

BAB II

MATERI PENUNJANG

Pada bab ini akan dibahas landasan teori yang menunjang dalam pembahasan. Materi penunjang ini diawali dengan pengertian dalam determinan-determinan matriks, signal flow graph, metode arah fisibel Zoutendijk, penglinieran persamaan dan metode penyelidikan Fibonacci.

2.1 Determinan Matriks

Setiap matriks bujur sangkar A dapat dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut DETERMINAN matriks, dan ditulis sebagai $\det(A)$ atau $|A|$.

Definisi 1:

Pada bilangan-bilangan (j_1, j_2, \dots, j_n) . Yang berlaku $j_i = j_k$ untuk $i = k$ (i dan $k = 1, 2, \dots, n$) serta j_i salah satu dari bilangan asli $(1, 2, \dots, n)$ disebut suatu permutasi.

Contoh:

$(2, 3, 1, 4, 5)$ adalah permutasi.

Definisi 2:

Yang dimaksud dengan sebuah inversi pada suatu permutasi (j_1, j_2, \dots, j_n) ialah adanya $j_k < j_i$ (j_k mendahului j_i) padahal $j_i < j_k$ (i dan $k=1, 2, \dots, n$).

Contoh :

Pada permutasi $(2, 1, 4, 3)$ terdapat dua inversi yaitu:

1. $j_1 = 2$ mendahului $j_2 = 1$ padahal $1 < 2$
2. $j_3 = 4$ mendahului $j_4 = 3$ padahal $3 < 4$

Definisi 3:

Jika banyaknya inversi suatu permutasi adalah bilangan ganjil maka disebut permutasi ganjil dan dalam hal lain disebut permutasi genap.

Definisi 4:

Misalkan (j_1, j_2, \dots, j_n) suatu permutasi, maka TANDA (SIGN) dari permutasi tersebut, ditulis $\delta(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah $\delta(j_1, j_2, \dots, j_n) = +1$, bila (j_1, j_2, \dots, j_n) genap, $= -1$ bila (j_1, j_2, \dots, j_n) ganjil.

Definisi 5:

Determinan dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah jumlah dari semua n! hasil kali bertanda dari elemen - elemen matriks A tersebut. Dengan perkataan lain:

$$\det(A) = |A| = \sum \delta(j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

berordo 3, terdapat $3! = 6$ hasil kali.

1. $a_{11} a_{22} a_{33}$, permutasi (1,2,3) banyaknya inversi 0(+)
2. $a_{12} a_{23} a_{31}$, permutasi (2,3,1) banyaknya inversi 2(+)
3. $a_{13} a_{21} a_{32}$, permutasi (3,1,2) banyaknya inversi 2(+)
4. $a_{13} a_{22} a_{31}$, permutasi (3,2,1) banyaknya inversi 3(-)
5. $a_{11} a_{23} a_{32}$, permutasi (1,3,2) banyaknya inversi 1(-)

6. $a_{13} a_{21} a_{32}$, permutasi (2,1,3) banyaknya inversi 1(-)

$$\text{Jadi } \det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

2.2 Signal Flow Graph

Beberapa pengertian dalam signal flow graph berhubungan erat dengan graph berarah khususnya graph aliran (flow graph).

Definisi 6:

Untuk matriks bujursangkar $W = [w_{ij}]$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$, suatu flow graph G adalah graph bobot berarah yang memenuhi dua kondisi:

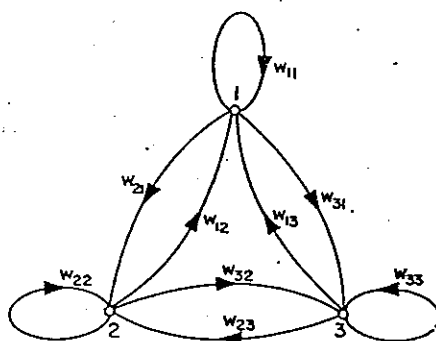
1. G terdiri dari vertex-vertex $1, 2, \dots, n$ dan
2. bobot setiap garis yang menghubungkan vertex i ke vertex j (yang arahnya dari i ke j) adalah w_{ij} untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

Contoh:

Untuk matriks

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

flow graph yang sesuai untuk matriks tersebut adalah



Gambar 2.1

Tujuan penggunaan flow graph adalah untuk menentukan determinan matriks W secara langsung dari flow graph yang berhubungan dengan matriks W , dengan pertimbangan determinan matriks W dinyatakan sebagai

$$\det(W) = \sum \delta(j_1, j_2, \dots, j_n) w_{1j_1} \dots w_{nj_n} \quad (1)$$

Jika G adalah flow graph yang sesuai untuk matriks W , g adalah subgraph yang terdiri dari garis-garis $w_{1j_1}, w_{2j_2}, \dots, w_{nj_n}$ (subscript k dan jk menunjukkan bahwa garis w_{jk} menghubungkan vertex jk dengan vertex k) dan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

yang berhubungan dengan garis-garis $w_{1j_1}, w_{2j_2}, \dots, w_{nj_n}$ merupakan suatu permutasi maka vertex-vertex dalam g hanya muncul sekali pada baris pertama dan baris kedua pada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

Dari sini pasti terdapat dua garis yang terhubung dengan setiap vertex dalam g sehingga $d^+(p) = d^-(p) = 1$ untuk setiap vertex p . Jika subgraph g adalah connected, maka g adalah sirkuit berarah.

Definisi 7:

Suatu sirkuit berarah atau sikel adalah sirkuit yang arahnya sesuai dengan arah setiap garis dalam sirkuit.

Jika subgraph g terdiri dari k maksimal connected subgraph maka setiap maksimal connected subgraph merupakan sirkuit berarah dan g menjadi suatu gabungan sirkuit berarah dengan vertex saling asing.

Definisi 8:

Gabungan sirkuit berarah dengan vertex saling asing adalah himpunan sirkuit berarah sedemikian sehingga tidak ada dua sirkuit yang memiliki vertex sama.

Definisi 9:

Himpunan P sikel (P -set sikel) adalah subgraph yang berupa sirkuit berarah atau gabungan sirkuit berarah dengan vertex saling asing yang memuat semua vertex dari graph berarah G .

Karena subgraph g memuat semua vertex dalam flow grap G , dapat dinyatakan bahwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

merupakan suatu permutasi, sehingga subgraph g yang terdiri dari garis-garis

$w_{1/j_1}, w_{2/j_2}, \dots, w_{n/j_n}$ adalah himpunan P sikel.

Untuk menunjukkan bahwa kebalikan pernyataan ini bernilai benar diasumsikan bahwa subgraph g adalah himpunan P sikel yang memuat garis. Jika garis-garis dalam g adalah $w_{i_1 j_1}, w_{i_2 j_2}, \dots, w_{i_n j_n}$ maka barisan subscript (i_1, i_2, \dots, i_n) dan (j_1, j_2, \dots, j_n) adalah permutasi dari $(1, 2, \dots, n)$ sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

merupakan suatu permutasi dan hasil kali $w_{i_1 j_1} w_{i_2 j_2} \dots w_{i_n j_n}$ adalah suku pada persamaan (1). Jika D_j adalah himpunan P sikel maka persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|W| = \sum_{\epsilon_j} \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j \quad (2)$$

dengan ϵ_j bernilai $+1$ atau -1 bergantung pada $\delta(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Untuk menentukan tanda dari ϵ_j diasumsikan bahwa himpunan P sikel D_j yang terdiri dari garis $w_{i_1 j_1}, w_{i_2 j_2}, \dots, w_{i_n j_n}$ adalah gabungan k sirkuit berarah dengan vertex saling asing. Untuk $k = 1$, D_j adalah sirkuit berarah. Misalkan k sirkuit berarah tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} w_{i_{p_1} j_{p_1}} & w_{i_{p_1+1} j_{p_1+1}} & \dots & w_{i_{p_1+r_1} j_{p_1+r_1}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{i_{p_2} j_{p_2}} & w_{i_{p_2+r_2} j_{p_2+r_2}} & \dots & w_{i_{p_2+r_2} j_{p_2+r_2}} \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} w_{i_{p_k} j_{p_k}} & w_{i_{p_k+r_k} j_{p_k+r_k}} & \dots & w_{i_{p_k+r_k} j_{p_k+r_k}} \end{pmatrix}$$

maka

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \dots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \dots & j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

adalah suatu permutasi untuk $s = 1, 2, \dots, k$ sebab

$i_{p_s}, i_{p_s+1}, \dots, i_{p_s+r_s}$ dan $j_{p_s}, j_{p_s+1}, \dots, j_{p_s+r_s}$ menyatakan semua vertex dalam sirkuit berarah.

Karena garis-garis dalam suatu sirkuit berarah dapat disusun sedemikian sehingga barisan $(w_{i_{p_s} j_{p_s}}, \dots, w_{i_{p_s+r_s} j_{p_s+r_s}})$ adalah trail tertutup dengan arah sama sirkuit

berarah tersebut, maka diperoleh

$$i_{p_s+u-1} = j_{p_s+u} \quad \text{untuk } u = 1, 2, \dots, r_s \quad (3)$$

$$\text{dan } i_{p_s+r_s} = j_{p_s} \quad (4)$$

sehingga

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \dots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \dots & j_{p_s+r_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_s} & i_{p_s+1} & \dots & i_{p_s+r_s-1} & i_{p_s+r_s} \\ i_{p_s+r_s} & i_{p_s} & \dots & i_{p_s+r_s-2} & i_{p_s+r_s-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Pertukaran $r_s - 1$ elemen-elemen baris kedua pada permutasi (5) cukup untuk membuat baris kedua identik dengan baris pertama.

Karena

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_1} & \dots & i_{p_1+r_1} \\ j_{p_1} & \dots & j_{p_1+r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{p_2} & \dots & i_{p_2+r_2} \\ j_{p_2} & \dots & j_{p_2+r_2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_{p_s} & \dots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \dots & j_{p_s+r_s} \end{pmatrix} \quad (6)$$

dan pertukaran $r_s - 1$ elemen-elemen baris kedua pada

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \dots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \dots & j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

cukup untuk membuat kedua baris tersebut identik maka pertukaran

$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_k - 1)$ elemen-elemen baris kedua pada

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

cukup untuk membuat kedua baris tersebut identik.

Karena r_s adalah jumlah garis dari sirkuit berarah yang berhubungan dengan

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \dots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \dots & j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

maka

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_k - 1) = r_1 + r_2 + \dots + r_k - k$$

$$= n - k$$

(7)

atau $n - k$ pertukaran cukup untuk membuat baris kedua pada

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

identik dengan baris pertama. Tanda dari persamaan (2) adalah $\epsilon_j = (-1)^{nk}$ sehingga

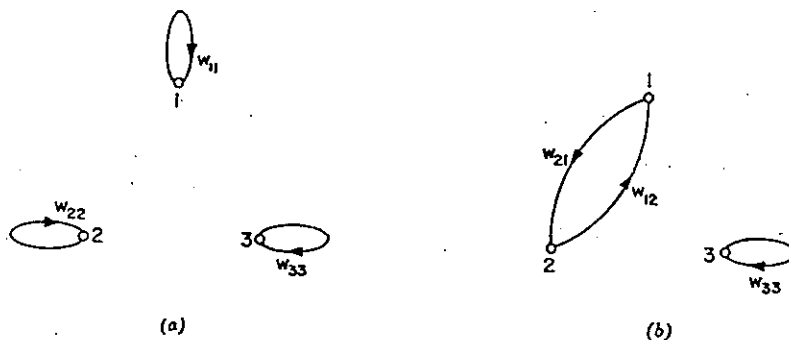
$$|W| = (-1)^n \sum_{\mathcal{S}} (-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j \quad (9)$$

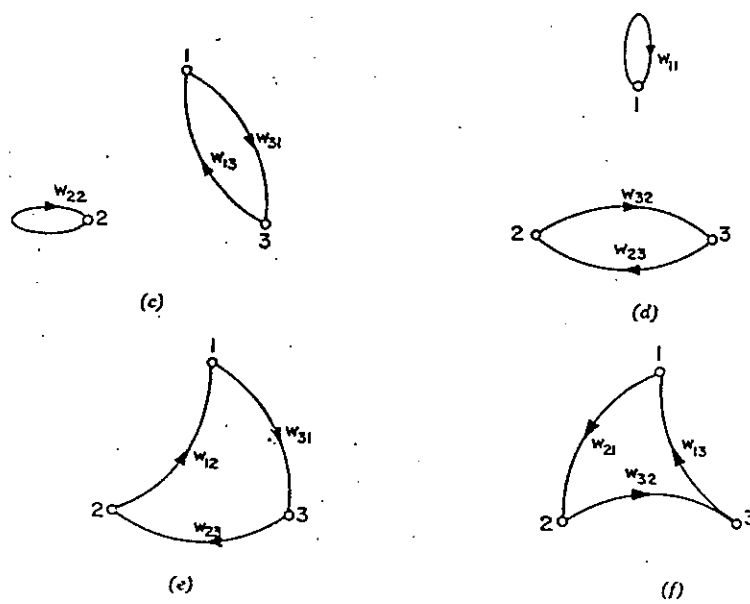
dengan k_j menunjukkan jumlah sirkuit berarah pada himpunan \mathcal{S} sikel D_j .

Contoh :

Berdasar flow graph pada gambar 2.1 dengan matriks W sebagai berikut:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$





P-set cycles. (a) $D_1 = (w_{11}, w_{12}, w_{23})$; (b) $D_2 = (w_{12}, w_{21}, w_{13})$; (c) $D_3 = (w_{13}, w_{31}, w_{22})$; (d) $D_4 = (w_{23}, w_{32}, w_{11})$; (e) $D_5 = (w_{12}, w_{23}, w_{31})$; (f) $D_6 = (w_{13}, w_{32}, w_{21})$.

Gambar 2.2

$$\begin{aligned} \det(W) = & (-1)^3 [(-1)^3 w_{11} w_{22} w_{33} + (-1)^2 w_{12} w_{21} w_{33} \\ & + (-1)^2 w_{13} w_{31} w_{22} + (-1)^2 w_{23} w_{32} w_{11} \\ & + (-1) w_{12} w_{23} w_{31} + (-1) w_{13} w_{32} w_{21}] \end{aligned}$$

Subgraph-subgraph yang berhubungan dengan determinan matriks W ditunjukkan oleh gambar 2.2.

Definisi 10:

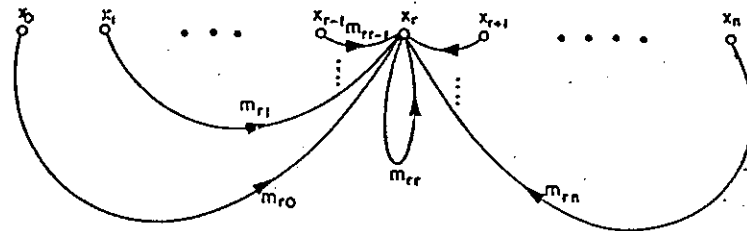
Persamaan

$$x_r = \sum_{p=0}^n m_{rp} x_p \quad (0 \leq r \leq n) \quad (10)$$

dinyatakan oleh suatu graph berarah dengan

1. Bobot dari vertex x_p adalah x_p .
2. Untuk $m_{ru} \neq 0$ ($0 \leq u \leq n$) terdapatlah suatu garis (x_u, x_r) yang bobotnya m_{ru} .

3. Garis-garis yang terhubung dengan vertex r yang arahnya menuju vertex r memiliki bobot m_{ru}



Gambar 2.3

Gambar 2.3 adalah penggambaran signal flow graph persamaan (10). Persamaan (10) disebut persamaan pada vertex x_r dari signal flow graph G . Jika $m_{ru} = 0$ berarti terdapat garis (x_u, x_r) dengan bobot $= 0$ atau tidak terdapat garis yang bobotnya m_{ru} .

Dalam aplikasi sehari-hari setiap vertex menyatakan variabel dari persamaan, sedangkan garis ru menyatakan garis yang berawal dari titik r dan berakhir pada titik u dengan arah dari titik r menuju titik u . setiap garis pada SFG berhubungan dengan transmisi cabang t_{ru} .

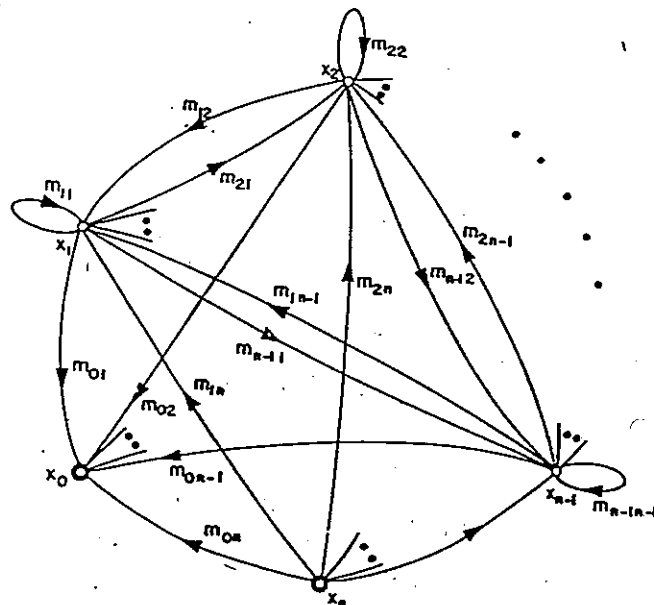
Beberapa terminologi yang berhubungan dengan signal flow graph adalah sebagai berikut:

1. Path adalah trail dengan semua titik berbeda.
2. Transmisi path adalah hasil kali transmisi cabang transmisi cabang sepanjang path.
3. Sikel adalah path yang berawal dan berakhir pada titik yang sama.

4. Transmisi sikel adalah hasil kali transmisi cabang-transmisi cabang dalam sikel.

Dengan menggunakan definisi 10 dapat diturunkan penggambaran signal flow graph untuk persamaan berikut:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1n}x_n \\ x_2 &= m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \dots + m_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= m_{n-11}x_1 + m_{n-12}x_2 + \dots + m_{n-1n}x_n \\ x_n &= m_{01}x_1 + m_{02}x_2 + \dots + m_{0n}x_n \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



Gambar 2.4

Pada Gambar 2.4 signal flow graph G terdiri dari $n+1$ vertex. Vertex x_n disebut source karena semua garis yang terhubung dengan vertex tersebut mempunyai arah meninggalkan x_n . Vertex x_0 disebut sink karena semua garis yang terhubung dengan vertex tersebut mempunyai arah menuju x_0 .

Untuk menurunkan beberapa pengertian dalam signal flow graph, maka persamaan (11) ditulis dalam bentuk berikut ini:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \dots m_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ m_{n-11} & \dots m_{n-1n} \\ m_{01} & m_{02} \dots m_{0n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{dengan } x_n = Kx_0. \quad (13)$$

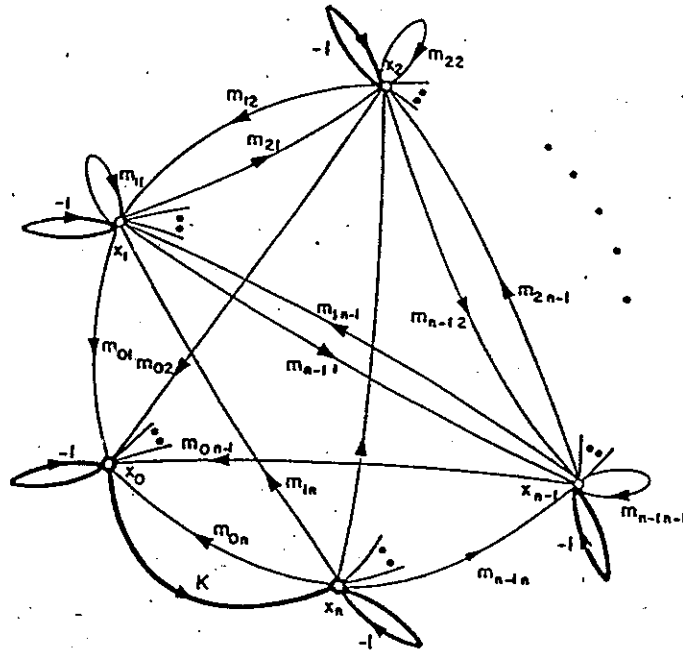
Persamaan (12) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} (m_{11} - 1) & m_{12} & \dots & m_{1n} & 0 \\ m_{21} & (m_{22} - 1) & \dots & m_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-11} & m_{n-12} & \dots & m_{n-1n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & K \\ m_{01} & m_{02} & \dots & m_{0n} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana persamaan (13) dinyatakan sebagai berikut:

$$(M - I)X = 0 \quad (15)$$

Penggambaran flow graph untuk matriks $(M - I)$ ditunjukkan oleh gambar 2.5. Dengan membandingkan flow graph gambar 2.5 dan signal flow graph gambar 2.4 dapat dinyatakan bahwa flow graph dapat diperoleh dari signal flow graph dengan menyisipkan loop (-1) ke setiap vertex dan sebuah garis K dari vertex x_0 ke vertex x_n . Signal flow graph pada gambar 2.4 disebut signal flow graph yang bersesuaian dengan flow graph matriks $(M - I)$.



Gambar 2.5

Dengan menggunakan persamaan (9) determinan matriks $(M - I)$ adalah

$$|M - I| = (-1)^{n+1} \sum (-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j \quad (16)$$

Jika $\overline{D_j(K)}$ adalah himpunan P sikel yang tidak memuat garis K dan $D_q(K)$ adalah himpunan P sikel yang memuat garis K maka persamaan (16) menjadi

$$|M - I| = (-1)^{n+1} [C + KP] \quad (17)$$

dengan

$$C = \sum (-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis } \overline{D_j(K)} \quad (18)$$

dan

$$KP = \sum (-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_q(K) \quad (19)$$

Untuk mendapatkan solusi yang nontrivial dari persamaan (15) maka determinan $(M - I)$ harus sama dengan nol atau $(-1)^{n+1} [C + KP] = 0$

Dengan menggunakan persamaan (13) diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{K} = \frac{-P}{C} \quad (21)$$

Karena C adalah $C = \sum (-1)^{k_j} \cdot$ hasil kali bobot setiap garis pada $D_j(\overline{K})$ maka setiap himpunan P sikel dapat dipertimbangkan sebagai gabungan dari dua himpunan sirkuit berarah $D_j(0)$ dan $D_j(-1)$. $D_j(0)$ adalah himpunan sirkuit berarah yang terdiri dari garis-garis dalam signal flow graph yang bersesuaian dengan flow graph matriks $(M - I)$. $D_j(0)$ dapat juga diartikan sebagai gabungan sirkuit berarah dengan vertex saling asing dari signal flow graph yang bersesuaian dengan flow graph matriks $(M - I)$. $D_j(-1)$ adalah himpunan loop (-1) yang tidak terdapat dalam signal flow graph yang bersesuaian dengan flow graph matriks $(M - I)$. Jika terdapat u loop (-1) dalam $D_j(-1)$ maka

$$\text{Hasil kali bobot setiap garis pada } D_j(-1) = (-1)^u \quad (22)$$

dan

$$\begin{aligned} & (-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j(\overline{K}) \\ &= (-1)^{k_j} \cdot [\text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j(0)] \cdot \\ & \quad [\text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j(-1)] \\ &= (-1)^{k_j} \cdot (-1)^u \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j(0) \cdot (-1)^u \\ &= (-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j(0) \end{aligned} \quad (23)$$

dengan $k'_j = k_j - u$ adalah jumlah sirkuit berarah dalam $D_j(0)$. Jika tidak terdapat $D_j(0)$, maka persamaan (23) menjadi

$$(-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j(\overline{K}) = 1 \quad (24)$$

Definisi 11:

C_r didefinisikan sebagai

$C_r = \Sigma$ Hasil kali transmisi sikel dari r sikel dengan vertex saling asing yang diambil bersamaan.

Berdasar definisi 11, C_1 menyatakan jumlahan semua transmisi sikel dalam signal flow graph G .

Teorema 1

Jika signal flow graph G menggambarkan sistem persamaan $Wx = y$, maka determinan matriks W dinyatakan sebagai $\det(W) = 1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots + (-1)^r C_r$ (25)

dengan r menyatakan jumlah maksimum sirkuit berarah dengan vertex saling asing dalam G .

Bukti

Dengan menggunakan persamaan (9) determinan matriks W dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|W| = (-1)^{\Sigma} (-1)^{k_j} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada } D_j \quad (27)$$

k_j menyatakan jumlah sirkuit berarah dalam himpunan P sikel D_j dan n menyatakan jumlah vertex dalam W . Karena persamaan (27) merupakan persamaan determinan dalam flow graph, sedangkan flow graph diperoleh dari signal flow graph dengan menyisipkan loop (-1) ke setiap vertex dan menambahkan sebuah garis K dari vertex x_0 ke vertex x_n , maka persamaan (27) menjadi

$|\overline{W}| = (-1)^n \cdot (-1)^{-n} \Sigma (-1)^{k_j}$. hasil kali bobot setiap garis pada $D_j(\overline{K})$.

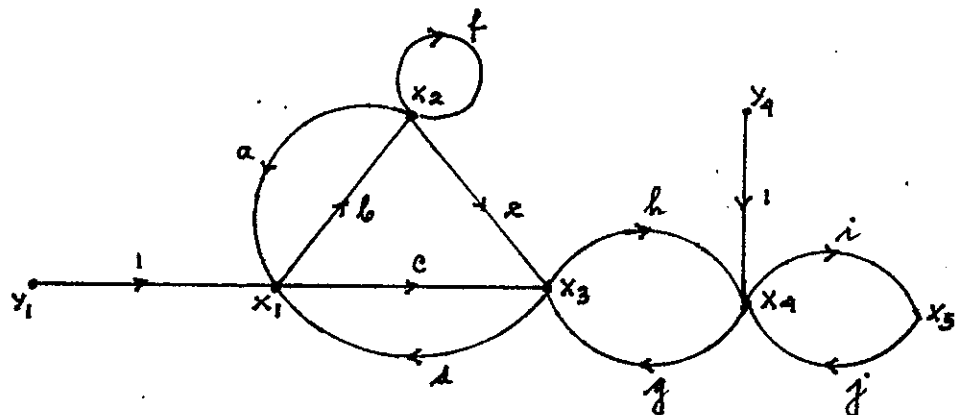
$= \Sigma (-1)^{k_j}$. hasil kali bobot setiap garis pada $D_j(\overline{K})$

$= C$.

Karena $C = 1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots$ dan r jumlah maksimum sirkuit berarah dengan vertex saling asing dalam G maka

$|\overline{W}| = 1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots + (-1)^r C_r$

terbukti.



Gambar 2.6

Contoh :

Untuk signal flow graph gambar 2.6 harga determinan adalah

$$\Delta = 1 - C_1 + C_2 - C_3$$

$$\Delta = 1 - f - ab - cd - gh - ij - bed + fcd + fgh + fij + abgh + abij + cdij + bedij - fcdij$$

dengan

$$C_1 = f + ab + cd + gh + ij + bed$$

$$C_2 = fcd + fgh + fij + abgh + abij + cdij + bedij$$

$$C_3 = fcdij$$

$$\text{dan } C_4 = C_5 = \dots = 0$$

Tujuan penggunaan signal flow graph adalah menentukan hubungan antara source x_n dan sink x_0 . Hubungan ini dapat diturunkan dari persamaan (19). Karena KP dari flow graph G_F adalah

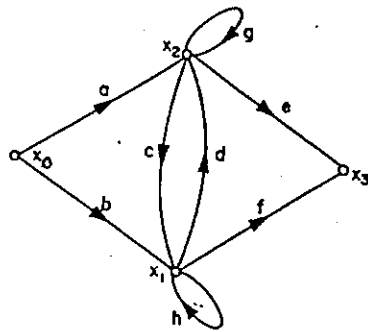
$KP = \sum (-1)^k$ hasil kali bobot setiap garis pada $D_q(K)$ dengan setiap himpunan P sikel $D_q(K)$ memuat garis K, penghapusan garis K dari $D_q(K)$ akan menghasilkan gabungan sebuah path berarah dari vertex x_n menuju vertex x_0 dan sirkuit-sirkuit berarah dengan vertex saling asing.

Definisi 12:

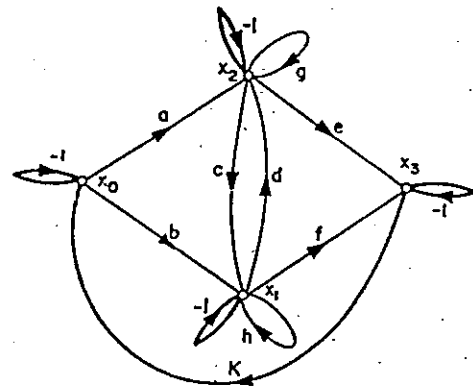
Simbol P_i menyatakan suatu Path berarah dari vertex x_0 menuju vertex x_n dalam flow graph G_F (gambar 2.5) dan simbol $G_F(\Omega(P_i)K)$ menyatakan subgraph dari G_F yang diperoleh dengan menghapus garis K dan menghapus semua vertex dalam P_i beserta semua garis yang terhubung dengan vertex-vertex tersebut.

Contoh :

Dari signal flow graph gambar 2.7 akan diperoleh penggambaran flow graph seperti ditunjukkan oleh gambar 2.8.

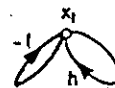


Gambar 2.7



Gambar 2.8

$G_F(\Omega(P_i)K)$ dengan $P = (a, e)$ ditunjukkan oleh gambar 2.9



Gambar 2.9

Berdasar definisi 12 $D_q(K)$ tanpa garis K yang memuat path P_i dapat dipertimbangkan sebagai himpunan yang terdiri dari P_i dan gabungan sirkuit berarah dengan vertex saling asing dalam $G_F(\Omega(P_i)K)$. Jika diambil semua $D_q(K)$ yang memuat path berarah P_i , maka

$\Sigma(-1)^{k_q}$ hasil kali bobot setiap garis pada semua $D_q(K)$ yang memuat P_i .

$$= -K \Sigma(-1)^{k_q} (\text{Transmisi } P_i) \times$$

$[\Sigma(-1)^{k_q-1}$ hasil kali bobot setiap garis pada himpunan P sikel yang berasal

$$\text{dari } G_F(\Omega(P_i)K)] \tag{27}$$

Karena $k_q - 1$ adalah jumlah sirkuit berarah dalam himpunan P sikel $D_q(K)$ (tanpa menghitung sebuah sirkuit berarah yang memuat garis K), maka $k_q - 1$ merupakan jumlah sirkuit berarah dari himpunan P sikel D_q dalam $G_F(\Omega(P_i)K)$.

Dengan menggunakan persamaan (25) didapatkan $\Sigma(-1)^{k-1}$. hasil kali bobot setiap garis pada himpunan P sikel yang berasal dari $G_F(\Omega(P_i)K)$.

$$= 1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots \text{dari } G_F(\Omega(P_i)). \quad (28)$$

$G(\Omega(P_i))$ adalah subgraph dari signal flow graph G yang diperoleh dengan menghapus semua vertex dalam path berarah P_i dan menghapus semua garis yang terhubung dengan vertex yang dihapus tersebut. Dengan menggunakan simbol baru $\overline{C(P_i)}$ yang menyatakan

$$\overline{C(P_i)} = 1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots \text{dari } G(\Omega(P_i)). \quad (29)$$

persamaan (27) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Sigma(-1)^{k-1} \cdot \text{hasil kali bobot setiap garis pada semua } D_q(K) \text{ yang memuat } P_i \\ = -K \Sigma(\text{Transmisi } P_i) \cdot \overline{C(P_i)} \quad (30)$$

Dengan menggunakan persamaan (21) $\Sigma(\text{Transmisi } P_i) \cdot \overline{C(P_i)}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$- P = \sum^{(i)} (\text{Transmisi } P_i) \cdot \overline{C(P_i)} \quad (31)$$

dan rasio source dan sink adalah

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{\sum^{(i)} (\text{Transmisi } P_i) \cdot \overline{C(P_i)}}{1 - C_1 + C_2 - C_3 \dots} \quad (32)$$

Persamaan (32) disebut sebagai Mason Formula.

Contoh:

Dengan menggunakan signal flow graph gambar 2.7 diperoleh

$\sum^{(i)} (\text{Transmisi } P_i) \cdot \overline{C(P_i)}$ dari x_0 menuju x_3 adalah sebagai berikut:

$$\sum^{(i)} (\text{Transmisi } P_i) \cdot C(\overline{P_i}) = ae(1-h) + bf(1-g) + acf + bde$$

sehingga

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{ae(1-h) + bf(1-g) + acf + bde}{1-g-h-cd+gh}$$

2.3. Metode Arah Fisibel Zoutendijk

Metode arah fisibel (MFD) adalah metode untuk memecahkan persoalan program nonlinier dengan kendala berupa pertidaksamaan. Algoritma metode ini diawali dari sembarang titik dalam daerah fisibel dilanjutkan dengan menentukan arah pergerakan. Karena seringkali tidak mungkin untuk bergerak sepanjang gradien, maka ditentukan arah baru yang merupakan solusi dari persoalan program linier. Selanjutnya digunakan metode penyelidikan untuk menentukan titik iterasi yang baru.

Metode arah fisibel sangat baik jika kendala-kendalanya linier, sebagai contoh

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i$$

Untuk menunjukkan hal ini diasumsikan prosedur penghitungan pada langkah k masih berada pada daerah fisibel dengan gradien vektor $(\partial f_i / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)_k$ maka langkah selanjutnya adalah

1. Menentukan λ sedemikian sehingga $f(x) = f(\lambda)$ maksimum (minimum) dalam daerah fisibel. Titik iterasi pada langkah k+1 adalah

$$x^{k+1} = x^k + (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)_k^T \lambda \quad (34)$$

Untuk masalah minimum tanda plus berubah menjadi minus. Suku kedua pada ruas kanan ekuivalen dengan $(dx_1, \dots, dx_n)^T$ yaitu perubahan variabel sepanjang arah gradien.

2. Besarnya λ ditentukan dengan metode penyelidikan Fibonacci. Jika x^{k+1} berada pada daerah fisibel, maka langkah selanjutnya kembali ke langkah (1). Jika x^{k+1} berada pada batas dari daerah fisibel, maka langkah selanjutnya adalah langkah (3).
3. x^k berada pada batas daerah fisibel sehingga

$$\begin{aligned} a_{ij}x_j^k &= b_i, & i &= 1, \dots, l \leq m \\ a_{ij}x_j^k &< b_i, & i &= (l+1), \dots, m \\ x_j^k &= 0, & j &= 1, \dots, l' \leq n \\ x_j^k &> 0, & j &= (l'+1), \dots, n \end{aligned} \quad (35)$$

Pada iterasi selanjutnya

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad i = 1, \dots, l \leq m$$

tidak mungkin meningkat, sedangkan

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad i = (l+1), \dots, m$$

mungkin mengalami peningkatan, dan x_j , $j = 1, \dots, l'$ tidak akan mengalami penurunan. Langkah selanjutnya adalah bergerak sepanjang arah vektor

$r = (dx_1, \dots, dx_n)^T \lambda$ dengan pembatas sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j^k + r_j) \leq b_i \quad i = 1, \dots, l$$

$$x_j^{k+1} = x_j^k + r_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, l'$$

akan tetapi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^k = b_i \quad i = 1, \dots, l$$

$$\text{dan } x_j^k = 0, \quad j = 1, \dots, l'$$

sehingga pembatas menjadi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} r_j \leq 0 \quad i = 1, \dots, l \\ r_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, l' \end{aligned} \quad (36)$$

Karena pencarian arah tersebut berarti mencari $f(x)$ yang mengalami peningkatan terbesar, dengan kata lain mencari maksimum dari

$$df = (\partial f / \partial x_1) dx_1 + \dots + (\partial f / \partial x_n) dx_n, \text{ maka masalah program linier dinyatakan}$$

sebagai berikut:

Maksimum

$$Z = (\partial f / \partial x_1) r_1 + (\partial f / \partial x_2) r_2 + \dots + (\partial f / \partial x_n) r_n \quad (37)$$

Kendala

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} r_j \leq 0 \quad i = 1, \dots, l \\ r_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, l' \\ l \geq r_j \geq -1, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

4. Pembatas program linier dipecahkan untuk r , langkah selanjutnya adalah menentukan maksimum fungsi $f(x) = f(\lambda)$ dengan menggunakan metode penyelidikan Fibonacci.

5. Jika arah vektor r atau J pada langkah (3) adalah nol, maka kondisi optimal telah dicapai. Jika tidak, maka langkah selanjutnya kembali ke langkah (1) bila berada pada daerah fisibel atau langkah (3) bila berada pada batas daerah fisibel.

2.4. Penglinieran Persamaan

Karena analisa flow graph hanya dapat diterapkan pada aljabar linier dan persamaan differensial linier maka penting untuk menentukan metode untuk mengubah persamaan non linier menjadi linier.

Cara yang biasa digunakan adalah menggunakan deret Taylor. Untuk fungsi dengan satu variabel tiga suku pertama dari deret Taylor adalah

$$Z = f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots \quad (38)$$

Jika hanya dua suku dari ruas kanan yang diambil maka akan diperoleh ekspresi linier

$$Z' = f(x)' = a + bx \quad (39)$$

Kondisi ini menunjukkan suatu pendekatan yang valid dan berguna jika deret konvergen, sebagai contoh $(x - x_0)$ kecil. Untuk fungsi dengan dua variabel jika hanya dua suku pertama pada ruas kanan yang diambil

$$Z' = f(x, y)' = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) \quad (40)$$

Contoh

Penghitungan error dari penglinieran persamaan nonlinier sederhana

$$Z = 2x^2 + 10$$

Pendekatan linier dari persamaan ini adalah

$$z' = (2x_0^2 + 10) + 4x_0(x - x_0)$$

dengan mengambil harga $x_0 = 10$, maka

$$Z' = -190 + 40x$$

Error yang ditunjukkan oleh penglinieran persamaan ini adalah

x	Z	Z'
10	210	210
12	298	290
15	460	410

2.5 Metode Penyelidikan Fibonacci

Metode penyelidikan Fibonacci adalah suatu tehnik yang sangat efektif untuk mencari maksimum atau minimum suatu fungsi unimodal dalam interval. Untuk menerapkan metode ini pertama kali diputuskan berapa banyak titik dalam fungsi yang akan digunakan sebagai sampel dan total interval yang melalui nilai optimum yang diinginkan. Tabel Fibonacci kemudian digunakan untuk menentukan jumlah interval dan titik dalam fungsi yang digunakan sebagai sampel

Algoritma penentuan pengali λ untuk metode penyelidikan Fibonacci dengan enam percobaan adalah sebagai berikut:

1. Percobaan pertama pengali λ ditentukan dari tabel Fibonacci.
2. Percobaan kedua pengali λ ditentukan secara simetris dari bawah.
3. Percobaan ketiga terletak simetris terhadap percobaan kedua dari atas.
4. Menentukan $f(\lambda)_1$, $f(\lambda)_2$ dan $f(\lambda)_3$.
 - a. Jika $f(\lambda)_3 \leq f(\lambda)_1 \leq f(\lambda)_2$ percobaan 4 berada pada interval langkah 2 pengali λ ditentukan dengan tabel Fibonacci.
 - b. Jika $f(\lambda)_3 \geq f(\lambda)_1 \geq f(\lambda)_2$ percobaan 4 berada pada interval langkah 3 pengali λ ditentukan dengan tabel Fibonacci.
 - c. Jika $f(\lambda)_3 \leq f(\lambda)_1$ dan $f(\lambda)_1 \geq f(\lambda)_2$ percobaan 4 berada pada interval yang simetris terhadap langkah 3 dan langkah 2.
 - d. Jika $f(\lambda)_1 \leq f(\lambda)_2$; $f(\lambda)_1 \leq f(\lambda)_3$ dan $f(\lambda)_3 \leq f(\lambda)_2$ percobaan 4 berada pada interval langkah 2 pengali λ ditentukan dengan tabel Fibonacci.
 - e. Jika $f(\lambda)_1 \leq f(\lambda)_2$; $f(\lambda)_1 \leq f(\lambda)_3$ dan $f(\lambda)_3 \geq f(\lambda)_2$ percobaan 4 berada pada interval langkah 3 pengali λ ditentukan dengan tabel Fibonacci.
5. Menentukan $f(\lambda)_1$, $f(\lambda)_2$, $f(\lambda)_3$ dan $f(\lambda)_4$.
 - a. Untuk kejadian 4.a dan 4.d percobaan 5 berada pada interval langkah 4 dan pengali λ ditentukan dengan tabel Fibonacci.
 - b. Untuk kejadian 4.b dan 4.e jika $f(\lambda)_3 \leq f(\lambda)_4$ percobaan 5 berada diantara interval langkah 4 dan 3 simetris terhadap langkah 4 dan jika $f(\lambda)_3 \geq f(\lambda)_4$ percobaan 5 berada pada interval langkah 4 yang sekaligus merupakan harga optimum.

- c. Untuk kejadian 4.c percobaan 5 berada pada interval yang simetris terhadap langkah 1 dan langkah 2.
6. a. Untuk kejadian 5.a percobaan 6 berada di antara interval langkah 4 dan 5.
- b. Untuk kejadian 5.b percobaan 6 berada di antara interval langkah 5 dan 3.
- c. Untuk kejadian 5.c percobaan 6 berada di antara interval langkah 1 dan 4.

Contoh:

Akan ditentukan optimum dari

Maksimum

$$f = x_1 x_2 = f(\lambda)$$

$$x_1 = 10/3 + \lambda \quad , \quad x_2 = 10/3 - 1/2\lambda$$

dengan interval $[0, 11/3]$

Dengan mengambil enam lokasi untuk mengevaluasi $f(\lambda)$, maka harga tertinggi $f(\lambda)$ dari enam lokasi tersebut merupakan harga maksimum. Untuk menentukan jumlah pembagian interval-interval dan lokasi percobaan pertama digunakan tabel 1. Karena diambil enam percobaan, maka jumlah pembagian interval adalah 21 dengan lokasi percobaan pertama berada pada interval 8. $\Delta\lambda$ untuk persoalan ini ditentukan sebagai berikut $\Delta\lambda = (11/3)/21 = 11/63$.

Tabel 1 Tabel metode penyelidikan Fibonacci

Jumlah Percobaan	Jumlah Pembagian Interval	Lokasi Trial Pertama
2	3	1
3	5	2
4	8	3
5	13	5
6	21	8
7	34	13
8	55	21
9	89	4
10	144	55
11	233	89
12	377	144
13	610	233
14	987	377
15	1597	610
16	2584	987
17	4181	1597
18	6765	2584
19	10946	4181
20	17711	6765
21	28657	10946
22	46368	17711
23	75025	28657
24	121393	46368

Percobaan pertama

Karena lokasi percobaan pertama berada pada interval ke-8 maka

$$\lambda_1 = (8) (\Delta\lambda) = 88/63$$

$$f_1 = (10/3 + 88/63) (10/3 + \frac{1}{2} (88/63)) = 12,46$$

Harga-harga ini kemudian dimasukkan dalam tabel 2.

Percobaan kedua

Beda metode penyelidikan Fibonacci letak percobaan kedua simetris terhadap percobaan pertama, sehingga percobaan kedua terletak di bawah interval ke 21.

$$\lambda_2 = (\Delta\lambda) (21-8) = 143/63$$

$$f_2 = 12,3$$

Percobaan ketiga

Percobaan ketiga terletak simetris terhadap percobaan kedua, yaitu delapan interval dibawah interval ke-13.

$$\lambda_3 = (\Delta\lambda) (13-8) = 55/63$$

$$f_3 = 12,2$$

Percobaan keempat

Harga maksimum f akan berada pada interval (5-13), yaitu antara $\lambda=55/6$ dan $\lambda=143/63$. Dengan menggunakan tabel 1 percobaan keempat terletak pada interval ke-10.

$$\lambda_4 = (\Delta\lambda) (13-3) = 110/63$$

$$f_4 = 12,5$$

Percobaan kelima

Harga maksimum f akan berada pada interval (8-13).

$$\lambda_5 = (\Delta\lambda) (13-2) = 121/63$$

$$f_5 = 12,46$$

Percobaan keenam

Karena $f_4 > f_5$, maka harga maksimum f akan berada pada interval (8-11)

$$\lambda_6 = (\Delta\lambda) (11-2) = 99/63$$

$$f_6 = 12,5$$

Tabel 2 Tabel penyelidikan Fibonacci untuk $f = x_1 x_2$

Interval	Percobaan	λ	f
1			
2			
3			
4			
5	3	55/63	12,2
6			
7			
8	1	88/63	12,46
9	6	99/63	12,50
10	4	110/63	12,50
11	5	121/63	12,46
12			
13	2	143/63	12,3
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			