BAB II

MATERI DASAR

2.1 Vektor dan Matriks

Sebelum lebih lanjut membicarakan masalah analisa faktor, kita perlu mengetahui dahulu tentang apa arti dari vektor dan matriks. Serta hal-hal yang berhubungan dengan kedua permasalahan di atas. Hal ini sangat penting sebab dalam multivariat, masalah vektor dan matriks sangat dibutuhkan sebagai materi penunjang dalam membahas masalah analisa faktor.

2.1.1 Teori Vektor dan Matriks

Definisi 2.1

m tupel bilangan riil $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ ditulis dalam satu kolom disebut vektor, diberi notasi huruf tebal.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$$

vektor dapat juga ditulis sebagai transposenya yaitu :

$$\mathbf{x}' = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$$

Definisi 2.2

$y = a_1x_1 + a_2x_2 \ \ldots \ + a_kx_k$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Himpunan semua kombinasi linier dari $x_1, x_2, \ldots, x_k$ disebut perluasan linier dari $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Definisi 2.3

Dot produk 2 vektor **x** dan **y** masing-masing berdimensi sama adalah : $\mathbf{x}'.\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m$.

$\mathbf{x}'\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{x}$

Definisi 2.4

Matriks berdimensi mxk ditulis dengan huruf tebal adalah daftar bilangan dengan m baris dan k kolom.

Contoh matriks

$$\underset{3\times 2}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya elemen matriks dapat berupa bilangan riil atau fungsi bilangan riil.

Definisi 2.5

Matriks **A** berdimensi mxk dengan elemen-elemen a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ \ldots,\ k$.

Transpose dari matriks **A**, diberi notasi **A'** adalah matriks berdimensi kxm dengan elemen-elemennya a_{ji} , $j=1,2,\ldots,k$, $i=1,2,\ \ldots,\ m$. Jadi **A'** didapat dari **A** dengan menukar baris dan kolom.

Definisi 2.6

Matriks sembarang **A** dengan jumlah baris = jumlah kolom disebut matriks bujur sangkar.

Definisi 2.7

Matriks A adalah matriks bujur sangkar dengan dimensi kxk. Matriks A disebut simetri bila A=A'. Yaitu A simetri bila

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$i=1,2, \ldots k$, dan $j=1,2, \ldots, k$

Definisi 2.8

Matriks diagonal order p adalah matriks pxp di mana elemen-elemen diluar diagonal adalah 0.

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots \lambda_p \end{bmatrix}$$

atau $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ merupakan suatu matriks diagonal order p dengan elemen-elemen diagonal adalah λ_k, $k=1,2, \ldots, p$.

Definisi 2.9

Matriks identitas berdimensi kxk adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen pada diagonal sama dengan 1 dan 0 untuk elemen-elemen yang lain. Matriks identitas diberi notasi I.

Contoh matriks identitas berukuran 3x3

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.10

Matriks bujur sangkar A berdimensi kxk disebut nonsingular bila : ${}_{k\times k}A\;{}_{k\times 1}x = {}_{k\times 1}O$, mengakibatkan $x = O$.

Catatan: suatu matriks yang tidak nonsingular disebut matriks yang singular.

Definisi 2.11

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B sehingga AB = BA = I. Maka B disebut invers matriks A dan ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n juga.

Matriks-matriks yang mempunyai invers disebut matriks-matriks yang nonsingular.

Definisi 2.12

A dan B adalah matriks-matriks bujur sangkar berordo n. Apabila terdapat matriks bujur sangkar yang nonsingular berordo n sedemikian sehingga $B = P^{-1}AP$, maka dikatakan bahwa matriks B similar terhadap matriks A atau matriks B didapatkan dari A dari suatu transformasi similaritas.

Definisi 2.13

Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan dapat dibawa (direduksikan) kebentuk diagonal oleh suatu transformasi similaritas bila terdapat matriks nonsingular P sedemikian sehingga $P^{-1}AP = \mathbb{D}$ di mana $\mathbb{D}$ suatu matriks diagonal.

Definisi 2.14

A matriks bujur sangkar berdimensi kxk dengan elemen-elemen a_{ij}. Trace dari Matriks A, ditulis tr(A) adalah jumlah elemen-elemen pada diagonal.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$$

Definisi 2.15

Matriks bujur sangkar A disebut *orthogonal* bila baris-barisnya (dipandang sebagai vektor) saling tegak lurus dan mempunyai panjang sama dengan 1 yaitu $AA' = I$.

Pada matriks orthogonal berlaku $A^{-1} = A'$

Definisi 2.16

x : px1 menunjukkan suatu vektor p dan A adalah matriks simetri pxp dengan elemen- elemen a_{ij} maka

$$Q(x) = x'Ax = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} x_i x_j a_{ij}$$

disebut bentuk kuadratik dari variabel x_1, x_2 ..., x_p.

Matriks A selalu dianggap simetri, jika setiap elemen dari setiap pasangan koefisien a_{ij} dan a_{ji} $(i \neq j)$ dapat diganti dengan $(a_{ij} + a_{ji})/2$ tanpa merubah harga $Q(x)$.

Untuk penggambarannya ambil

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

hasilnya akan sama dengan

$$Q(\mathbf{x})=(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 7 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

tampak dalam kasus kedua **A** simetri.

Bentuk kuadratik atau matriks **A** dikatakan

1. Definite positip bila $Q(\mathbf{x}) > 0$ untuk setiap $\mathbf{x} \neq 0$
2. Semidefinite positip bila $Q(x) \geq 0$ untuk setiap x.

Definisi 2.17

Ambil $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)'$, operasi derivatif vektor $\partial/\partial\mathbf{x}$ didefinisikan dengan:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right]'$$

untuk beberapa fungsi skalar $f(x)$ dari vektor $\mathbf{x}$ didefinisikan dengan:

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}\right]'$$

Misal **A** suatu matriks dengan elemen-elemen a_{ij}.

Jika $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = a_{ii}x_i^2 + 2\,x_i \sum_{j\neq i} a_{ij}\, x_j + \sum_{\substack{k\neq i\\ l\neq i}} a_{kl}\, x_k x_l$

didapatkan

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1} a_{ij}\, x_j = 2\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

karena itu $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\, x} = 2\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$

2.1.2 Determinan Matriks

Setiap matriks bujur sangkar A (jumlah kolom = jumlah baris) selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut *determinan* dan ditulis dengan $|A|$ atau det A.

Definisi 2.18

Barisan bilangan-bilangan $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ di mana berlaku $j_i \neq j_k$ untuk $i \neq k$, $(i,k = 1,2,\ldots,n)$ serta j_i adalah suatu bilangan asli disebut sebagai *permutasi* dan banyaknya permutasi yang dapat dibentuk ada n! (dibaca n faktorial) $= n.(n-1).(n-2)\ldots 2.1$

Definisi 2.19

Jumlah inversi menyatakan bilangan yang menunjukkan berapa kali suatu angka diikuti oleh suatu angka yang lebih rendah pada suatu permutasi.

Pandang matriks bujur sangkar A ordo n berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka hasil kali antar n elemen matriks A berbentuk $a_{1j_1}.a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ dengan $j_1, j_2, \ldots, j_n$ menunjukkan kolomnya, dengan syarat setiap elemen yang diambil berasal dari setiap baris dan kolom yang berbeda dalam matriks A tersebut. Artinya tidak boleh dalam suatu hasil kali ada 2 elemen atau lebih yang berasal dari baris atau kolom yang sama.

Definisi 2.20

Determinan dari matriks bujur sangkar A berordo n dinyatakan dengan $|A| = \sum_{1}^{n!} (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ (di mana indeks $j_1, j_2, \dots, j_n$ berbeda-beda sesuai dengan permutasinya sebanyak n! dan τ menyatakan jumlah inversi) dengan sifat-sifat: (i) $|AB| = |A|.|B|$

(ii) $|A'| = |A|$

Suatu matriks yang mempunyai invers adalah matriks yang determinanya tidak sama dengan nol dan biasa disebut dengan *matriks nonsingular* . Dan sebaliknya disebut dengan *matriks singular*.

Ambil dua matriks nonsingular A dan B : n x n yang terbagi atas matriks-matriks A_{11}: $n_1 x n_1$, A_{12}: $n_1 x n_2$, dan A_{21}: $n_2 x n_1$, A_{22} : $n_2 x n_2$ (demikian juga dengan B) sedemikian sehingga $n_1 + n_2 = n$. Maka A_{11}, A_{12}, A_{21} dan A_{22} disebut *Partisi matriks* A, demikian juga dengan matriks matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} B_{11}A_{11}+B_{12}A_{21} & B_{11}A_{12}+B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11}+B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12}+B_{22}A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

Jika B adalah invers dari A, $AB = I_n$ dan $BA = I_n$ untuk I_n adalah matriks identitas ordo n maka :

(i) $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_{n_1}$

(ii) $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$

(iii) $B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0$

(iv) $B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_{n_2}$

Jika A_{11} nonsingular, dan misalkan $B_{22} = D^{-1}$

dari (ii) $B_{12} = -(A_{11}^{-1} A_{12}) D^{-1}$

dari (iii) $B_{21} = -D^{-1}(A_{21} A_{11}^{-1})$

dari (i) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1} A_{12})D^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$

dan bila disubstitusikan ke (iv)

$-D^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + D^{-1}A_{22} = I_{n_2}$ maka $D = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$.

Dan bila A_{22} nonsingular, analog didapat $D = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

Selanjutnya untuk A_{22} non singular, D biasa disebut sebagai $A_{11.2}$. Sedangkan untuk A_{11} yang nonsingular maka D disebut sebagai $A_{22.1}$. Sedemikian sehingga,

$$A_{11.2} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$A_{22.1} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

Proposisi 2.1

Ambil matriks A seperti di atas, jika

(i) Jika $|A_{11}| \neq 0$

maka $|A| = |A_{11}|\,|A_{22} - A_{21}\,A_{11}^{-1}\,A_{12}|$

(ii) Jika $|A_{22}| \neq 0$

maka $|A| = |A_{22}|\,|A_{11} - A_{12}\,A_{22}^{-1}\,A_{21}|$

Bukti :

(i) Ambil

$$\det \begin{bmatrix} I_{n1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n2} \end{bmatrix} = 1$$

maka

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n2} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A_{11}|\,|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

(ii) diselesaikan seperti (i) dengan bantuan

$$\det \begin{bmatrix} I_{n1} & -A_{22}^{-1}A_{21} \\ 0 & I_{n2} \end{bmatrix} = 1$$

Jika $|A_{11}| \neq 0$ dan $|A_{22}| \neq 0$ maka

$$|A_{11}|\,|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| = |A_{22}|\,|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}| \quad ■$$

Jika $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dan $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ vektor dari p+q variabel, dimana $p \leq q$, dan jika partisi matriks dalam A adalah definit positip (dan karena simetri sedemikian sehingga $A'_{12} = A_{21}$) harga stasioner dari skalar $(x'A_{12}y)^2/[x'A_{11}x)(y'A_{22}y)]$ adalah $c(A_{12}A_{22}^{-1}A'_{12}A_{11}^{-1})$ ...(2.1)

Sebagai akibat harga ekstrim diberikan dengan akar karakteristik maksimum dan minimum $A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}A_{11}^{-1}$.

Definisi 2.21

Minor dari elemen a_{ij} dari suatu matriks A dengan elemen-elemen a_{ij} adalah harga determinan yang didapatkan dari A dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dan kofaktor dari a_{ij} yang dinotasikan dengan A_{ij} diberikan dengan $(-1)^{ij}$ dikalikan dengan minor dari a_{ij}.

Menurut Laplace, determinan dari suatu matriks order p sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Dengan perkataan lain

$$|A| = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

dengan i sebarang

$$|A| = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

dengan j sebarang.

2.1.3 Akar Karakteristik Dan Vektor Karakteristik

Definisi 2.22

B matriks bujur sangkar berdimensi kxk, I adalah matriks identitas berdimensi kxk. Skalar β_1, β_2, ..., β_k yang memenuhi persamaan $|B-\beta I| = 0$ disebut akar-akar karakteristik dari matriks B.

Persamaan $|B-\beta I| = 0$ (sebagai fungsi x) disebut persamaan karakteristik.

Definisi 2.23

B matriks berdimensi kxk. β akar-akar karakteristik dari B. Bila x adalah vektor yang tidak merupakan nol vektor ($x \neq 0$) sedemikian sehingga $Bx = \beta x$ maka x disebut vektor karakteristik dari matriks B yang bersesuaian dengan akar-akar karakteristik β.

Theorema 2.1

Vektor karakteristik yang bersesuaian dengan akar karakteristik yang berbeda dari suatu matriks simetri adalah saling tegak lurus (orthogonal).

Bukti: Misal β_1 dan β_2 adalah dua akar karakteristik yang berbeda dari matriks simetri B dan ambil $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)'$ dan $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)'$ adalah vektor karakteristik yang bersesuaian dengan β_1, β_2 maka

$$Bx = \beta_1 x \qquad , \; By = \beta_2 y$$

sehingga

$$y'Bx = \beta_1 y'x \qquad , \; x'By = \beta_2 x'y$$

Lalu menurut definisi 2.4: $x'y = y'x$, maka

$$\beta_1 x'y = \beta_2 x'y$$

Jika $\beta_1 \neq \beta_2$ maka $x'y = 0$ ∎

Theorema 2.2

Misal B matriks simetri semi definit positip berdimensi pxp, A matriks simetri definit positip berdimensi pxp . Harga terbesar dari $x'Bx/x'Ax$ untuk $x \neq 0$ adalah akar terbesar dari persamaan $|B-\beta A| = 0$ dan harga terkecil dari $x'Bx/x'Ax$ adalah harga terkecil dari persamaan $|B-\beta A| = 0$ secara berurutan.

Bukti :

Ambil $\dfrac{x'Bx}{x'Ax} = \beta$ maka,

$$x'Bx = \beta x'Ax$$

$$x'Bx - \beta x'Ax = 0$$

untuk memperoleh harga stasioner maka perlu dideferensialkan terhadap x

$$\frac{\partial}{\partial x}(x'Bx - \beta x'Ax) = 0$$

menurut definisi 2.17, dari pendeferensialan persamaan tersebut akan diperoleh:

$$2Bx - 2\beta Ax = 0$$

$$(B - \beta A)x = 0;\ x \neq 0$$

maka harga terbesar dari β diberikan oleh akar terbesar dari persamaan karakteristik $B-\beta A = 0$ dan harga terkecil dari β diberikan oleh akar terkecil dari persamaan karakteristik $|B-\beta A| = 0$ ∎

Jika $g_1 \geq x'Bx / x'Ax \geq g_2$, untuk $x \neq 0$, maka $g_1 \geq \beta_1 \geq \beta_p \geq g_2$ di mana β_1 dan β_p adalah akar karakteristik terbesar dan terkecil dari $|B - \beta A|$.

2.1.4 Statistik Deskriptip

Untuk suatu data diperlukan ringkasan angka yang disebut statistik deskriptip.

Definisi 2.24

Jika $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ menunjukkan suatu sampel acak berukuran n pada variabel i ,mean sampel didefinisikan dengan

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad , j=1,2, \ldots, n$$

$$\text{Mean sampel } \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

Definisi 2.25

Kovarian sampel untuk variabel ke-i dan ke-k adalah

$$S_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k)$$

$i=1,2,\ldots,p$; $k=1,2,\ldots,p$.

$S_{ik} = S_{ki}$ untuk setiap i dan k.

Definisi 2.26

Jika $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ menunjukkan suatu sampel acak berukuran n pada variabel i, maka varian sampel didefinisikan dengan:

$$S_{ii} = \frac{1}{n-1} \sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad , i=1,2, \ldots, p$$

Kovarian sampel untuk variabel ke-i dan i adalah varian variabel ke-i

Daftar statistik deskriptip untuk varian dan kovarian dapat digambarkan sebagai berikut:

Varian dan kovarian sampel $S_n = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}$

Definisi 2.27

Koefisien korelasi sampel merupakan ukuran hubungan linier antara 2 variabel.

Koefisien korelasi sampel untuk variabel ke-i dan k adalah

$$r_{ik} = \frac{S_{ik}}{\sqrt{S_{ii}}\,\sqrt{S_{kk}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}\,\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - \bar{x}_k)^2}}$$

$i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, p$

$r_{ik} = r_{ki}$ untuk setiap i dan k.

Koefisien korelasi antara $\frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sqrt{S_{ii}}}$ dan $\frac{x_{kj} - x_k}{\sqrt{S_{kk}}}$ merupakan kovariansi antara x_i dan x_k.

Koefisien korelasi sampel r mempunyai sifat:

1. $-1 < r < 1$
2. r menunjukkan ukuran hubungan linier.

   r=0 berarti tidak ada hubungan linier antara kedua komponen.

$r<0$ berarti kecenderungan satu komponen besar bila komponen lain kecil

$r>0$ berarti kecenderungan satu komponen besar bila komponen lain besar.

Kovariansi dan korelasi menunjukkan ukuran hubungan linier. Daftar statistik deskriptip untuk matriks korelasi sampel:

$$\text{Korelasi sampel } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Vektor Acak dan Matriks Acak

Vektor acak adalah vektor yang elemen-elemennya variabel acak, sedangkan matriks acak adalah matriks yang elemen-elemennya variabel acak. Harga harapan matriks acak adalah harga harapan dari setiap elemen-elemennya.

Definisi 2.28

Jika X adalah sebuah variabel acak diskrit, kita menghubungkan sebuah bilangan $p_x(x_i) = P\,(X = X_i)$ dengan masing-masing hasil x_i dalam R_x untuk $i = 1,2, \ldots, n$ di mana bilangan $p_x(x_i)$ memenuhi

1. $p_x(x_i) \geq 0$ untuk seluruh i

2. $\sum_{i=1}^{x} p_x(x_i) = 1$

Fungsi p_x disebut fungsi probabilita dari variabel acak dan pengumpulan pasangan $[(x_i,\ p_x(x_i)),\ i = 1,2,\ \ldots,\ m]$ disebut distribusi probabilita dari X. Fungsi p_x biasanya disajikan dalam bentuk tabel.

Definisi 2.29

X adalah suatu variabel acak diskrit, maka nilai ekspektasinya yang dinyatakan dengan huruf μ adalah

$$\mathbb{E}(x_i) = \mu = \sum_i x_i\ p(x_i)$$

Definisi 2.30

Fungsi probabilita variabel acak berdimensi dua $[X_1,\ X_2]$ dengan nilai-nilainya $[x_{1i},\ x_{2j}]$,$i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$ diberikan dengan

$$p(x_{1i},x_{2j}) = P(X_1=x_{1i} \text{ dan } X_2=x_{2j})$$

di mana

$$p(x_{1i},x_{2j}) \geq 0 \text{ untuk seluruh } i \text{ dan } j$$

dan

$$\sum_{\text{seluruh } j}\ \sum_{\text{seluruh } i} p(x_{1i},x_{2j}) = 1$$

Definisi 2.31

Bila X_1 dan X_2 variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas $p_{12}(x_1,x_2)$ maka nilai ekspektasinya didefinisikan

$$\mathbb{E}\ [g(x_1,x_2)] = \sum \sum g(x_1,x_2)\ p_{12}(x_1,x_2)$$

Jika $g(x_1,x_2) = x$ maka $\mathbb{E}\ [g(x_1,x_2)] = \mathbb{E}(x)$ dan $\mathbb{E}(x)$ biasa disebut sebagai mean (rata-rata) dari x.

Jika $g(x_1,x_2) = x_1 \pm x_2$ maka

$$\mathbb{E}\,[g(x_1,x_2)] = \mathbb{E}(x_1 \pm x_2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[g(x_1,x_2)] &= \Sigma\,\Sigma\,(x_1 \pm x_2)\; p_{12}\,(x_1,x_2)\\ &= \Sigma\,\Sigma\,x_1\; p_{12}(x_1,x_2) \pm x_2\; p_{12}(x_1 \pm x_2)\\ &= \Sigma\,x_1\; p_{12}(x_1,x_2) \pm \Sigma\,x_2\; p_{12}(x_1 \pm x_2)\\ &= \mathbb{E}(x_1) \pm \mathbb{E}(x_2)\end{aligned}$$

jika X_1 dan X_2 variabel acak diskrit.

Theorema 2.3

Jika a dan b konstan maka

$$\mathbb{E}(ax + b) = a\,\mathbb{E}(x) + b$$

Bukti:

Dengan definisi 2.31 dari harga ekspektasi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(ax + b) &= \Sigma\,(ax + b)\;p(x)\\ &= a\,\Sigma\,x\;p(x) + b\,\Sigma\,p(x)\end{aligned}$$

jumlah pertama dari sisi sebelah kanan adalah $\mathbb{E}(x)$ dan jumlah kedua sama dengan 1, maka

$$\mathbb{E}(ax + b) = a\,\mathbb{E}(x) + b \qquad \blacksquare$$

Akibat 1. Jika a = 0, maka $\mathbb{E}(b) = b$

Akibat 2. Jika b = 0, maka $\mathbb{E}(ax) = a\,\mathbb{E}(x)$

Definisi 2.32

Jika $[X_1,X_2]$ adalah sebuah vektor acak diskrit lalu dikatakan bahwa X_1 dan X_2 adalah bebas jika dan hanya jika

$$p(x_{1i},x_{2j}) = p_1(x_{1i})\,.\,p_2(x_{2j})$$

untuk seluruh i dan j.

Theorema 2.4

Misal X_1 dan X_2 dua variabel yang saling bebas. Maka

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2)$$

Bukti :

Dengan definisi 2.31

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \Sigma\ \Sigma\ X_1X_2\ p_{12}(x_1,x_2)$$

Jika X_1 dan X_2 saling bebas, maka menurut definisi 2.32

$$p(x_1,x_2) = p(x_1)\ p(x_2)$$

maka

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \Sigma\ \Sigma\ X_1X_2\ p(x_1)\ p(x_2)$$

$$= \Sigma\ X_1\ p(x_1)\ \Sigma\ X_2\ p(x_2)$$

$$= \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2)$$

Definisi 2.33

Untuk vektor acak x, $\mu = \mathbb{E}(x)$ dan $\Sigma = \mathbb{E}(x-\mu)(x-\mu)'$ disebut mean dan matriks kovarian dari x.

Theorema 2.5

Ambil X_1 dan X_2 dua variabel acak dalam dimensi yang sama. Kovarian dari X_1 dan X_2 ditulis dengan $\text{Cov}(X_1,X_2)$ didefinisikan sebagai

$$\text{Cov}\ (X_1,X_2) = \mathbb{E}\ (X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2)$$

Bukti :

Dengan definisi 2.33 diperoleh:

$$\text{Cov}\ (X_1,X_2) = \mathbb{E}[(X_1-\mathbb{E}(X_1))(X_2-\mathbb{E}(X_2)]$$

$$= \mathbb{E}[X_1X_2-X_1\mathbb{E}(X_2)-X_2\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$$

$$= \mathbb{E}(X_1X_2)-\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)-\mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$$

$$= \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2) \qquad \blacksquare$$

Berdasar definisi 2.33 maka $\mathbb{E}(X_1) = \mu_1$ dan $\mathbb{E}(X_2) = \mu_2$ dan dari theorema 2.2 akibat 1 $\mathbb{E}(\mu_1\ \mu_2) = \mu_1\mu_2$ sehingga diperoleh:

$\text{Cov}\ (X_1,X_2) = \mathbb{E}\ (X_1,X_2) - \mu_1\ \mu_2$

Untuk kasus khusus, Cov (X_1,X_1) disebut varian dari X maka varian dari X dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Asumsikan bahwa $\mathbb{E}X_i^2 < +\infty$, $i=1,\ldots,n$ maka $\text{Cov}(X_i,X_j)=\sigma_{ij}$ ada untuk semua $i,j=1,\ldots,n$. Ambil matriks p x p dengan elemen-elemen σ_{ij} di mana σ_{ii} adalah varian dari X_i dan σ_{ij} adalah kovarian dari X_i dan X_j, maka matriks simetri Σ (yaitu $\Sigma'=\Sigma$) disebut matriks kovarian dari X dan dinyatakan dengan Cov(X).

$\sigma_{ii} = \mathbb{E}(x_i - \mu_i)^2 = \mathbb{E}(x_i)^2 - \mu_i^2$ .... (2.2)

$\sigma_{ik} = \mathbb{E}(x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k)$ .... (2.3)

Mean dan kovariansi vektor acak **X** (px1) dapat ditulis sebagai matriks yaitu:

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \mathbb{E}(x-\mu)(x-\mu)'$$

$$= \mathrm{Cov}(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

diketahui $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ maka

$$\Sigma = \mathrm{Cov}(x) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

merupakan matriks simetri. μ dan Σ adalah mean populasi dan kovarian populasi.

Theorema 2. .6

Jika X_1 dan X_2 adalah bebas maka $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 0$

Bukti :

Jika X_1 dan X_2 bebas maka menurut theorema 2.4

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$$

dan menurut theorema 2.5

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$$
$$= 0$$

Bila X_1, X_2, ..., X_p tidak berhubungan maka kovarian $(x_i - x_k) = \sigma_{ik} = 0$,

sehingga

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

■

Definisi 2.34

Ukuran keeratan hubungan antara variabel acak X_i, X_k adalah koefisien korelasi populasi = ρ_{ik}.

$$\rho_{ik} = \frac{\text{Cov }(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var }(X_i)}\ \sqrt{\text{Var }(X_j)}} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\ \sqrt{\sigma_{kk}}}$$

Matriks koefisien korelasi populasi merupakan matriks simetri Γ , berdimensi (pxp)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\ \sqrt{\sigma_{22}}} & \ldots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\ \sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\ \sqrt{\sigma_{22}}} & 1 & \ldots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\ \sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\ \sqrt{\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\ \sqrt{\sigma_{pp}}} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

atau dapat juga ditulis dengan bentuk sebagai berikut:

$$\Gamma = \mathbb{D}(1/\sqrt{\sigma_{jj}})\ \Sigma\ \mathbb{D}(1/\sqrt{\sigma_{jj}})$$

Theorema 2.7

Jika X adalah variabel acak dan c adalah konstan maka

$$\begin{aligned} \text{Var}(cX_1) &= c^2\ \text{Var}(X_1) \\ &= c^2\sigma_{11} \end{aligned}$$

Bukti :

Untuk 1 variabel acak X_1

Menurut theorema 2.3 akibat 2

$\mathbb{E}(cX_1) = c\,\mathbb{E}(X_1) = c\mu_1$

$Var(cX_1) = \mathbb{E}(cX_1 - c\mu_1)^2$

$$\begin{aligned} Var(cX_1) &= \mathbb{E}(c^2X_1^2 - 2c^2\mu_1X_1 + c^2\mu_1^2) \\ &= \mathbb{E}\,\{c^2(X_1^2 - 2\,\mu_1X_1 + \mu_1^2)\} \\ &= c^2\,\mathbb{E}(X_1 - \mu_1)^2 \\ &= c^2\sigma_{11} \end{aligned}$$

■

Kombinasi linier $\mathbf{x}'=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $\mathbf{a}'=(a_1, a_2, \ldots, a_p)$

$Y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = \mathbf{a}'\mathbf{x}$

berdasarkan theorema 2.3 maka

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p) \\ &= \mathbb{E}(a_1x_1) + \mathbb{E}(a_2x_2 + \ldots + \mathbb{E}(a_px_p) \\ &= a_1\mathbb{E}(x_1) + a_2\mathbb{E}(x_2) + \ldots + a_p\mathbb{E}(x_p) \\ &= a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_p\mu_p \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i\mu_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4) \end{aligned}$$

dan jika σ_i^2 adalah varian dari X_i dan $X_1, X_2, \ldots, X_p$ adalah variabel acak bebas, maka

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2\,\sigma_i^2$$

Jika X_1, $X_2, \ldots, X_p$ variabel acak tidak bebas,

$$\mathrm{Var}(Y) = a_1^2\,\sigma_{11}^2 + a_2^2\sigma_{22}^2 + \ldots + a_p^2\sigma_{pp}^2 + 2a_1a_2\sigma_{12} + 2a_1a_3\sigma_{13}$$

$$+ \ldots + 2a_{p-1}a_p\sigma_{p-1,p}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i^2\ \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{p}\ \mathrm{Cov}\ (X_i, X_j)\ a_i\ a_j$$

$$= \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.5)$$

Dengan cara yang sama, jika $Y = \mathbf{a}'X$ adalah kombinasi linier $X_1, X_2, \ldots, X_p$ dan $W = \mathbf{b}'X$ yang lain, maka dari persamaan (2.5) diperoleh

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}$$

$$\mathrm{Var}(W) = \mathbf{b}'\Sigma\mathbf{b},$$

sehingga

$$\mathrm{Cov}(Y,W) = \mathrm{Cov}(\mathbf{a}'X, \mathbf{b}'X)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i\ \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{p}\ \sum_{j=1}^{p} \mathbf{a}_i\ \mathbf{b}_j\ \mathrm{Cov}\ (X_i, X_j)$$

$$= \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.6)$$

2.3 Koefisien Korelasi Berganda

Tanpa kehilangan keadaan umumnya ambil X_1 suatu variabel acak dan $X_2, X_3, \ldots X_p$ sekumpulan variabel acak yang lain.

Misal $Y = a_2X_2 + a_3X_3 + \ldots + a_pX_p$

menurut definisi 2.38 koefisien. korelasi antara dua buah variabel acak X_i dan Y adalah

$$\rho_{X_1Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, Y)}{[\mathrm{Var}(X_1)]^{1/2}\ [\mathrm{Var}(Y)]^{1/2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.7)$$

Koefisien korelasi berganda dari X_1 dan $X_2, X_3, \ldots, X_p$ yang dinotasikan dengan $R_{1.23\ldots p}$ adalah koefisien korelasi maksimum dari definisi 2.34. Harga $R_{1.23\ldots p}$ diambil sebagai kuadrat positip dari $R^2_{1.23\ldots p}$.

Pandang partisi matriks Var(X)

$$\mathrm{Var}(X) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12}^{[1\times(p-1)]} \\ \sigma_{12} & \Sigma_{22}^{[(p-1)\times(p-1)]} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.8)$$

di mana: Σ_{22} = matriks kovarian dari $X_2, X_3, \ldots, X_p$

σ_{12} = vektor kovarian dari X_1 dan $X_2, X_3, \ldots, X_p$

Dari persamaan (2.5),(2.6),(2.7) dan (2.8) diperoleh

$$\rho^2_{X_1 y} = \frac{\left(\sum_{j=2}^{p} a_j\, \sigma_{1j}\right)^2}{\sigma_{11} \sum_{j=2}^{p} \sum_{k=2}^{p} a_j\, a_k\, \sigma_{jk}}$$

$$= \frac{(\sigma'_{12}\mathbf{a})^2}{\sigma_{11}(\mathbf{a}'\Sigma_{22}\mathbf{a})} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.9)$$

di mana $\mathbf{a}' = (a_2, a_3, \ldots, a_p)$

Berdasar persamaan (2.1) maka harga stasioner dari ρ^2_{xy} adalah

$$c(\sigma'_{12}\Sigma^{-1}_{22}\sigma_{12})(\sigma_{11})^{-1} = c[(\sigma'_{12}\Sigma^{-1}_{22}\sigma_{12})/\sigma_{11}]$$

Karena $(\sigma'_{12}\Sigma^{-1}_{22}\sigma_{12})/\sigma_{11}$ adalah skalar yang hanya mempunyai satu akar karakteristik. Karena itu:

$$R^2_{1.23\ldots p} = (\sigma'_{12}\ \Sigma^{-1}_{22}\ \sigma_{22})/\sigma_{11} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.10)$$

$$R_{1.23\ldots p} = +\sqrt{R^2_{1.23\ldots p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.11)$$

Bentuk alternatif dari $R^2_{1.23\ldots p}$ adalah sebagai berikut:
Berdasar proposisi 2.1 maka persamaan (2.8) menjadi

$$|\Sigma| = |\Sigma_{22}|\,|\sigma_{11} - \sigma'_{12}\ \Sigma^{-1}_{22}\ \sigma_{12}|$$

$$\frac{|\Sigma|}{|\Sigma_{22}|} = |\sigma_{11} - \sigma'_{12}\ \Sigma^{-1}_{22}\ \sigma_{12}|$$

$$\sigma'_{12}\ \Sigma^{-1}_{22}\ \sigma_{12} = \sigma_{11} - \frac{|\Sigma|}{|\Sigma_{22}|}$$

maka persamaan (2.10) menjadi

$$R^2_{1.23\ldots p} = \frac{\sigma'_{12}\ \Sigma^{-1}_{22}\ \sigma_{12}}{\sigma_{11}}$$

$$= \left\{ \sigma_{11} - \frac{|\Sigma|}{|\Sigma_{22}|} \right\} \frac{1}{\sigma_{11}}$$

$$= 1 - \frac{1}{|\Sigma|^{-1}|\Sigma_{22}|}\ \frac{1}{\sigma_{11}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.12)$$

Σ_{22} : matriks yang didapat dengan menghapus baris pertama dan kolom pertama dari Σ. Sehingga

$|\Sigma| = \sigma_{11}\ |\Sigma_{22}|$ dan $|\Sigma^{-1}| = \sigma^{11}|\Sigma^{-1}_{22}|$

Sehingga persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai

$$R^2_{1.23...p} = 1 - \frac{1}{\sigma^{11}|\Sigma^{-1}_{22}||\Sigma_{22}|}\ \frac{1}{\sigma_{11}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sigma^{11}\sigma_{11}} \quad \text{......................... (2.13)}$$

Secara umum dapat ditunjukkan sebagai berikut

$$R^2_{i.12...i-1,i+1...p} = 1 - \frac{1}{\sigma^{ij}\sigma_{ij}} \quad \text{............... (2.14)}$$

di mana σ^{ij} adalah elemen baris ke-i kolom ke-j dari Σ^{-1}. Untuk matriks korelasi Γ di mana menurut definisi 2.34 bentuk matriks Γ adalah sebagai berikut:

$$\Gamma = \mathbb{D}(1/\sqrt{\sigma_{jj}})\ \Sigma\ \mathbb{D}(1/\sqrt{\sigma_{jj}})$$

$$R^2_{i.12...i-1,i+1...p} = 1 - \frac{1}{\rho^{ij}\rho_{ij}} \quad \text{................ (2.15)}$$

di mana $\Gamma = (\rho_{ij})$;

$\Gamma^{-1} = (\rho^{ij})$