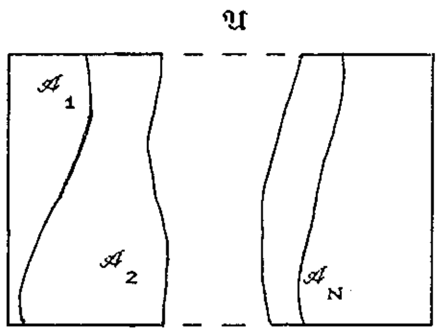
BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Pengertian

Probabilitas $P(\mathscr{A})$ dari suatu peristiwa $\mathscr{A}$ dapat diinterpretasikan sebagai ukuran ketidakpastian tentang terjadi atau tidak terjadinya $\mathscr{A}$ dalam hasil tunggal dari eksperimen $\mathscr{S}$ yang mendasarinya.

Dalam penulisan ini dibahas masalah menentukan ukuran ketidakpastian terjadi atau tidak terjadinya bukan untuk peristiwa tunggal dalam $\mathscr{S}$, tetapi sebarang peristiwa $\mathscr{A}_i$ partisi $\mathfrak{U}$ ruang $\mathscr{S}$, dimana suatu partisi adalah koleksi dari peristiwa-peristiwa yang saling asing dan gabungannya sama dengan $\mathscr{S}$. (Seperti gambar 1-1).
Entropi partisi $\mathfrak{U}$ didefinisikan sebagai ukuran ketidakpastian tentang $\mathfrak{U}$ yang dinyatakan oleh H ($\mathfrak{U}$).



Gambar (1-1)

Jumlahan :

$$H(\mathfrak{U}) = - p_1 \log p_1 - \ldots - p_N \log p_N \qquad (1\text{-}1)$$

dikenal sebagai definisi entropi.
Persamaan (1-1) menggunakan logaritma bilangan pokok 2 atau bilangan pokok *e*.

Dalam pengertian heuristik entropi, bilangan H ($\mathfrak{U}$)

adalah ukuran ketidakpastian tentang peristiwa $\mathscr{A}_i$ partisi $\mathfrak{A}$ sebelum pelaksanaan eksperimen yang mendasarinya. Bila eksperimen dilakukan dan hasil tentang $\mathscr{A}_i$ menjadi diketahui, maka ketidakpastian menjadi hilang. Jadi dapat dikatakan bahwa eksperimen memberi informasi tentang peristiwa $\mathscr{A}_i$ sama dengan entropi partisinya. Jadi ketidakpastian sama dengan informasi dan kedua-duanya diukur dengan jumlahan dalam (1-1).

Contoh 1-1 :

Menentukan entropi partisi $\mathfrak{A}$ = [genap,ganjil] dalam eksperimen dadu seimbang.

Terlihat P [genap] = P [ganjil] = 1/2 . Karena itu :

$$H(\mathfrak{A}) = -\ 1/2 \log 1/2 - 1/2 \log 1/2 = \log 2$$

Contoh 1-2 :

Dalam eksperimen yang sama $\mathfrak{S}$ adalah partisi peristiwa elementer $\{f_i\}$. Dalam kasus ini $P\ \{f_i\} = 1/6$, karena itu :

$$H(\mathfrak{S}) = -\ 1/6 \log 1/6 - \ldots - 1/6 \log 1/6 = \log 6$$

Bila dadu dilemparkan dan diberitahukan muka mana yang tampak , maka didapat informasi tentang partisi $\mathfrak{S}$ sama dengan entropi log 6. Bila diberitahukan apakah genap atau ganjil yang nampak, maka didapat informasi tentang partisi $\mathfrak{A}$ sama dengan entropinya log 2.

Contoh 1-3 :

Eksperimen pelemparan mata uang dimana P (m) = p. Untuk kasus ini entropi $\mathfrak{S}$ sama dengan :

$$H(\mathfrak{S}) = -\ p \log p - (1 - p) \log (1-p) = r(p) \qquad (1-2)$$

Fungsi $r(p)$ ditunjukkan gambar 1-2. umtuk $0 \le p \le 1$.

Fungsi ini mencapai maksimum pada titik 0,5. $r(0)=r(1)=0$.

Demikian :

$r(p) = -\,p \log p - (1-p) \log (1-p)$

1. Menentukan titik ekstrim (kritis).

$r'(p) = 0$

$$-\,p \frac{1}{p \ln 2} - \log p - \left[-(1-p) \frac{1}{(1-p) \ln 2} - \log (1-p)\right] = 0$$

$$-\frac{1}{\ln 2} - \log p + \frac{1}{\ln 2} + \log (1-p) = 0$$

$$\log (1-p) - \log p = 0$$

$$\log (1-p) = \log p$$

$$(1-p) = p$$

$$2p = 1$$

$$p = 1/2$$

Titik kritis di $p = 1/2$.

Untuk $p = 1/2$, maka :

$r(1/2) = -\ 1/2 \log 1/2 - 1/2 \log 1/2 = \log 2 = 1$

2. Menentukan tanda $r'(p)$ untuk $0 < p < 1/2$ dan untuk $1/2 < p < 1$.

Untuk $0 < p < 1/2$, misal $p = 1/4$

$r'(1/4) = \log (1-1/4) - \log (1/4)$

$= \log (3/4) - \log (1/4)$

$=$ positif > 0

Jadi $r(p)$ fungsi naik untuk $0 < p < 1/2$

Untuk $1/2 < p < 1$, misal $p = 3/4$

$r'(3/4) = \log (1-3/4) - \log 3/4$

$= \log 1/4 - \log 3/4$

$=$ negatif < 0

Jadi $r(p)$ fungsi turun untuk $1/2 < p < 1$

3. Menentukan titik di $p = 1/2$ maksimum atau minimum.

$$r''(p) = -\frac{1}{(1-p)\ \ln 2} - \frac{1}{p\ \ln 2}$$

$$r''(1/2) = -\frac{1}{1/2\ \ln 2} - \frac{1}{1/2\ \ln 2}$$

$$= -\frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = -\frac{2}{\ln 2} < 0$$

Maka titik $p = 1/2$ titik maksimum.

4. Untuk $p = 0$ dan $p = 1$

$$\lim_{p \to 0} -p \log p = \lim_{p \to 0} \frac{-\log p}{\frac{1}{p}} = \lim_{p \to 0} \frac{-\frac{1}{p \ln 2}}{-\frac{1}{p^2}}$$

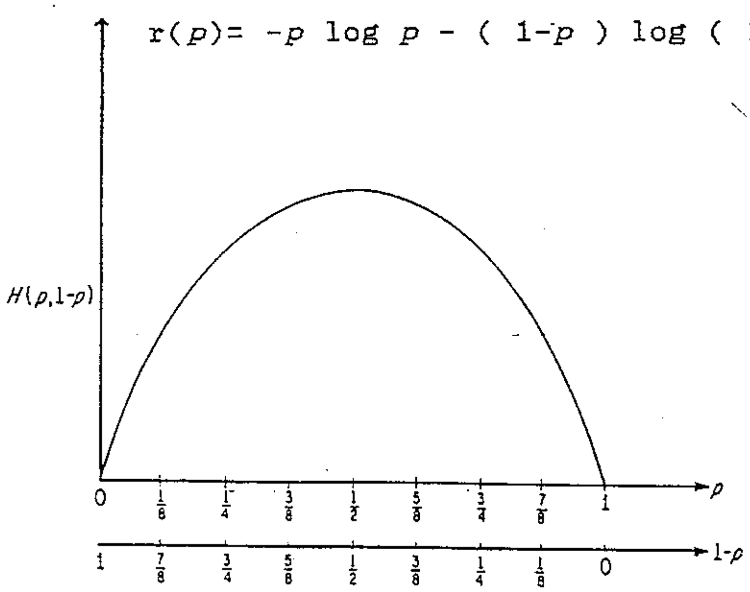
$$= \lim_{p \to 0} \frac{p}{\ln 2} = \frac{0}{\ln 2} = 0$$

Untuk $p = 0$, maka :

$$r(0) = -0 \log 0 - 1 \log 1 = 0 - 0 = 0$$

Untuk $p = 1$, maka :

$$r(1) = -1 \log 1 - 0 \log 0 = 0$$



Gambar 1-2

1.2. Permasalahan

Bagaimana penjabaran entropi pada variabel random dan proses stokastik.

1.3. Pembahasan Masalah

Dengan menggunakan definisi-definisi, sifat-sifat dan teorema-teorema yang ada akan dibahas mengenai entropi pada variabel random dan proses stokastik.