BAB II

KONSEP PEMROGRAMAN LINIER DAN DASAR RANTAI MARKOV

2.1. PEMROGRAMAN LINIER

Bagian yang umum dari Pemrograman Linier dalam beberapa keadaan adalah sebuah keharusan untuk memberi sumber alokasi dari aktifitas. Pemrograman Linier dengan menggunakan model matematika untuk menggambarkan masalah yang sesuai. Sifat linier disini berarti bahwa semua fungsi matematika dalam model ini menjadi fungsi linier. Sedang kata program yang dimaksud adalah sebagai sebuah perencanaan, sehingga Program Linier menyertakan rencana dari aktifitas untuk mendapat akibat yang optimal dari alternatif yang memungkinkan.

Pada Pemrograman Linier dimisalkan dengan melihat tabel sebagai berikut:

Sumber	Sumber yang digunakan setiap unit dari aktifitas				
	Aktifitas				Banyaknya sumber yang sesuai
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
ΔZ/unit dr aktifitas	c_1	c_2	...	c_n	
Level dari aktifitas	x_1	x_2	...	x_n	

dimana untuk aktifitas j (j = 1, 2, ..., n) c_j berkurang dalam Z yang akan mengakibatkan untuk beberapa unit dari x_j berkurang (level dari aktifitas j). Untuk sumber i (i = 1, 2, ..., m) b_i adalah banyaknya alokasi yang memungkinkan dari aktifitas. Akhirnya, a_{ij} adalah banyaknya sumber i yang dikonsumsikan dengan beberapa unit dari aktifitas j (untuk i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n). Himpunan dari data (a_{ij} , b_i dan c_j) merupakan parameter-parameter dengan masukan konstan dari model pemrograman linier.

Atau untuk lebih jelasnya dengan mengikuti model sebagai berikut:

$$\text{Optimal } f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{dengan kendala } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

dimana: f adalah fungsi obyektif

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel-variabel keputusan

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah koefisien variabel keputusan dalam fungsi obyektif

b_i adalah konstanta kendala ke i.

2.1.1. Bentuk Pemrograman Linier

Dari model matematika dapat dibuat model umum dari sumber alokasi aktifitas dimana model ini untuk memilih nilai dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (variabel dari keputusan) sebagai berikut:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

dengan kendala

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \leq b_1$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \leq b_2$$

$$\begin{array}{ccccc} . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \end{array}$$

$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n \leq b_m$$

dan $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

Fungsi yang dimaksimalkan adalah $Z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n$ disebut *Fungsi Obyektif.* Juga terdapat model-model lain untuk menyelesaikan pemrograman linier untuk masalah yang sesuai yang mana bisa digunakan bersama-sama asalkan masih merupakan model pemrograman linier , yaitu:

1. Meminimalkan fungsi obyektif akan lebih baik untuk masalah yang menyangkut biaya, waktu dan jarak daripada memaksimalkannya,

   Minimalkan $Z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n$

2. Beberapa fungsi kendala yang lebih besar atau sama dengan pertidaksamaan:

   $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n \geq b_i$, untuk semua nilai i.

3. Beberapa fungsi kendala dalam persamaan :

   $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n = b_i$, untuk semua nilai i.

4. Menghapus kendala non negatif untuk beberapa variabel keputusan (x_j tidak terbatas dalam tanda untuk semua j).

Kemudian dari beberapa spesifikasi dari nilai untuk variabel keputusan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

yang disebut *Penyelesaian,* terdapat tipe-tipe yang berbeda dari penyelesaian karena identifikasi dari sifat-sifat yang sesuai dengan variabel keputusan, yaitu:

1. *Feasible Solution (penyelesaian yang dapat dijalankan)* adalah penyelesaian yang mana untuk semua kendalanya dapat memenuhi pertidaksamaan.
2. *Feasible Region (daerah yang dapat dijalankan)* adalah koleksi dari semua penyelesaian yang dapat dijalankan.

Dari penyelesaian ini dimaksudkan untuk memperoleh *penyelesaian optimal* yaitu penyelesaian yang dapat dijalankan yang mempunyai nilai favorit (nilai terbesar atau nilai terkecil) bergantung dari fungsi obyektif (maksimal atau minimal).

2.1.2 Asumsi Pemrograman Linier

Dalam pemrograman linier terdapat asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Asumsi perbandingan (proportionality) dimana jika x_j digandakan maka fungsi obyektif ($c_j x_j$) dan masing-masing dari ($a_{ij} x_j$) akan digandakan.
2. Asumsi penjumlahan (additivity) dimana biaya total merupakan jumlah biaya dari masing-masing variabel keputusan.
3. Asumsi dapat dibagi (divisibility) dimana variabel keputusan dapat dibagi menjadi tingkatan pecahan yang diinginkan.
4. Asumsi ketidaknegatifan (nonnegative) dimana variabel-variabel keputusan dibatasi untuk nilai-nilai yang lebih besar atau sama dengan nol.

2.2. PROSES STOKHASTIK

Pada kehidupan sehari-hari sejumlah percobaan dilakukan tidak hanya dalam satu kali pengamatan melainkan butuh sederetan pengamatan yang berturut-turut. Biasanya didalam setiap pengamatan suatu percobaan bergantung pada beberapa pengamatan atau semua pengamatan di masa lalu, dan ada beberapa hasil pengamatan yang dapat ditentukan dengan menggunakan teori probabilitas. Studi tentang percobaan dalam bentuk ini dikenal dengan *Proses Stokhastik.*

Beberapa istilah yang akan digunakan dalam definisi Proses Stokhastik adalah sebagai berikut:

Ruang Sampel: himpunan semua hasil yang mungkin pada suatu percobaan.

Variabel Acak: suatu fungsi yang memetakkan sebuah elemen dari suatu ruang sampel ke satu dan hanya satu bilangan real.

Definisi 2.2.1:

Suatu *Proses Stokhastik* adalah sebuah koleksi berindeks dari variabel acak $\{X_t, t \geq 0\}$.

Jika terdapat sebagian besar elemen himpunan terhitung atau merupakan himpunan bilangan bulat tidak negatif , dinotasikan X_1, X_2, X_3, ... disebut *proses dengan waktu diskret (discrete-time process)* dan jika sebagian besar elemen tidak terhitung atau merupakan interval bilangan real, dinotasikan $(X_t;\ t \geq 0)$ disebut *proses dengan waktu* *kontinu (comtinous-time process).* Untuk pembahasan selanjutnya, penulis hanya akan membahas proses stokhastik dengan waktu diskret.

Definisi 2.2.2:

Himpunan nilai-nilai yang berbeda dari elemen-elemen ruang sampel yang diasumsikan dalam Proses Stokhastik disebut *Ruang Keadaan (state).*

Jika ruang keadaan (state) dari suatu proses stokhastik terhitung atau berhingga maka proses disebut sebagai *rantai.*

2.3. RANTAI MARKOV

Keadaan khusus dari Proses Stokhastik dimana dalam suatu percobaan hasil suatu pengamatan tertentu akan bergantung hanya pada hasil pengamatan tepat sebelumnya dan selanjutnya akan mempengaruhi hanya hasil pengamatan berikutnya disebut sebagai *Rantai Markov.*

Definisi 2.3.1:

Suatu Proses Stokhastik $\{X_w\}$, w= 1, 2, ... dengan ruang keadaan s = (1, 2, 3, ...) dikatakan memenuhi *Sifat Markov* jika untuk setiap w dan semua keadaan i_1, i_2, i_3, ..., i_t berlaku:

$$P(X_w = i_w \mid X_{w-1} = i_{w-1}, X_{w-2} = i_{w-2}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_t = i_t \mid X_{t-1} = i_{t-1})$$

Sifat Markov ini sama dengan menyatakan bahwa probabilitas bersyarat dari sembarang kejadian yang akan datang, atau kejadian yang akan datang dari suatu proses tergantung atas keadaan sekarang.

Contoh:

Gerakan dari tikus di Mazc (tempat yang menyesatkan), diasumsikan tikus bergerak dari suatu ruangan ke ruangan yang lain dengan memilih pintu secara acak, dimana salah satu dari pintu itu berguna baginya. Tikus akan memilih ruangan dalam waktu tertentu dengan $w = 1, 2, \ldots$ dan X_w merupakan nomor dari ruangan yang ditempati oleh tikus pada waktu t. Ruang keadaan dalam masalah ini adalah s = (1, 2, ..., 9) dari asumsi yang dibuat, jelas bahwa kemungkinan tikus pergi ke ruangan i_t pada waktu w hanya tergantung pada tempatnya saat waktu w-1. Dari sini $\{X_w\}$ memenuhi sifat Markov.

Definisi 2.3.2:

Jika untuk setiap i dan j berlaku:

$$P(X_{w+1} = j \mid X_w = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i), \text{ untuk semua } w = 0, 1, \ldots$$

maka probabilitas transisi satu langkah dikatakan *stasioner* dan dilambangkan dengan p_{ij}.

Contoh:

Misalkan ada sebuah mesin yang memproduksi bagian secara sendiri-sendiri dengan kecepatan satu tiap menit. Didefinisikan X_w merupakan nilai untuk produksi yang tidak sempurna pada waktu w. Jika kemungkinan dari produksi barang-barang yang tidak sempurna tidak mempengaruhi hidup mesin, maka X_w akan disebut rantai Markov stasioner. Tetapi jika kemampuan dari produksi yang tidak sempurna mempengaruhi hidup mesin untuk waktu selanjutnya maka dapat dikatakan sebagai Rantai Markov non-stasioner.

2.3.1. Matrik Probabilitas Transisi

Dalam Rantai Markov Stasioner, probabilitas transisi dinotasikan dengan $P(X_{w+n} = j \mid X_w = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$ untuk w = 0, 1, ... Jika didefinisikan $p_{ij}^{(n)}$ sebagai probabilitas dari keadaan i ke keadaan j pada langkah ke-n maka untuk suatu rantai stasioner ketergantungan pada n dapat diabaikan dan p_{ij} dapat digunakan untuk notasi probabilitas dari keadaan i ke keadaan j. p_{ij} adalah suatu probabilitas bersyarat yaitu probabilitas bahwa variabel acak X bermula pada keadaan i akan berada pada keadaan j pada langkah berikutnya jika diketahui probabilitas proses berada dalam keadaan i. Probabilitas bersyarat ini biasanya disebut *Probabilitas Transisi.*

Arti Probabilitas Transisi Stasioner secara tidak langsung menyatakan bahwa probabilitas transisi tidak berubah dalam waktu (tidak tergantung parameterw). Karena p_{ij} merupakan probabilitas bersyarat maka harus memenuhi sifat:

1 $0 \leq p_{ij} \leq 1$ untuk semua i dan j

2 $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ untuk semua i

Dan keduanya ditunjukkan sebagai berikut:

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = P[X_k = 1 \mid X_{k-1} = i] + P[X_k = 2 \mid X_{k-1} = i] + \dots + P[X_k = n \mid X_{k-1} = i]$$

$$= P[(X_k = 1) \cup (X_k = 2) \cup \dots \cup (X_k = n) \mid X_{k-1} = i]$$

$$= P[X_k \in s \mid X_{k-1} = i]$$

$$= 1$$

Untuk probabilitas bersyarat dari variabel acak X yang dimulai dari keadaan i akan menjadi keadaan j setelah n-langkah dan selama proses membuat transisi ke dalam beberapa keadaan ($p_{ij}^{(n)}$), harus memenuhi:

1. $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ untuk semua i = j = n = 0, 1, ...
2. $\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1$ untuk semua i = n = 0, 1, ...

Notasi yang digunakan untuk menyatakan probabilitas transisi dapat juga digambarkan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$P^{(n)} =$

keadaan	0	1	...	M
0	$p_{00}^{(n)}$	$p_{01}^{(n)}$	...	$p_{0M}^{(n)}$
1	$p_{10}^{(n)}$	$p_{11}^{(n)}$	...	$p_{1M}^{(n)}$
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
M	$p_{M0}^{(n)}$	$p_{M1}^{(n)}$	...	$p_{MM}^{(n)}$

untuk n = 0, 1, ...

ekivalen dengan:

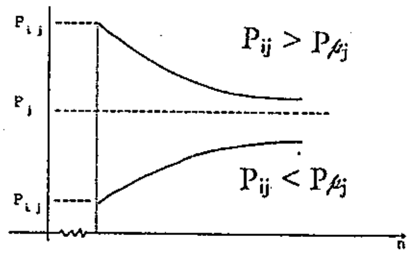
$$
P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1M}^{(n)} \\ . & . & \cdots & . \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \cdots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix}
$$

Dengan demikian proses stokhastik $\{X_t\}$ dengan t = 0, 1, 2, ... disebut Rantai Markov dengan keadaan hingga jika mempunyai:

1. Tahap berjumlah hingga dari keadaan.
2. Bersifat Markov.
3. Probabilitas transisi stasioner.
4. Suatu himpunan probabilitas awal $\{X_0 = i\}$untuk semua i.

2.3.2. Probabilitas Keadaan Tetap

Probabilitas setiap keadaan dimasa yang akan datang akan menjadi tidak tergantung dari keadaan awal (keadaan sekarang), bahkan peluang ini akan menuju satu harga yang mantap atau keadaan tetap (steady state) yang dinotasikan π_j baik dari arah atas (bila $P_{ij} > P\pi_j$) atau dari arah bawah (bila $P_{ij} < P\pi_j$) yang dapat diperhatikan dari gambar berikut:



Gambar: Probabilitas keadaan tetap

Probabilitas keadaan tetap (steady state) mengandung arti bahwa probabilitas menemukan proses dalam keadaan tertentu, sebut j, setelah sejumlah besar transisi cenderung menuju nilai π_j yang tidak tergantung pada distribusi probabilitas awal yang didefinisikan atas keadaan-keadaan dari suatu rantai Markov. Probabilitas keadaan tetap tidak berarti bahwa proses menetap pada satu keadaan. Sebaliknya proses berlanjut terus membuat transisi-transisi dari keadaan ke keadaan lainnya pada setiap langkah n, probabilitas transisi dari i ke j tetap p_{ij}. Lebih jelasnya jika keadaan-keadaan dari rantai Markov mempunyai matrik probabilitas transisi $P = [P_{ij}]$ dimana i dan j adalah keadaan-keadaan dalam rantai Markov dan jika ada π_j sedemikian sehingga:

$$\pi_j > 0, \text{ untuk } j = 0, 1, \ldots, M$$

$$\pi_j = \sum_{j=0}^{M} \pi_i \, p_{ij}, \text{ untuk } j = 0, 1, \ldots, M$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

maka disebut *probabilitas keadaan tetap* dari rantai Markov

Persamaan keadaan tetap ini mengandung (M + 1) persamaan dalam M keadaan, disebabkan mempunyai solusi yang unik, sehingga paling sedikit satu persamaan haruslah berlebih dan dengan demikian dapat diabaikan.

Contoh:

Misalkan akan diramalkan keadaan cuaca yang terdiri dari 2 keadaan yaitu keadaan 1 jika hari hujan dan keadaan 2 jika hari cerah. Pengamatan dilakukan dan diperoleh bahwa jika hari hujan maka terdapat probabilitas 0,50 akan tetap hujan dan 0,50 untuk menjadi cerah keesokan harinya. Sedangkan jika hari cerah, maka probabilitas hari hujan keesokan harinya 0,25 dan probabilitas hari cerah 0,75. Probabilitas transisi p_{ij} dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$$

Misal keadaan hari ini adalah hujan, keadaan ini merupakan probabilitas awal (n = 0) yang juga harus memenuhi $\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1$, untuk j = 0, 1, ..., M .

Berarti $p_{11}^{(0)} = 1$ dan $p_{12}^{(0)} = 0$ atau $P^{(0)} = [\,1 \quad 0\,]$.

Akan diramalkan keadaan cuaca minggu yang akan datang dengan melakukan perhitungan untuk 7 hari berikutnya, sebagai berikut:

$$P^{(1)} = [1 \qquad 0] \begin{bmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} = [\,0,50 \quad 0,50\,]$$

$$P^{(2)} = [0,50 \quad 0,50] \begin{bmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} = [\,0,375 \quad 0,625\,]$$

dst yang dalam tabel diperoleh:

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
$P^{(1)}$	1	0,50	0,375	0,34375	0,33594	0,33398	0,33350	0,33337
$P^{(2)}$	0	0,50	0,625	0,65625	0,66404	0,66602	0,66650	0,66662

Dari tabel dapat dilihat bahwa probabilitas untuk keadaan 1 (hari hujan) mendekati 0,3333 dan probabilitas keadaan 2 (hari cerah) mendekati 0,66667.

Hasil yang sama akan diperoleh untuk $P^{(0)} = [\ 0 \quad 1\ ]$.

Probabilitas inilah yang disebut sebagai probabilitas keadaan tetap.

Selanjutnya untuk matrik probabilitas transisi n-langkah $P_{ij}^{(n)}$ jika n menuju tak hingga $\left(\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}\right)$ maka matrik probabilitas transisi tersebut akan memiliki baris dengan elemen-elemen yang identik, artinya sistem berada dalam keadaan j setelah sejumlah besar transisi dan probabilitas ini tidak tergantung dari keadaan awal i.

Dapat dituliskan, jika P adalah matrik probabilitas transisi dari Rantai Markov m-keadaan yang berhingga, tak tereduksi, dan tidak periodik, maka :

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \mathcal{P} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ \cdot \\ p \end{bmatrix}$$

dimana $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1})$ dengan $0 < p_j < 1$ dan $\sum_{j=0}^{m-1} p_j = 1$.

Selanjutnya akan diberikan definisi dan teorema yang bersesuaian sebagai berikut:

Definisi 2.3.2.1:

Misal $p = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1})$ adalah sebuah vektor probabilitas sedemikian sehingga :

$$\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$$

Maka distribusi probabilitas $\{p_i\}$ dikatakan stasioner jika sebuah Rantai Markov m keadaan dengan matrik probabilitas transisi P, didapat: p = p P dan dengan berlaku induksi maka berlaku $p = p\,P^n$.

Teorema 2.3.2.1:

Jika P adalah matrik probabilitas transisi rantai Markov m keadaan hingga, tidak tereduksi, dan tidak periodik maka ada sebuah vektor probabilitas yang unik $\not{p}$ = $(\not{p}_0, \not{p}_1, \ldots, \not{p}_{m-1})$ sedemikian sehingga: $\sum_{j=0}^{m-1} \not{p}_j = 1$

dan $\mathcal{P}\,P = \mathcal{P}$ dan $P\,\mathcal{P} = \mathcal{P}$

dimana $\mathcal{P}$ adalah matrik dengan m baris yang identik (masing-masing diwakili oleh $\not{p}$). Vektor probabilitas $\not{p}$ memberikan distribusi stasioner pada proses.

Bukti:

Dari pernyataan diatas dimana $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)} = \mathcal{P}$

maka $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n+1)} = \mathcal{P}$ atau $\lim\limits_{n\to\infty} P^{n} P = \mathcal{P}$

sehingga $\mathcal{P}\ P = \mathcal{P}$ (terbukti)

Dengan cara yang sama untuk $\lim\limits_{n\to\infty} P P^{n} = \mathcal{P}$ maka $P\,\mathcal{P} = \mathcal{P}$. (terbukti)

Akhirnya apabila $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_j = \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = j) = \not{p}_j$ ada maka Rantai Markov akan dikatakan *Ergodik*.

Juga apabila $\underset{n\to\infty}{Lim}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right\} = p_j$ yang dapat mengakibatkan untuk memperkiraan biaya (atau fungsi denda lainnya) $C\{X_t\}$ yang dalam hal ini merupakan biaya yang dihabiskan ketika proses dalam keadaan X_t pada waktu t (t = 0, 1, ...), $C\{X_t\}$ disini merupakan variabel acak dan merupakan fungsi yang bebas terhadap t, dengan nilai ekspektasi sebagai berikut:

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right]$$

sehingga ekspektasi biaya rata-rata tiap unit waktu adalah:

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right]\right\} = \sum_{j=0}^{M} p_j C(j)$$

2.3.3. Persamaan Chapman-Kolmogorov

Persamaan Chapman-Kolmogrov adalah suatu metode yang digunakan untuk menghubungkan probabilitas transisi dari langkah yang berurut atau persamaan yang menyediakan sebuah metode untuk menghitung probabilitas transisi n-langkah. Sebelumnya perlu diketahui pengertian-pengertian dari probabilitas transisi sebagai berikut:

$p_{ij}^{(n)}$ adalah probabilitas yang menyatakan bahwa Rantai Markov akan bergerak dari keadaan i ke keadaan j dalam n langkah dengan diketahui sebelumnya telah berada dalam keadaan i.

$p_{ik}^{(v)}$ adalah probabilitas yang menyatakan bahwa Rantai Markov bergerak dari keadaan i ke keadaan k dalam v langkah dengan diketahui sebelumnya telah berada dalam keadaan i.

$p_{kj}^{(n-v)}$ adalah probabilitas yang menyatakan bahwa Rantai Markov bergerak dari keadaan k ke keadaan j dalam (n - v) langkah dengan diketahui sebelumnya telah berada dalam keadaan k.

Dari pengertian tersebut, maka Persamaan Chapman-Kolmogorov dinyatakan sebagai berikut:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(v)}\, p_{kj}^{(n-v)} \qquad \text{untuk semua i, j, n dan } 0 < v < n$$

Bukti: $p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j \mid X_0 = i]$

$$= P[X_n = j \mid X_{n-1} = k, \ldots, X_v = k, \ldots, X_0 = i]$$

$$= \sum_{k=0}^{M} P[X_n = j \mid X_v = k]\, P[X_v = k \mid X_0 = i]$$

$$= \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(v)}\, p_{kj}^{(n-v)} \quad \text{(terbukti)}$$

Persamaan ini menunjukkan perpindahan keadaan i akan menjadi keadaan j setelah n langkah, dimana sebelumnya proses akan berada dalam keadaan k setelah tepat v (v < n) langkah.

2.4. RANTAI MARKOV YANG ERGODIK

Probabilitas-probabilitas transisi dihubungkan dengan keadaan-keadaan yang memainkan peranan penting dalam mempelajari rantai Markov. Sebelum membahas rantai Markov yang ergodik akan diberikan beberapa definisi dari keadaan-keadaan yang dihadirkan untuk menjelaskan sifat-sifat Rantai Markov yang mendasari sebuah rantai Markov disebut ergodik.

Definisi 2.4.1:

Keadaan j dikatakan *accessible (dapat diperoleh)* dari keadaan i jika $p_{ij}^{(n)} > 0$ untuk beberapa $n \geq 0$.

Berarti keadaan j dapat diperoleh dari keadaan i dalam sejumlah hingga langkah jika dan hanya jika ada kemungkinan dari sistem untuk memasuki keadaan j yang berawal dari keadaan i.

Definisi 2.4.2:

Jika keadaan j dapat diperoleh dari keadaan i dan sebaliknya keadaan i dapat diperoleh dari keadaan j, maka keadaan i dan j dikatakan *communicate (berkomunikasi)*.

Dari definisi 2.4.2 diatas diperoleh sifat-sifat berkomunikasi yang secara umum sebagai berikut:

1. Sembarang keadaan akan berkomunikasi dengan keadaannya sendiri (*sifat refleksif*).

   Bukti: $p_{ii}^{(n)} = P[X_0 = i \mid X_0 = i] = 1$

2. Jika keadaan i berkomunikasi dengan keadaan j maka keadaan j berkomunikasi dengan keadaan i (*sifat simetris*).

3. Jika keadaan i berkomunikasi dengan keadaan j dan keadaan j berkomunikasi dengan keadaan k, maka keadaan i berkomunikasi dengan keadaan k (*sifat transitif*).

   Bukti:

   $i \to j$, $j \to k$, terdapat $m \geq 1$, $n \geq 1$ sedemikian sehingga $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{jk}^{(n)} > 0$.

   Dengan menggunakan persamaan Chapman-Kolmogorov sebagai berikut:

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{il}^{(m)}\, p_{lk}^{(n)}$$

$$= p_{ij}^{(m)}\, p_{jk}^{(n)} + \sum_{i \neq j} p_{il}^{(m)}\, p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)}\, p_{jk}^{(n)} > 0$$

   Sehingga $i \to k$.

Ketiga sifat tersebut sesuai dengan *Hubungan Ekuivalen* yang mengakibatkan ruang keadaan dapat dibagi / dipartisi kedalam kelas-kelas yang terpisah dengan dua keadaan yang saling berkomunikasi asalkan berada dari kelas yang sama. Dengan demikian keadaan-keadaan dari Rantai Markov mengandung satu atau lebih kelas-kelas yang disjoint (terpisah), satu kelas dapat terdiri dari satu keadaan tunggal.

<u>Definisi 2.4.3:</u>

Jika sebuah Rantai Markov, semua keadaannya berasal dari satu kelas yang sama maka Rantai Markov tersebut dikatakan *irreducible (tak tereduksi).*

Untuk sebuah proses yang dimulai dari keadaan i dan akan kembali ke i, terdapat persamaan sebagai berikut:

$$f_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

dimana: f_{ii}^{*} = probabilitas bahwa proses dimulai dari keadaan i kembali ke keadaan i terjadi dalam waktu berhingga.

$f_{ii}^{(n)}$ = probabilitas bahwa proses dimulai dari keadaan i kembali ke keadaan i setelah n langkah pertama.

Definisi 2.4.4:

Sebuah keadaan i dikatakan *recurrent (berulang)* jika dan hanya jika proses dimulai dari keadaan i dan akhirnya kembali ke keadaan i, $f_{ii}^{*} = 1$.

Terdapat bentuk khusus dari keadaan berulang, dimana sebuah keadaan i dikatakan *absorbing state (keadaan penyerapan)* jika dan hanya jika probabilitas transisi satu langkah dari keadaan i menuju keadaan i sama dengan 1 ($p_{ii} = 1$). Juga terdapat sifat dari Rantai Markov yang berkaitan dengan keadaan berulang.

Misalkan $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$

dimana μ_i adalah rata-rata berulangnya waktu dari keadaan i (berulangnya waktu adalah jumlah langkah yang diperlukan oleh sebuah proses kembali pertama kali ke keadaan yang sama).

Sebuah keadaan berulang dapat digolongkan menjadi:

1. Sebuah keadaan berulang i disebut *null recurrent (berulang nol)* jika dan hanya jika rata-rata waktu berulang dari keadaan i adalah tak hingga, $\mu_i = \infty$.
2. Sebuah keadaan berulang i disebut *positive recurrent (berulang positif)* jika dan hanya jika rata-rata waktu berulang dari keadaan i adalah berhingga, $\mu_i < \infty$.

Lemma 2.4.1:

Untuk sebuah Rantai Markov keadaan hingga, semua keadaan berulang dari i adalah berulang positif.

Bukti:

Keadaan i berulang, maka $f_{ii}^* = 1$. Karena Rantai Markov mempunyai keadan berhingga, maka waktu untuk setiap keadaan kembali ke keadaan semula menjadi berhingga.

Definisi 2.4.5:

Sebuah keadaan i dikatakan *transient (sementara)* jika dan hanya jika proses dimulai dari keadaan i, ada probabilitas positif yang keluar dari keadaan ini sehingga proses ak hirnya tidak kembali ke keadaan i, $f_{ii}^* < 1$.

Dari definisi 2.4.4 dan 2.4.5 menerangkan dimana dalam rantai Markov dengan keadaan hingga, anggota kelas adalah semuanya keadaan transient (sementara) atau semuanya keadaan positif recurrent (berulang positif). Banyak rantai Markov yang digunakan sehari-hari mengandung keadaan yang semuanya berkomunikasi satu sama lain. Rantai Markov tak tereduksi ini mengandung hanya keadaan yang berulang positif. Untuk menentukan apakah semua keadaan dalam suatu rantai berkomunikasi satu sama lain, perlu diperlihatkan bahwa terdapat suatu nilai dari n yang tidak tergantung dari i dan j dimana $P_{ij}^{(n)} > 0$ untuk semua i dan j.

Definisi 2.4.6:

Suatu keadaan i dikatakan mempunyai *periodecities (keperiodikan)* t (t > 1) jika $P_{ii}^{(n)} = 0$, n tidak didapat dalam t dan t adalah bilangan bulat positif terbesar.

Dapat dikatakan bahwa keadaan i faktor terbesar dari semua bilangan bulat $n \geq 1$ dimana $P_{ij}^{(n)} > 0$. Jika periode dari keadaan i adalah 1 maka i disebut *tidak periodik.* Sebagai contoh, ada kemungkinan proses memasuki keadaan i hanya pada waktu 0, 2, 4, dan seterusnya dimana keadaan ini mempunyai periode 2. Jika terdapat 2 bilangan berurutan s dan (s + 1) sedemikian sehingga proses akan berada pada titik 1 pada waktu s dan (s + 1), keadaan disebut mempunyai periode 1 dan disebut keadaan tidak periodik.

Berdasarkan sifat-sifat Rantai Markov diatas, maka untuk sebuah keadaan yang tak tereduksi (irreducible), berulang positif (positive recurrent) dan tidak periodik (aperiodic) disebut keadaan *Ergodik.*

<u>*Contoh:*</u>

Misalkan sebuah rantai Markov mempunyai matrik probabillitas transisi dari penelitian atas sampel-sampel produksi kopi sebagai berikut:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0,66 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sesuai dengan sifat-sifat rantai Markov:

1. Dapat diperoleh (acessible).

   Keadaan 2 dapat diperoleh dari keadaan 2 dan 3 dan keadaan 4 tidak dapat diperoleh dari keadaan 0. 1, 2, 3, 4.

2. Berkomunikasi (communicate).

   Keadaan 0 dan keadaan 1 saling berkomunikasi dan keadaan 2 dan keadaan 4 tidak berkomunikasi.

3. Tak tereduksi (irreducible).

   Matrik probabilitas transisi satu langkah dari produk kopi diatas adalah tak tereduksi karena berada dalam satu kelas yang sama.

4. Berulang (recurrent).

Keadaan 0 dan keadaan 1 adalah keadaan berulang. Untuk menunjukkan $f_{00} = 1$ dan $f_{11} = 1$ dengan menggambarkan matrik probabilitas transisi P^n sebagai berikut:

$$P^n = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana simbol * mewakili bilangan positif.

Untuk proses dalam keadaan 0 maka akan kembali ke keadaan 0 (mungkin melalui keadaan 1) setelah beberapa langkah. Juga untuk keadaan 1, sekali proses berada dalam keadaan 1 maka akan kembali ke keadaan 1 (mungkin melalui keadaan 0) setelah beberapa langkah.

5. Sementara (transient).

Keadaan 3 dan keadaan 4 adalah keadaan sementara, karena sekali proses berada pada keadaan 3, terdapat probabilitas positif dimana proses tidak akan kembali ke keadaan 3. Probabilitas positif tersebut adalah 0,33 dimana proses akan meninggalkan keadaan 3 menuju keadaan 2 pada langkah pertama. Sekali proses berada pada keadaan 2 maka proses tersebut tidak akan meninggalkan keadaan 2. Sekali proses meninggalkan keadaan 4 maka proses tersebut tidak akan kembali ke keadaan 4.