BAB II

BILANGAN STABILITAS

Sebelum membahas bilangan stabilitas, akan diberikan beberapa definisi tentang graph parsial, klik, himpunan artikulasi, dan titik artikulasi.

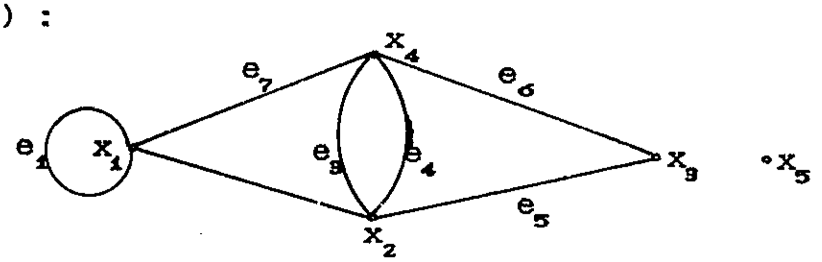
2.1. Graph Parsial.

Definisi 2.1. :

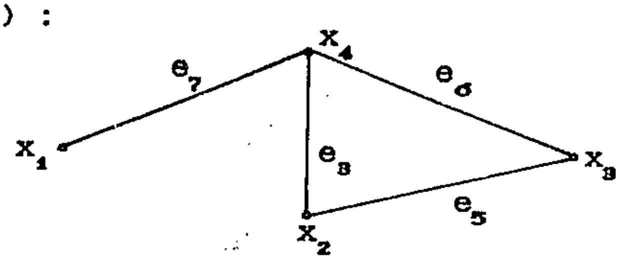
Subgraph $G' = (X', E')$ dari graph $G = (X, E)$ adalah graph dengan himpunan titik X' dan himpunan ruas E' yang memenuhi $X' \subset X$ dan $E' \subset E$.

Contoh 2.1. :

$G = (X, E)$:



$G' = (X', E')$:



gambar 2.1.

Graph G' di atas mempunyai $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan $E' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Karena $X' \subset X$ dan $E' \subset E$, maka graph G' adalah subgraph dari graph G.

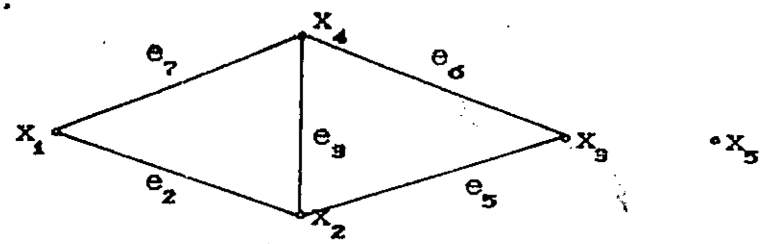
Definisi 2.2. :

Graph parsial (*partial graph*) G´ adalah graph G yang tidak memuat E − E´, sedangkan himpunan titik X´= X.

Contoh 2.2. :

Berikut ini salah satu graph parsial G´dari graph G pada gambar 2.1 :

G´ = (X´,E´) :



gambar 2.2.

Pada gambar 2.2, graph G´ merupakan graph parsial, karena X´= X = $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ dan E´ = $\{e_2,e_3,e_5,e_6,e_7\}$.

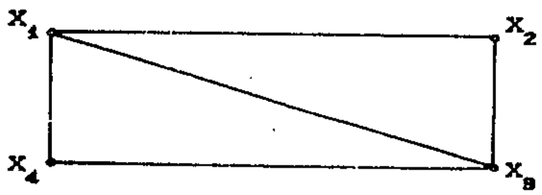
2.2. Klik.

Definisi 2.3. :

Suatu **klik** (*clique*) dari graph G didefinisikan sebagai himpunan $K \subset X$, sedemikian sehingga setiap pasang titik yang berbeda di dalam K adalah adjacent. Klik − n adalah graph lengkap dengan n titik, diberi simbol K_n.

Contoh 2.3. :

G = (X,E) :

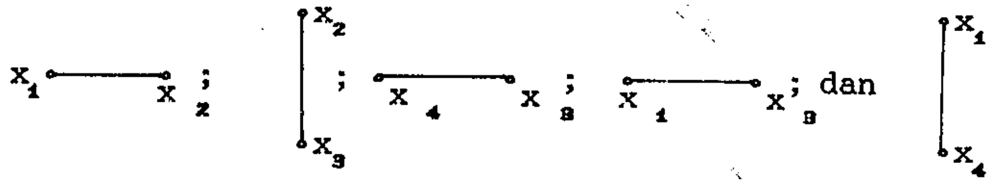


gambar 2.3.

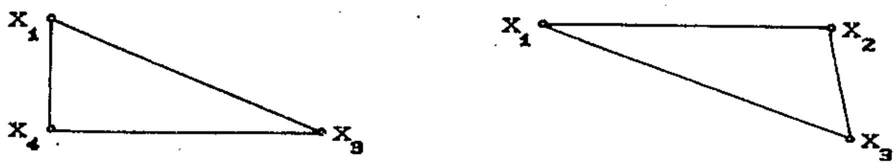
K_1, K_2, dan K_3 dari gambar 2.3 dapat digambarkan sebagai berikut :

K_1 : $\circ x_1$, $\circ x_2$, $\circ x_3$, dan $\circ x_4$

K_2 :



K_3 :



gambar 2.4.

Definisi 2.4. :

Jika $\delta = (K_1, K_2, \ldots, K_k)$ adalah partisi X ke dalam k klik, maka $\theta(G) = \min_{\delta} |\delta|$ adalah banyaknya anggota terkecil dari klik-klik hasil partisi X.

Contoh 2.4. :

Klik-klik dari graph G pada gambar 2.3 berupa :

$K_1=\{x_1\}$, $K_2=\{x_2\}$, $K_3=\{x_3\}$, $K_4=\{x_4\}$, $K_5=\{x_1,x_2\}$, $K_6=\{x_1,x_3\}$, $K_7=\{x_1,x_4\}$, $K_8=\{x_2,x_3\}$, $K_9=\{x_3,x_4\}$, $K_{10}=\{x_1,x_2,x_3\}$, dan $K_{11}=\{x_1,x_3,x_4\}$.

Partisi dari X ke klik-klik adalah :

$\delta_1 = (K_1, K_2, K_3, K_4) = (\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\})$,

$\delta_2 = (K_5, K_9) = (\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\})$,

$\delta_3 = (K_7, K_8) = (\{x_1,x_4\},\{x_2,x_3\})$,

$\delta_4 = (K_2, K_{11}) = (\{x_2\},\{x_1,x_3,x_4\})$,

$\delta_5 = (K_4, K_{10}) = (\{x_4\},\{x_1,x_2,x_3\})$, dan

$\delta_6 = (K_2, K_4, K_6) = (\{x_2\},\{x_4\},\{x_1, x_3\})$.

Jadi $\theta(G) = \min\limits_{\delta} |\delta| = |\delta_2| = |\delta_3| = |\delta_4| = |\delta_5| = 2$.

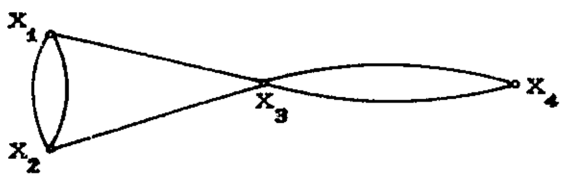
2.3. Himpunan Artikulasi dan Titik Artikulasi.

Definisi 2.5. :

A dikatakan **himpunan artikulasi** (*articulation set*) dari graph terhubung G, jika subgraph dari graph G yang dibangun oleh X - A adalah tidak terhubung.

Contoh 2.5. :

G = (X,E) :



gambar 2.5.

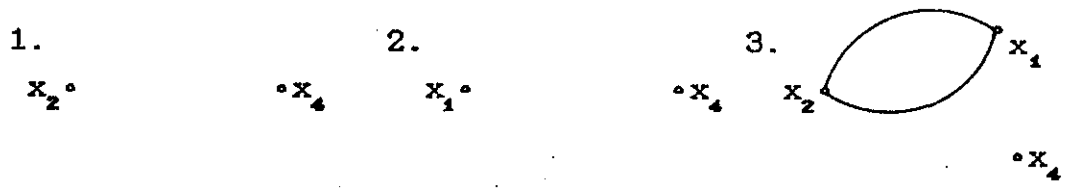
Himpunan artikulasi dari gambar 2.5 adalah :

$A = \{x_1, x_3\}$, $B = \{x_2, x_3\}$, $C = \{x_3\}$, dengan $A,B,C \subset X$

A, B, dan C adalah himpunan artikulasi, karena X - A, X - B, maupun X - C menghasilkan subgraph-subgraph tidak terhubung, yaitu :

1. $X - A = \{x_1,x_2,x_3,x_4\} - \{x_1,x_3\} = \{x_2,x_4\}$
2. $X - B = \{x_1,x_2,x_3,x_4\} - \{x_2,x_3\} = \{x_1,x_4\}$
3. $X - C = \{x_1,x_2,x_3,x_4\} - \{x_3\} = \{x_1,x_2,x_4\}$

Ketiga subgraph tidak terhubung di atas dapat digambarkan sebagai berikut :



gambar 2.6.

DEFINISI 2.6. :

Graph terhubung dikatakan **graph separabel** (*separable graph*), jika hanya mempunyai satu titik penghubung.

Contoh 2.6. :

Pada gambar 2.5 adalah contoh graph separabel dengan x_3 adalah titik penghubungnya.

DEFINISI 2.7. :

Titik artikulasi (*articulation point*) adalah titik dari graph separabel yang meniadakan keterhubungan graph.

Contoh 2.7. :

Dari contoh 2.5, titik x_3 adalah titik artikulasi, karena $X - \{x_3\}$ menghasilkan subgraph yang tidak terhubung.

2.4. Himpunan Stabil dan **Bilangan Stabilitas.**

Definisi 2.8. :

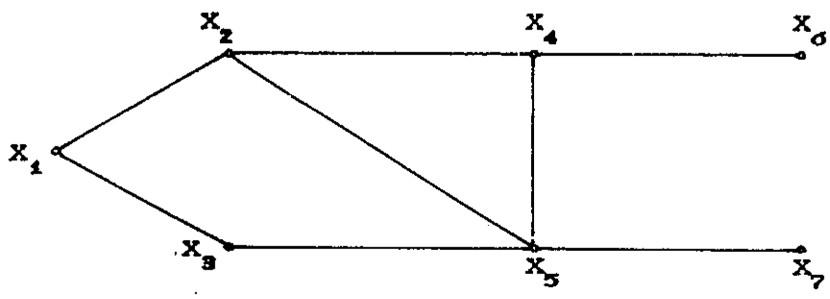
Diberikan graph sederhana $G = (X,E)$. Suatu himpunan $S \subset X$ disebut **stabil**, jika tidak ada dua titik pada S yang adjacent atau $\Gamma_G(S) \cap S = \emptyset$.

DEFINISI 2.9. :

Bilangan stabilitas (*stability number*) dari graph G didefinisikan sebagai jumlah anggota dari himpunan stabil yang mempunyai anggota terbesar (*maximum*), diberi simbol $\alpha(G)$.

Contoh 2.8. :

$G = (X,E)$:



gambar 2.7.

Himpunan-himpunan stabil S dari graph G adalah :

$S_1 = \{x_1,x_4,x_7\}$, $S_2 = \{x_2,x_3,x_6,x_7\}$, $S_3 = \{x_3,x_4,x_7\}$ dan $S_4 = \{x_1,x_5,x_6\}$. Karena S_2 adalah himpunan stabil yang mempunyai jumlah anggota terbesar (*maximum*), yaitu 4, maka $\alpha(G) = 4$.

Definisi 2.10. :

Diberikan graph sederhana $G = (X,E)$ dan suatu himpunan stabil $S \subset X$. Suatu **barisan selang-seling yang terhubung** ke S (*alternating sequence relative ke* S) didefinisikan sebagai barisan :

$$\sigma = (a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,\ldots)$$

yang terdiri dari titik-titik yang berbeda secara berselang-seling dan merupakan anggota dari $A = X - S$ dan

$B = S$, serta memenuhi syarat sebagai berikut :

1. $a_1 \in A$.
2. $b_i \in B - \{b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}\}$, dan

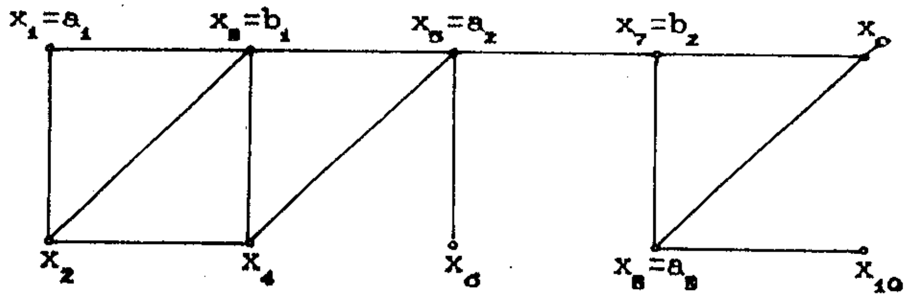
   $\Gamma_G(b_i) \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \neq \emptyset$.
3. $a_{i+1} \in A - \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$, dan

   $\Gamma_G(a_{i+1}) \cap \{b_1, b_2, \ldots, b_i\} \neq \emptyset$,

   $\Gamma_G(a_{i+1}) \cap \{a_1, a_2, \ldots, a_i\} = \emptyset$.

Contoh 2.9. :

$G = (X,E)$:



gambar 2.8.

Alternating sequence relative ke B pada graph G di atas adalah $\sigma = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$, untuk $B = S = \{b_1, b_2, b_3\}$ dan $A = X-S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\} - \{x_3, x_7, x_{10}\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9\}$. Pada rangkaian di atas $x_1 = a_1, x_5 = a_2, x_8 = a_3$. Sekarang dilakukan pemeriksaan terhadap syarat-syarat pada definisi di atas,

1. $x_1 = a_1 \in A$
2. Untuk $i = 1$, $b_1 \in B - \{ \}$

   $b_1 \in B$

   $\Gamma_G(b_1) \cap \{a_1\} = \{x_1=a_1, x_2, x_4, x_5=a_2\} \cap \{a_1\}$

   $= \{a_1\} \neq \emptyset$.

Untuk $i = 2$, $b_2 \in B - \{b_1\}$

$b_2 \in \{b_1, b_2, b_3\} - \{b_1\} = \{b_2, b_3\}$

$\Gamma_G(b_2) \cap \{a_1, a_2\} = \{x_5 = a_2, x_8 = a_3, x_9\} \cap \{a_1, a_2\}$

$= \{a_2\} \neq \emptyset.$

Untuk $i = 3$, $b_3 \in B - \{b_1, b_2\}$

$b_3 \in \{b_1, b_2, b_3\} - \{b_1, b_2\} = \{b_3\}$

$\Gamma_G(b_3) \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{x_8 = a_3\} \cap \{a_1, a_2, a_3\}$

$= \{a_3\} \neq \emptyset.$

3. Untuk $i = 1$,

$a_2 \in A - \{a_1\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9\} - \{x_1 = a_1\}$

$= \{x_2, x_4, x_5 = a_2, x_6, x_8, x_9\}$

$\Gamma_G(a_2) \cap \{b_1\} = \{x_3 = b_1, x_4, x_6, x_7\} \cap \{b_1\} = \{b_1\} \neq \emptyset$

$\Gamma_G(a_2) \cap \{a_1\} = \{x_3 = b_1, x_4, x_6, x_7\} \cap \{a_1\} = \{\ \} = \emptyset.$

Untuk $i = 2$,

$a_3 \in A - \{a_1, a_2\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8 = a_3, x_9\} - \{x_1 = a_1, x_2 = a_5\}$

$= \{x_2, x_4, x_6, x_8 = a_3, x_9\}.$

$\Gamma_G(a_3) \cap \{b_1, b_2\} = \{x_7 = b_2, x_{10} = b_3\} \cap \{b_1, b_2\} = \{b_2\} \neq \emptyset$

$\Gamma_G(a_3) \cap \{a_1, a_2\} = \{x_7 = b_2, x_{10} = b_3\} \cap \{a_1, a_2\} = \{\ \} = \emptyset.$

Dengan demikian syarat-syarat terpenuhi.

DEFINISI 2.11. :

Suatu alternating sequence dikatakan **maksimal** (*maximal*), jika tidak ada lagi titik-titik yang dapat ditambahkan tanpa merubah syarat (2) dan (3).

Contoh 2.10. :

Pada contoh 2.9 di atas merupakan alternating sequence maksimal, karena :

- Apabila dalam barisan σ ditambahkan titik x_2 sebagai a_4, maka $\Gamma_G(a_4) \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{x_1=a_1,x_3,x_4\} \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{a_1\} \neq \emptyset$. Jadi syarat (3) tidak terpenuhi.
- Apabila dalam barisan σ ditambahkan titik x_4 sebagai a_4, maka $\Gamma_G(a_4) \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{x_2,x_3,x_5,a_2\} \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{a_2\} \neq \emptyset$. Jadi syarat (3) tidak terpenuhi.
- Apabila dalam barisan σ ditambahkan titik x_6 sebagai a_4, maka $\Gamma_G(a_4) \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{x_5=a_2\} \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{a_2\} \neq \emptyset$. Jadi syarat (3) tidak terpenuhi.
- Apabila dalam barisan σ ditambahkan titik x_9 sebagai a_4, maka $\Gamma_G(a_4) \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{x_7,x_8=a_3\} \cap \{a_1,a_2,a_3\} = \{a_3\} \neq \emptyset$. Jadi syarat (3) tidak terpenuhi.

Karena penambahan satu titik lagi tidak memenuhi syarat (3), maka barisan $\sigma = (a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3\}$ pada contoh 2.9 adalah maksimal.

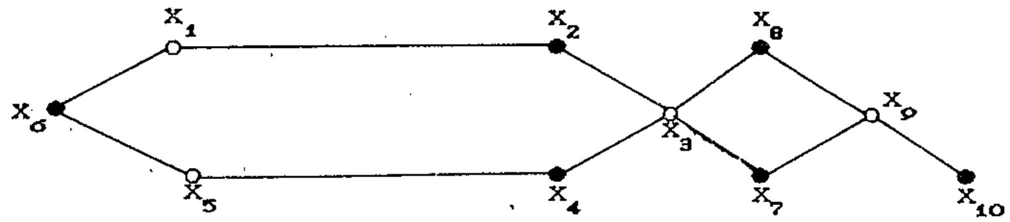
Definisi 2.12. :

Jika suatu graph tanpa sikel ganjil memiliki partisi (A,B) dari titik-titiknya ke dalam dua himpunan stabil A dan B, maka partisi yang demikian dikatakan sebagai **pewarnaan dua warna** (*bicolouring*) dari titik-titiknya.

Contoh 2.11. :

Graph G di bawah ini graph tanpa sikel ganjil :

$G = (X,E)$:



gambar 2.9.

Graph G di atas terdapat sikel masing-masing (x_3,x_8,x_9,x_7,x_3) dan $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_1)$ dengan panjang genap. Oleh karena itu titik-titik pada graph G di atas dapat dibentuk partisi yang terdiri dari himpunan stabil $A = \{x_1,x_3,x_5,x_9\}$ dengan warna putih dan himpunan stabil $B = \{x_2,x_4,x_6,x_8,x_7,x_{10}\}$ dengan warna hitam, sehingga partisi (A,B) dikatakan sebagai bicolouring terhadap titik-titik pada graph G.

Lemma 2.1. :

Jika G adalah suatu tree dan (A,B) adalah suatu bicolouring dari titik-titiknya dengan $|A| \leq |B|$, maka graph G mempunyai sedikitnya satu titik pendan pada B.

Bukti :

Andaikan bahwa semua titik pendan dari G berada dalam A. Misal $A_1 \subset A$ adalah himpunan titik pendan, $B_1 \subset B$ adalah himpunan titik pendan dari tree G_{X-A_1}, $A_2 \subset A$ adalah himpunan titik pendan dari tree $G_{X-A_1-B_1}$, dan seterusnya.

Diperoleh $|A_1| \geq |B_1|$, karena setiap titik pendan dari G_{X-A_1} bukan pendan dalam G, dan dapat dipetakan pada salah satu dari titik-titik persekitaran dalam A_1 dengan satu masukan. Demikian pula $|B_1| \geq |A_2|$, dan seterusnya.

Jadi dapat ditulis,

$$|A_1| \geq |B_1| \geq |A_2| \geq |B_2| \geq \ldots \geq |B_q| \geq |A_{q+1}|,$$

$$B_q \neq \emptyset \text{ dan } B_{q+1} = \emptyset.$$

Akan diselidiki dua kasus, yaitu :

- Jika $A_{q+1} \neq \emptyset$, maka diperoleh

$$|A| > \sum_{i=1}^{q} |A_i| \geq \sum_{i=1}^{q} |B_i| = |B|.$$

- Jika $A_{q+1} = \emptyset$, maka himpunan B_q menjadi titik tunggal (bukan titik pendan dalam $G_{A_q \cup B_q}$).

Jadi $|A_q| > |B_q|$, dan

$$|A| = \sum_{i=1}^{q} |A_i| > \sum_{i=1}^{q} |B_i| = |B|.$$

Dalam dua kasus di atas terjadi kontradiksi. Pengandaian harus diingkar, dan yang benar bahwa dalam G terdapat sedikitnya satu titik pendan berada dalam B. ■

Lemma 2.2. :

Misal G adalah suatu tree dengan order n dan (A,B) adalah suatu bicolouring terhadap titik-titiknya, sedemikian sehingga $|A| = |B|$ atau $|A| = |B| + 1$. Maka terdapat suatu alternating sequence $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$ yang menggunakan setiap titik dari graph G tepat satu kali.

Bukti :

Dalam hal ini akan dibuktikan dengan hipotesa induksi matematika, yaitu :

- n = 1, dalam G terdapat satu titik, yaitu $a_1 \in A$ dengan $|A| = |B| + 1 \rightarrow |\{a_1\}| = |\emptyset| + 1 \rightarrow 1 = 0 + 1 \rightarrow 1 = 1.$

  Jadi alternating sequencenya berupa : $\sigma = (a_1)$.

- $n = 2$, dalam G terdapat $a_1 \in A$ dan $b_1 \in B$ dengan $|A| = |B| = |\{a_1\}| = |\{b_1\}| \rightarrow 1 = 1$. Jadi alternating sequencenya berupa : $\sigma = (a_1, b_1)$.

...

- $n = 2k$, dalam G terdapat $2k$ titik, yaitu $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ dengan $|A| = |B| \rightarrow |\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}| = |\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}| \rightarrow k = k$. Jadi alternating sequencenya berupa : $\sigma = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k)$.
- $n = 2k + 1$, dalam G terdapat $2k + 1$ titik, yaitu $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \in A$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ (menurut lemma 2.1, a_{k+1} berada dalam A) dengan $|A| = |B| + 1 \rightarrow |\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}| = |\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}| + 1 \rightarrow k + 1 = k + 1 > k$.

Untuk graph $G_{X-\{a_{k+1}\}}$ terdapat alternating sequence $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, b_k)$ yang memuat semua titik dari A dan B, dan dengan hipotesa induksi diperoleh alternating sequence yang dikehendaki, yaitu $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, b_k, a_{k+1})$. ∎

Teorema 3.1. :

Suatu himpunan stabil B adalah maksimum, jika dan hanya jika tidak ada alternating sequence maksimal dengan panjang ganjil.

Bukti :

1. Jika suatu alternating sequence, yaitu σ (ada), maka B bukan himpunan stabil maksimum, karena $B' = (B - \sigma) \cup (\sigma - B)$ adalah suatu himpunan stabil dengan jumlah anggota terbesar.

2. Misal A adalah himpunan stabil maksimum dan misal B adalah himpunan stabil dengan $|B| < |A|$.

Akan diperlihatkan bahwa terdapat suatu alternating sequence maksimal dengan panjang ganjil yang relatif ke B. Misal $B_o = B - A$ dan $A_o = A - B$, sehingga $|B_o| < |A_o|$.

Misal $A_1 \cup B_1$, $A_2 \cup B_2, \ldots,$ $A_k \cup B_k$ adalah komponen-komponen terhubung dari subgraph $G_{A_o \cup B_o}$, sedangkan $A_i \subset A$ dan $B_i \subset B$, untuk $i=1,2,\ldots,k$.

Jadi $\Sigma |B_i| = |B_o| < |A_o| = \Sigma |A_i|$, terdapat suatu indeks i dengan $|B_i|<|A_i|$.

Misal i = 1, jika $|B_1| < |A_1| \Rightarrow |B_1| + 1 = |A_1|$, maka spanning tree dari subgraph terhubung $G_{A_1 \cup B_1}$ mempunyai bicolouring (A_1, B_1).

Menurut lemma 2.2, titik-titiknya membentuk alternating sequence maksimal dengan panjang ganjil, yaitu σ yang relative ke B_1, sehingga barisan σ merupakan alternating sequence relative ke B untuk G.

Selanjutnya barisan σ adalah alternating sequence maksimal, sebab $b \in B - \sigma$, maka salah satunya $b \in B\text{-}A = B_o$ dan b tidak adjacent dengan $a_i \in \sigma$, atau $b \in B \cap A$ dan b tidak adjacent dengan $a_i \in \sigma$ (karena A adalah himpunan stabil).

Jika $|B_1| + 1 < |A_1|$, maka titik-titik pendan dapat dihapus dari spanning tree $G_{A_1 \cup B_1}$, sampai tree yang tersisa mempunyai bicolouring (A_1', B_1) dengan $|B_1| + 1 = |A_1'|$, menurut lemma 2.1 titik-titik merupakan barisan σ yang dikehendaki.

■