BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. Logika Proposisi

2.1.1. Bahasa

Definisi 1 : (proposisi)

Proposisi adalah :

1.Simbol kebenaran : benar atau salah.

2.Simbol proposisi : P , Q , R , S , P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, R_2, S_2, ...

Definisi 2 : (kalimat dalam logika proposisi)

Untuk membentuk kalimat dalam logika proposisi, proposisi-proposisi dihubungkan dengan penghubung proposisi, yaitu : *tidak, atau, dan, jika....maka, jika dan hanya jika, jika....maka....jika tidak maka*

Aturan-aturan yang digunakan adalah :

1. Kalimat yang ada menggunakan simbol E, F, G, H.
2. Setiap proposisi merupakan kalimat.
3. Jika F kalimat maka negasinya, yaitu tidak F juga kalimat.
4. Jika F, G kalimat maka konjungsinya, yaitu (F dan G) juga kalimat.
5. Jika F, G kalimat maka disjungsinya, yaitu (F atau G) juga kalimat.

6. Jika F, G kalimat maka implikasinya, yaitu (jika F maka G) juga kalimat. F disebut anteseden dan G disebut konsekuen dari implikasi. Kalimat jika G maka F disebut konversi dari kalimat jika F maka G.
7. Jika F, G kalimat maka equivalensinya yaitu (F jika dan hanya jika G) juga kalimat. F disebut sisi bagian kiri dan G disebut sisi bagian kanan dari equivalensi.
8. Jika F, G, H kalimat maka (jika F maka G jika tidak maka H) juga kalimat. F,G dan H masing-masing merupakan anak kalimat dari *jika maka jika tidak maka* dari kondisional (jika F maka G jika tidak maka H).

Setiap kalimat yang digunakan untuk membentuk kalimat E memuat E itu sendiri yang merupakan sub kalimat dari E. Dengan demikian sub kalimat dari E adalah E itu sendiri, komponen E dan sub kalimat dari komponen-komponen tersebut. Sub kalimat dari kalimat E selain E itu sendiri merupakan sub kalimat sebenarnya dari E.

Pada kalimat yang panjang digunakan tanda kurung ( ), pasangan okalode [ ] dan pasangan kurawal { } dan untuk memperjelas struktur kalimat sering pula dilakukan pemutusan .

Contoh 1 (kalimat dalam logika proposisi) :

Kalimat E:

{{ tidak (P atau Q) } jika dan hanya jika { (tidak P) dan (tidak Q) }}.

Merupakan kalimat karena :

P kalimat

Q kalimat

(P atau Q), (tidak P) dan (tidak Q) merupakan kalimat

{tidak (P atau Q)} dan {(tidak P) dan (tidak Q)} merupakan kalimat

{{ tidak (P atau Q)} jika dan hanya jika {(tidak P) dan (tidak Q)}} juga merupakan kalimat

Delapan kalimat di atas merupakan sub kalimat dari E, tujuh kalimatnya (selain E) merupakan sub kalimat yang sebenarnya dari E.

2.1.2. Arti Sebuah Kalimat

Benar atau salahnya kalimat logika proposisi ditentukan oleh informasi-informasi tentang kebenaran dari proposisi-proposisi yang membentuk kalimat tersebut. Informasi-informasi tersebut diperoleh dari suatu interpretasi.

Definisi 3 : (interpretasi)

Suatu interpretasi memberikan nilai kebenaran *Benar* atau *Salah* pada setiap simbol-simbol proposisi.

I merupakan interpretasi suatu kalimat jika I memberi nilai kebenaran pada setiap simbol yang ada dalam kalimat tersebut dan I akan disebut interpretasi kosong untuk suatu kalimat jika I tidak memberi informasi lengkap sesuai proposisi pada kalimat.

Definisi 4 : (aturan semantik)

Nilai kebenaran dari E ditentukan sesuai aturan-aturan sebagai berikut :

1. Aturan proposisi

   Nilai kebenaran dari masing-masing proposisi sesuai dengan nilai pada E.

2. Aturan benar

   Kalimat benar bernilai benar terhadap I.

3. Aturan salah

   Kalimat salah bernilai salah terhadap I.

4. Aturan negasi

   Kalimat *tidak F* bernilai benar jika F bernilai salah, dan sebaliknya.

5. Aturan konjungsi

   Kalimat *F dan G* bernilai benar jika F dan G keduanya bernilai benar.

6. Aturan disjungsi

   Kalimat *F atau* G bernilai benar jika F atau G bernilai benar.

7. Aturan implikasi

   Kalimat *jika F maka G* bernilai salah jika F benar dan G salah.

8. Aturan equivalensi

   Kalimat *F jika dan hanya jika* G bernilai benar jika F dan G mempunyai nilai kebenaran yang sama.

9. Aturan bersyarat

   Kalimat *jika F maka G jika tidak maka H* mempunyai nilai kebenaran yang sesuai dengan G jika F benar. Sedang apabila F salah maka nilai kebenarannya sesuai nilai kebenaran dari H.

2.1.3. Sifat-sifat Kalimat

Definisi 5 : (absah, terpenuhi, kontradiksi, berakibat, setara, konsisten)

Kalimat F adalah absah bila F bernilai benar terhadap setiap interpretasi I untuk F.

Kalimat F disebut terpenuhi bila F bernilai benar terhadap suatu I untuk F.

Kalimat F disebut kontradiksi bila kalimat tersebut bernilai salah terhadap setiap interpretasi I untuk F.

Kalimat F disebut berakibat G bila F bernilai benar terhadap I, G juga bernilai benar terhadap I.

Kalimat *F dan* G disebut setara bila untuk setiap I, F dan G bernilai sama. F_1, F_2, F_3, ..., F_n disebut konsisten jika terdapat I sedemikian sehingga setiap F_i bernilai benar terhadap I.

Contoh 2 (terpenuhi tetapi tidak absah) :

Kalimat

jika P maka Q

untuk interpretasi yang memberi P benar dan Q benar, kalimat tersebut bernilai benar. Tetapi kalimat tersebut akan bernilai salah terhadap interpretasi yang memberi P nilai benar dan Q nilai salah, sehingga P terpenuhi tetapi tidak absah.

Contoh 3 (kontradiksi tetapi absah) :

Kalimat

jika (salah) maka tidak (salah) absah

tepat bila salah terhadap setiap I bernilai salah, tepat bila tidak (salah) bernilai benar untuk setiap I, tepat bila tidak (salah) absah.

Contoh 4 (berakibat, absah)

Kalimat

jika (F berakibat G)

maka (jika F maka G) absah.

F berakibat G, tepat bila untuk setiap I untuk F dan G, bila F benar maka G benar, tepat bila *jika F maka* G benar, tepat bila jika *F maka* G absah.

Contoh 5 (setara dan absah) :

Kalimat

jika *F dan* G setara

maka *F jika dan hanya jika* G absah.

F dan G setara, tepat bila F dan G memiliki nilai kebenaran yang sama, tepat bila F jika dan hanya jika G benar, tepat bila F jika dan hanya jika G absah.

Contoh 6 (konsisten dan absah) :

Kalimat

F_1 dan F_2 konsisten

Untuk setiap I jika F_1 : jika P maka Q dan F_2 : jika tidak (Q) maka tidak (P).

Maka tepat bila untuk setiap I yang memberi nilai P benar dan Q benar, F_1 bernilai benar, tepat bila untuk setiap I yang memberi nilai P benar dan Q benar, F_2 bernilai benar, tepat bila (F_1 dan F_2) absah.

2.1.4. Substitusi

Definisi 6 : (substitusi total)

Jika F, G, H kalimat, maka notasi $F<<= \{G \leftarrow H\}$ disebut substitusi total. Menyatakan kalimat yang diperoleh dari kalimat F dengan mengganti setiap pemunculan G dengan H. Sedangkan operator <<= disebut operator substitusi total.

Contoh 7 (substitusi total) :

$$\begin{bmatrix} \text{(P danQ)} & \text{dan} \\ \text{R} & \end{bmatrix} <<= \{\text{(P dan Q)} \leftarrow \text{(jika R maka S)}\}$$

hasilnya adalah :

$$\begin{bmatrix} \text{(jika R maka S) dan} \\ \text{R} \end{bmatrix}$$

Operasi substitusi tidak akan berpengaruh jika sub kalimat yang akan diganti tidak ada dalam kalimat.

Contoh 8 (substitusi) :

(P dan Q) $<<=$ $\{(R \leftarrow S)\}$

hasilnya tetap (P dan Q).

Definisi 7 : (substitusi parsial)

Jika F, G dan H adalah kalimat maka notasi F $<<\!\!-$ $\{G \leftarrow H\}$ menyatakan kalimat yang diperoleh dari F dengan mengganti satu atau lebih sub kalimat G dengan kalimat H atau tidak mengganti sub kalimat G sama sekali. Proses ini disebut substitusi parsial dan operator $<<\!\!-$ disebut operator substitusi parsial.

Contoh 9 (substitusi parsial) :

[P atau P] $<<\!\!-$ {P $<\!\!-$ Q}

hasil dari proses substitusi parsial di atas adalah :

P atau P (tidak ada penggantian P)

Q atau P (penggantian kejadian pertama dari P)

P atau Q (penggantian kejadian kedua dari P)

Q atau Q (penggantian semua kejadian P)

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa substitusi total merupakan salah satu substitusi parsial. Dalam operasinya, substitusi total maupun substitusi parsial dapat dikerjakan secara berurutan.

Contoh 10 (urutan substitusi) :

Dari kalimat :

(P atau θ) <<= {P ← θ} <<= {θ ← P}

Hasil substitusi total I : (θ atau θ).

Hasil substitusi total II : (P atau P).

Hasil substitusi parsial I : 1. (P atau θ)

2. (θ atau θ)

Hasil substitusi parsial II : 1. (P atau θ)

2. (P atau P)

3. (θ atau θ)

4. (P atau θ)

5. (θ atau P)

Terlihat bahwa hasil akhir pada substitusi total adalah (P atau P) bukan (P atau θ). Dengan demikian dapat dilihat bahwa operator substitusi total tidak dapat dibalik, sedang pada substitusi parsial salah satu hasil akhir adalah (P atau θ). Dengan demikian substitusi parsial dapat dikembalikan.

2.2. Logika Predikat

2.2.1. Bahasa

Definisi 8 : (simbol-simbol)

Kalimat logika predikat terbentuk atas simbol-simbol sebagai berikut :

1. Simbol kebenaran : benar, salah
2. Simbol-simbol konstanta : a, b, c, a^1, b^1, c^1, a_1, b_1, c_1, a_2 ...
3. Simbol peubah : u, v, w, x, y, z, u^1, v^1, w^1, x^1, y^1, z^1, u^2, ...
4. Simbol fungsi : f, g, h, f_1, g_1, h_1, f_2, ...

   Dalam setiap simbol fungsi terdapat bilangan positif n yang menunjukkan banyaknya argumen dari fungsi tersebut dan disebut arity simbol fungsi.

5. Simbol predikat : $p, q, r, p_1, q_1, r_1, p_2, \ldots$

   Dalam setiap simbol fungsi terdapat bilangan positif n yang menunjukkan banyaknya argumen dari predikat tersebut dan disebut arity simbol predikat.

Bahasa logika predikat dibangun melalui tiga tahap yaitu pembentukan term, pembentukan proposisi dan pembentukan kalimat dan dalam bahasa logika predikat tidak memuat simbol berupa huruf besar.

Definisi 9 : (term)

Term merupakan ekspresi yang menyatakan obyek.

Pembentukan term mengikuti aturan-aturan sebagai berikut :

1. Konstanta a, b, c, ... merupakan term.
2. Variabel u, v, w, x, y, z, ... merupakan term.
3. Untuk sebuah bilangan asli n jika $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ merupakan term dan f adalah fungsi dengan arity n maka $f(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ juga merupakan term.
4. Jika F merupakan kalimat, s dan t merupakan term maka "jika F maka s jika tidak maka t" juga merupakan term.

Contoh 11 (term) :

Simbol fungsi f biner yaitu dengan arity dua dan simbol fungsi g memiliki arity tiga (ternary) maka :

f(a, x) term, karena a dan x term dan f merupakan simbol fungsi biner.

g(a, x, f(a,x)) juga term, karena x, f(a,x) dan a adalah term dan g merupakan simbol fungsi ternary.

Definisi 10 : (proposisi)

Proposisi menyatakan relasi antar obyek yang pembentukannya mengikuti aturan-aturan sebagai berikut :

1. Simbol kebenaran (benar atau salah) merupakan proposisi.
2. Untuk sebuah bilangan asli n jika t_1, t_2, t_3, ... ,t_n adalah term dan p merupakan simbol predikat dengan arity n maka p(t_1, t_2, t_3, ... ,t_n) merupakan proposisi.

Contoh 12 (proposisi dalam logika predikat) :

Jika p adalah sebuah simbol predikat ternary, maka p(a, x, f(a, x)) merupakan sebuah proposisi karena a, x, f(a,x) adalah term dan p merupakan simbol predikat ternary.

Definisi 11 : (kalimat dalam logika predikat)

Kalimat dalam logika predikat dibentuk menurut aturan- aturan sebagai berikut :

1. Setiap proposisi merupakan sebuah kalimat.
2. Jika F, G dan H merupakan kalimat maka *tidak F, F dan G, F atau G, jika F maka G, F jika dan hanya jika G, jika F maka G jika tidak maka H* masing-masing merupakan kalimat.

3. Jika x merupakan sebuah peubah dan F merupakan sebuah kalimat maka :

    a. (untuk semua x)F adalah kalimat

    b. (untuk suatu x)F adalah kalimat

Prefik "untuk semua" dan "untuk suatu" masing-masing disebut quantifier universal dan quantifier eksistensial, sedangkan F merupakan skup quantifier.

Contoh 13 (kalimat dalam logika predikat) :

Simbol fungsi f dan g biner yaitu mempunyai arity dua dan simbol predikat q biner dan simbol predikat p ternary (mempunyai arity tiga) maka :

p(a, x, f(a,x)) adalah kalimat karena merupakan proposisi.

f(g(b, x), y) adalah kalimat karena merupakan proposisi

((untuk suatu y) q(g(b, x), y)) adalah kalimat karena quantifier eksistensial (untuk suatu y) adalah kalimat.

Definisi 12 : (ekspresi)

Ekspresi adalah term atau kalimat

Definisi 13 : (sub term, sub kalimat, sub ekspresi)

- Setiap term dapat digunakan untuk membentuk term t (termasuk t sendiri) atau kalimat F disebut sub term dari t atau F.
- Setiap kalimat yang dipakai untuk membentuk term t atau kalimat F (termasuk F sendiri) disebut sub kalimat dari t atau F.
- Sub term bersama dengan sub kalimat dari term t (termasuk t sendiri) disebut sub ekspresi dari t. Demikian pula, subterm dan sub kalimat dari kalimat F (termasuk F sendiri) disebut sub ekspresi dari F.

Contoh 14 (sub term,sub kalimat dan sub ekspresi) :

Dalam term kondisional t : jika (untuk semua x) q(x, f(a))

maka f(a)

jika tidak maka b.

Sub termnya adalah : x, a, f(a), b dan t.

Sub kalimatnya adalah : q(x, f(a)) dan (untuk semua x) q(x, f(a)).

t mempunyai dua kejadian dari sub term x, dua kejadian dari sub term a, dan dua kejadian dari sub term f(a). Semua sub term dan sub kalimat adalah merupakan sub ekspresi dari t.

2.2.2. Peubah Bebas dan Terikat

Definisi 14 : (pemunculan terikat dan bebas, peubah terikat dan bebas)

Pemunculan peubah x di ekspresi E (kalimat atau term) dikatakan :

- Pemunculan terikat, jika x terdapat dalam skup sebuah quantifier di E. Terikat dengan quantifier yang paling dalam yang berisi pemunculan x.
- Pemunculan peubah x di ekspresi E dikatakan pemunculan bebas jika x tidak terdapat di dalam skup semua quantifier di E.
- Peubah x dikatakan terikat di E jika dalam E paling sedikit terdapat satu pemunculan peubah x yang terikat
- Bila dalam E terdapat paling sedikit satu pemunculan peubah x yang bebas maka x disebut peubah bebas.

Contoh 15 (pemunculan terikat dan bebas, peubah terikat dan bebas) :

$$\text{Kalimat E : (untuk semua x)}\begin{bmatrix} p(x,\ y) \\ \text{dan} \\ (\text{untuk suatu } y)\ q(y,\ z) \end{bmatrix}$$

maka

- x merupakan peubah terikat di E, sebab pemunculan x di p(x, y) terikat oleh universal quantifier "untuk semua x".

- y merupakan peubah terikat di E sebab pemunculan y di q(x, y) terikat quantifier eksistensial "untuk suatu y", tetapi y juga merupakan peubah bebas di E sebab pemunculan y di p(x, y) bebas dari quantifier "untuk semua x".
- z merupakan peubah bebas.

Definisi 15 : (kalimat tertutup)

Kalimat yang tidak mengandung pemunculan bebas dari semua peubahnya disebut kalimat tertutup.

Definisi 16 : (simbol bebas)

Simbol-simbol bebas dari sebuah ekspresi E terdiri atas peubah bebas dari E, semua simbol konstanta, simbol fungsi dan simbol predikat dari E.

Contoh 16 (simbol bebas) :

$$E : (\text{untuk semua } x)\begin{bmatrix} p(x,\ y) \\ \text{dan} \\ (\text{untuk suatu } y)\ q(y,\ f(a,\ z) \end{bmatrix}$$

maka :

Simbol bebasnya adalah peubah-peubah bebas y dan z, konstanta a, simbol fungsi f, simbol predikat p dan q.

2.2.3. Arti Sebuah Kalimat

Definisi 17 : (interpretasi)

Sebuah interpretasi I selalu dikaitkan dengan domain D yang merupakan himpunan dari obyek-obyek, dengan demikian himpunan D tidak kosong. Indeks I menyatakan nilai sesuai interpretasi yang ada.

Interpretasi I memberi nilai kepada :

1. Setiap konstanta a sebuah elemen a_I di D.
2. Setiap peubah bebas x sebuah elemen x_I di D.
3. Setiap simbol fungsi f dengan arity n, sebuah fungsi dengan arity yang sama yaitu $f_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ di D.
4. Setiap simbol predikat p dengan arity n, sebuah predikat n-ary, yaitu $p_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ dalam D nilainya benar atau salah.

Dalam logika predikat, I dikatakan interpretasi jika I memberi nilai kepada masing-masing simbol bebas.

Contoh 17 (interpretasi dalam kalimat) :

E : $p(x, f(x)) \rightarrow$ (untuk suatu y) $p(a, y)$

Karena peubah y terikat pada quantifier eksistensial (untuk suatu y), maka untuk sebarang interpretasi I, y tidak boleh diberi nilai. Sesuai dengan penjelasan di atas, apabila D adalah himpunan orang, sedang I adalah :

a_I = Lidya

x_I = Adi

$f_I(d)$ = lebih tua dari d

$p_I(d_1, d_2) = d_1$ adik d_2

Maka ekspresi E berbunyi :

Jika Adi adik dari orang yang lebih tua darinya maka terdapat y sehingga Lidya adik y.

Definisi 18 : (perluasan interpretasi)

Bila I merupakan suatu interpretasi dengan domain D maka setiap konstanta a dan d pada domain D dapat didefinisikan perluasan untuk interpretasi I yaitu J tetap dengan domain D dengan notasi :

$J : < a \leftarrow d_{\phi} I$

yang berarti :

1. memberi nilai d pada konstanta a
2. nilai konstanta yang lainnya sesuai I
3. peubah x, fungsi f dan predikat p nilainya tetap sesuai I pula.

Analog untuk peubah x dengan notasi $: < x \leftarrow d_{\phi}\ I$

fungsi f dengan notasi $: < f \leftarrow d_{\phi}\ I$

predikat p dengan notasi $: < p \leftarrow d_{\phi}\ I$

Contoh 18 (perluasan Interpretasi) :

I adalah sebuah interpretasi dengan domain bilangan integer x adalah 1.

y adalah 2.

Perluasan interpretasi : $< x \leftarrow 3 \diamond I$

Berarti sekarang nilai x adalah 3, y tetap 2, dengan kata lain dalam $< x \leftarrow 3 \diamond I$

x adalah 3

y adalah 2.

2.2.4 Aturan Semantik

Definisi 19 : (aturan semantik)

E adalah sebuah ekspresi dan I adalah interpretasi untuk E dengan domain D maka nilai dari E dalam I ditentukan berdasarkan aturan semantik :

1. Aturan konstanta : nilai dari konstanta a adalah elemen domain a_I.
2. Aturan peubah :

   nilai dari peubah x adalah elemen domain x_I.
3. Aturan aplikasi :

   nilai dari aplikasi $f(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$ adalah merupakan elemen domain $f_I(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ dengan f_I adalah fungsi f dan $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ nilai-nilai dari term-term $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ dalam I.
4. Aturan-aturan benar dan salah :

   benar bernilai benar dan salah bernilai salah.

5. Aturan penghubung logika :

   *jika, dan, atau, jika....maka.... , jika dan hanya jika, jika....maka....jika tidak maka....*dilakukan antar term atau antar kalimat.

6. Aturan quantifier "untuk semua" adalah sebagai berikut :

   interpretasi I untuk F dengan domain D pada kalimat (untuk semua x) F bernilai benar jika untuk setiap d elemen D mengakibatkan F bernilai benar terhadap perluasan $< x \leftarrow d_{\phi}\ I$. Sebaliknya F bernilai salah jika terdapat d elemen D sehingga F bernilai salah terhadap perluasan $< x \leftarrow d_{\phi}\ I$

7. Aturan quantifier "untuk suatu" adalah sebagai berikut :

   interpretasi I untuk F dengan domain D pada kalimat (untuk suatu x) F bernilai benar jika untuk setiap d elemen D yang mengakibatkan F bernilai benar terhadap perluasan $< x \leftarrow d_{\phi}\ I$. Sebaliknya F bernilai salah jika terdapat d elemen D sehingga F bernilai salah terhadap perluasan interpretasi $< x \leftarrow d_{\phi}\ I$

Kebenaran F pada umumnya dikaitkan dengan suatu interpretasi tertentu. Sedangkan untuk menentukan ketidakbenaran F cukup dilakukan dengan jalan menunjukkan salah satu I sehingga F bernilai salah.

Contoh 19 (aturan semantik dalam kalimat) :

1). F : (tidak p(y, f(y)) atau (p(a, f(a))))

Dengan D = himpunan bilangan cacah

dan I : $a_I = 0$

$y_I = 2$

$f_I(d) = d + 1$

$p_I(d_1, d_2) = d_1 < d_2$

F : tidak $(2 < 3)$ atau $(0 < 1)$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa F bernilai benar.

2). F : Jika (untuk semua x) (untuk suatu y) p(x, y)

maka p(a, f(a)).

Dengan D = Himpunan bilangan riil

$I = a_I = 1$

$f_I(d) = \sqrt{d}$

$p_1(d_1, d_2) = d_1 \neq d_2$

Kalimat F di atas merupakan kalimat majemuk. Sub kalimat anteseden yaitu

(untuk semua x) (untuk suatu y)p(x, y)

akan bernilai benar apabila sub anak kalimat

(untuk suatu y) p(x, y)

akan bernilai benar, yang berarti p(x, y) bernilai benar terhadap perluasan majemuk

$< y \leftarrow d_\phi < x \leftarrow d_\phi I.$

Dengan mengambil $d^1 = d + 1$ anak kalimat anteseden bernilai benar terhadap y karena untuk sebarang d elemen D pasti dapat ditemukan $d^1 = d + 1$ yang juga merupakan elemen D sedemikian sehingga $d \neq d + 1$.

Anak kalimat konsekuen yaitu p(a, f(a)) sesuai dengan interpretasi I akan bernilai salah sebab $1 = \sqrt{1}$, dengan demikian karena anteseden benar dan konsekuen salah maka implikasi F bernilai salah.

Definisi 20 : (kesepakatan antar interpretasi)

Dua interpretasi I dan J bersepakat pada sebuah simbol (yaitu simbol peubah, konstanta, fungsi atau simbol predikat) jika I dan J memberikan nilai kebenaran yang sama terhadap simbol tersebut atau I dan J keduanya tidak memberikan nilai kebenaran pada kedua simbol tersebut

Analog untuk suatu ekspresi E.

Contoh 20 (kesepakatan antar interpretasi) :

D = himpunan bilangan bulat

I : $a_I = 0$ J : $a_J = 0$

$b_I = 2$ $x_J = 1$

$x_I = -1$ $f_J(d) = d - 1$

$f_I(d) = d + 1$

I dan J bersepakat pada konstanta a, karena nilainya sama yaitu 0.

I dan J tidak bersepakat pada b.

I dan J bersepakat pada simbol predikat p karena tidak ada nilai untuk simbol ini.

I dan J tidak bersepakat pada x.

I dan J tidak bersepakat pada simbol f.

I dan J bersepakat pada ekspresi f(x), karena $f_I = (-1) + 1 = 0$ dan $f_J = 1 - 1 = 0$.

I dan J bersepakat pada f(y), karena tidak ada interpretasi untuk ekspresi ini.

I dan J tidak bersepakat pada ekspresi f(b), karena I merupakan interpretasi untuk f(b) sedangkan J tidak .

2.2.5. Closure Universal dan Closure Eksistensial

Definisi 21 : (closure)

Misal $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah peubah-peubah bebas dengan urutan sesuai munculnya dalam F maka :

Closure universal dari F dinotasikan dengan (untuk semua *)F adalah kalimat tertutup (untuk semua x_1) (untuk semua x_2) ... (untuk semua x_n) F.

Closure eksistensial dari F dinotasikan dengan (untuk suatu *)F adalah kalimat tertutup (untuk suatu x_1) (untuk suatu x_2) ... (untuk suatu x_n) F.

Contoh 21 (closure universal dan closure eksistensial) :

Peubah bebas dari kalimat :

$$F : (\text{untuk suatu } z) \begin{bmatrix} q(y, z) \text{ atau } r(x) \\ \text{dan} \\ (\text{untuk semua } w)\ p(y, z, w) \end{bmatrix}$$

adalah y dan x, karena itu closure universal (untuk semua *)F adalah :

$$\begin{array}{l} (\text{untuk semua } y) \\ \quad (\text{untuk suatu } z) \\ (\text{untuk semua } x) \end{array} \begin{bmatrix} q(y, z) \text{ atau } r(x) \\ \text{dan} \\ (\text{untuk semua } w)\ p(y, z, w) \end{bmatrix}$$

Closure eksistensial (untuk suatu *) F adalah :

$$\begin{array}{l} (\text{untuk suatu } y) \\ \quad (\text{untuk suatu } z) \\ (\text{untuk suatu } x) \end{array} \begin{bmatrix} q(y, z) \text{ atau } r(x) \\ \text{dan} \\ (\text{untuk semua } w)\ p(y, z, w) \end{bmatrix}$$

2.3. Logika Predikat Lanjutan

2.3.1. Substitusi Pengamanan

Definisi 22 : (substitusi pengamanan total)

Jika F, G dan H adalah ekspresi-ekspresi, dimana G dan H keduanya term atau kalimat, notasi :

$$F \triangleleft \{ G \leftarrow H \}$$

mempunyai arti :

- Gantilah semua pemunculan bebas dari G dalam F dengan H.
- Jika peubah bebas y diikat dengan quantifier (untuk setiap y) atau

(untuk suatu y) dalam F maka sebagai hasil penggantian di atas, peubah y diganti nama menjadi peubah baru y', sebelum melakukan penggantian ; y' diambil menjadi peubah yang belum muncul dalam F, G atau H.

Contoh 22 (substitusi pengamanan total) :

Hasil substitusi pengamanan total dari :

$$\left[\begin{array}{l}\text{(untuk semua x) [p(x) dan r(y)]}\\ \text{dan}\\ \left[\begin{array}{l}\text{jika p(x)}\\ \text{maka (untuk semua y) [p(x) dan r(y)]}\end{array}\right]\end{array}\right] \blacktriangleleft \{p(x) \leftarrow q(y)\}$$

adalah kalimat :

(untuk semua x) [p(x) dan r(y)]

dan

jika q(y) maka (untuk semua y') [q(y) dan r(y')]

Dapat dilihat bahwa pemunculan pertama p(x), yang terikat tidak diganti dengan substitusi ; dua pemunculan p(x) lainnya yang bebas harus diganti.

Definisi 23 : (substitusi pengamanan parsial)

Jika F, G dan H adalah ekspresi-ekspresi, dimana G dan H keduanya term atau kalimat, notasi :

$F < \{ G \leftarrow H \}$

mempunyai arti :

- Gantilah 0, 1 atau lebih pemunculan bebas dari G dalam F dengan H.
- Jika peubah bebas y diikat dengan quantifier (untuk setiap y) atau (untuk suatu y) dalam F maka sebagai hasil penggantian di atas, peubah y diganti nama menjadi peubah baru y', sebelum melakukan penggantian.

Contoh 23 (substitusi pengamanan parsial) :

Hasil dari substitusi pengamanan parsial dari :

$$\begin{bmatrix} \text{(untuk semua y) p(f((x), y)} \\ \text{dan} \\ \text{(untuk suatu z) r(z, f(x))} \end{bmatrix} < \{ f(x) \leftarrow z \}$$

adalah :

(untuk semua y) p(f(x), y) dan (untuk suatu z) r(z, f(x))	(untuk semua y) p(z, y) dan (untuk suatu z) r (z, f(x))
(untuk semua y) p(f(x), y) dan (untuk suatu z') r(z', z)	(untuk semua y) p(z, y) dan (untuk suatu y') r(z', z)

2.3.2. Sustitusi Kesamaan

Proposisi : (substitusi kesamaan)

Untuk sebarang kalimat G, H dan F(G), closure universal dari :

jika G jika dan hanya jika H

maka F(G) jika dan hanya jika F(H)

Adalah absah.

Bukti :

Akan ditunjukkan untuk sebarang interpretasi I , jika anteseden :

G jika dan hanya jika H

adalah benar tehadap I, maka konsekuen :

F(G) jika dan hanya jika F(H)

adalah benar terhadap interpretasi I.

Misal anteseden benar terhadap I, dengan aturan jika dan hanya jika maka :

nilai G terhadap I

adalah sama

nilai H terhadap I.

Sehingga nilai

F(G) terhadap I

adalah sama

nilai F(H) terhadap I.

Dengan kata lain (juga dengan aturan jika dan hanya jika)

F(G) jika dan hanya jika F(H)

adalah benar terhadap I

2.4. Teori-teori Khusus

2.4.1. Teori

Definisi 24 : (teori)

Suatu teori terdiri dari bahasa dan himpunan kalimat (yang disebut aksioma).

Bahasa teori adalah bahasa logika predikat yang batasannya adalah konstanta, fungsi dan simbol dengan vocabulary yang spesifik, yaitu sub himpunan partikular dari simbol-simbol yang terdapat dalam logika predikat pada umumnya.

Definisi 25 : (vocabulary)

Vocabulary dari sebuah teori adalah suatu sub himpunan :

- $c_1, c_2, c_3, \ldots$ dari konstanta logika predikat
- $f_1, f_2, f_3, \ldots$ dari fungsi logika predikat
- $p_1, p_2, p_3, \ldots$ dari predikat logika predikat

Definisi 26 : (aksioma)

Aksioma suatu teori adalah himpunan kalimat tertutup $A_1, A_2, A_3, \ldots$dari teori yang seluruhnya bernilai "benar" dan dapat dikatakan bahwa teori didefinisikan dengan aksioma-aksiomanya.

Contoh 24 (aksioma dan vocabulary dalam teori) :

Misal akan didefinisikan suatu teori hubungan dalam keluarga. Dalam interpretasi keluarga I, domainnya adalah himpunan orang, yaitu :

f(x) adalah ayah dari x

g(x) adalah ibu dari x

p(x,y) berarti y adalah salah seorang dari orang tua x

q(x,y) berarti y adalah kakek dari x

r(x,y) berarti y adalah nenek dari x

(lebih tepatnya, p_I (d, e) terpenuhi jika e adalah salah seorang dari orang tua d ; q_I (d, e) terpenuhi jika e adalah kakek dari d ; r_I (d, e) terpenuhi jika e adalah nenek dari d). Dengan demikian vocabulary dari teori ini terdiri dari simbol fungsi f dan g, simbol predikat p, q dan r dan tidak ada simbol konstanta. Aksioma teori ini merupakan himpunan kalimat tertutup sebagai berikut :

F_1 : (untuk semua x) p(x, f(x)) (ayah)

(ayah setiap orang adalah orangtuanya)

F_2 : (untuk semua x) p(x, g(x)) (ibu)

(ibu setiap orang adalah orang tuanya)

F_3 : $\begin{matrix}\text{(untuk semua x)} \\ \text{(untuk semua y)}\end{matrix} \begin{bmatrix}\text{jika } p(x, y) \\ \text{maka } q(x, f(y))\end{bmatrix}$ (kakek)

(ayah dari orang tua setiap orang adalah kakek)

$$F_4 : \begin{array}{l}\text{(untuk semua } x)\\ \text{(untuk semua } y)\end{array}\begin{bmatrix}\text{jika } p(x, y)\\ \text{maka } r(x, g(y))\end{bmatrix} \qquad \text{(nenek)}$$

(ibu dari orang tua setiap orang adalah nenek)

Definisi 27 : (model, validitas, konsistensi)

Suatu interpretasi I merupakan model untuk sebuah teori jika setiap aksioma A_i dari teori benar dalam I.

- Sebuah kalimat tertutup S dari suatu teori, adalah absah dalam teori jika S benar dalam setiap model untuk teori.
- Sebuah kalimat S berakibat sebuah kalimat T dalam teori, jika benar dalam sebuah model untuk teori, T juga benar dalam model.
- Dua kalimat S dan T equivalen dalam teori, jika S dan T mempunyai nilai kebenaran yang sama dalam setiap model untuk teori.
- Suatu teori adalah konsisten jika terdapat paling sedikit satu model untuk teori.

2.4.2. Keterhubungan Antar Teori

Definisi 28 : (ketermuatan, equivalensi)

Jika vocabulary dari suatu teori A merupakan sub himpunan dari vocabulary teori B dan setiap kalimat yang absah dalam teori A juga absah dalam teori B, maka teori A termuat dalam teori B. Jika teori A termuat dalam teori b dan teori B juga termuat dalam A maka A dan B merupakan teori yang berequivalensi.

Definisi 29: (ketermuatan)

Jika vocabulary dari teori A adalah sub himpunan dari vocabulary teori B dan tiap-tiap aksioma A absah dalam B, maka teori A termuat dalam teori B.

2.4.3. Teori Relasi Equivalensi

Definisi 30 : (relasi kesamaan)

Untuk suatu simbol predikat biner p, teori relasi equivalensi dari p memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut :

$$Q_1 : \begin{matrix}(\text{untuk semua } x)\\(\text{untuk semua } y)\\(\text{untuk semua } z)\end{matrix} \begin{bmatrix}\text{Jika } x = y \text{ dan } y = z\\ \text{maka } x = z\end{bmatrix} \qquad (\text{transitif})$$

$$Q_2 : \begin{matrix}(\text{untuk semua } x)\\(\text{untuk semua } y)\end{matrix} \begin{bmatrix}\text{Jika } x = y\\ \text{maka } y = x\end{bmatrix} \qquad (\text{simetri})$$

$$Q_3 : (\text{untuk semua } x) \quad [x = x] \qquad (\text{refleksif})$$

Jadi dalam suatu model untuk teori yang didefinisikan dengan Q_1, Q_2 dan Q_3 merupakan relasi equivalensi. Relasi equivalensi p(x, y) akan diganti dengan $x \approx y$ yang menunjukkan relasi yang memenuhi aksioma-aksioma Q_1, Q_2 dan Q_3. Dengan demikian Q_1, Q_2 dan Q_3 dapat ditulis dengan :

$$Q_1 : \begin{matrix}(\text{untuk semua } x)\\(\text{untuk semua } y)\\(\text{untuk semua } z)\end{matrix}\begin{bmatrix}\text{Jika } x \approx y \text{ dan } y \approx z\\ \text{maka } x \approx z\end{bmatrix} \qquad \text{(transitif)}$$

$$Q_2 : \begin{matrix}(\text{untuk semua } x)\\(\text{untuk semua } y)\end{matrix}\begin{bmatrix}\text{Jika } x \approx y\\ \text{maka } y \approx x\end{bmatrix} \qquad \text{(simetri)}$$

$$Q_3 : (\text{untuk semua } x)[x \approx x] \qquad \text{(refleksif)}$$

Contoh 25 (relasi kesamaan) :

Ditentukan interpretasi pada integer yang menetapkan $\approx$ sebagai relasi kongruensi modulo 2 atau $\approx_2$ yaitu untuk setiap integer d_1 dan d_2, $d_1 \approx d_2$

tepat bila

$$\begin{bmatrix}d_1 \text{ dan } d_2 \text{ keduanya genap}\\ \text{atau}\\ d_1 \text{ dan } d_2 \text{ keduanya ganjil}\end{bmatrix}$$

dengan demikian $2 \approx_2 6$ tetapi tidak $1 \approx_2 2$.

2.5. Teori Kesamaan

Vocabulary dari teori kesamaan terdiri dari simbol predikat biner = dan sebuah himpunan tak spesifik dari simbol-simbol konstanta, fungsi dan predikat yang lain.

- Aksioma-aksioma dasar :

$$\varepsilon_1: \begin{array}{l}\text{(untuk semua } x)\\ \text{(untuk semua } y)\\ \text{(untuk semua } z)\end{array} \begin{bmatrix}\text{Jika } x = y \text{ dan } y = z\\ \text{maka } x = z\end{bmatrix}$$ (transitif)

$$\varepsilon_2: \begin{array}{l}\text{(untuk semua } x)\\ \text{(untuk semua } y)\end{array} \begin{bmatrix}\text{Jika } x = y\\ \text{maka } y = x\end{bmatrix}$$ (simetri)

$$\varepsilon_3: \text{(untuk semua } x) \quad [x = x]$$ (refleksif)

- Skema aksioma substitusi

Untuk setiap k-simbol fungsi f dan untuk setiap I dari 1 sampai k,

$$\varepsilon_4: \begin{array}{c}\text{(untuk semua } z_1)\\ \text{M}\\ \text{(untuk semua } x)\text{(untuk semua } z_{i-1})\\ \text{M}\\ \text{(untuk semua } y)\text{(untuk semua } z_k)\\ \text{M}\\ \text{(untuk semua } z_k)\end{array} \begin{bmatrix}\text{jika } x = y\\ \text{maka}\\ f(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_k) =\\ f(z_1, \ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1} \ldots, z_k)\end{bmatrix}$$

(substitusi fungsi untuk f).

Untuk setiap I simbol predikat q (selain dari =) dan untuk setiap j dari 1 sampai l,

$$\varepsilon_5: \begin{array}{c}\text{(untuk semua } z_1)\\ \text{M}\\ \text{(untuk semua } x)\text{(untuk semua } z_{j-1})\\ \text{M}\\ \text{(untuk semua } y)\text{(untuk semua } z_{j+1})\\ \text{M}\\ \text{(untuk semua } z_l)\end{array} \begin{bmatrix}\text{jika } x = y\\ \text{maka}\\ q(z_1, \ldots, z_{j-1}, x, z_{j+1}, \ldots, z_l) =\\ q(z_1, \ldots, z_{j-1}, y, z_{j+1}, \ldots, z_l)\end{bmatrix}$$

(substitusi predikat untuk q).

Keduanya, skema aksioma substitusi fungsi ε_4 dan substitusi predikat ε_5 mewakili himpunan-himpunan aksioma-aksioma, satu atau lebih untuk masing-masing simbol fungsi dan simbol predikat. Jika ada sejumlah simbol-simbol fungsi dan predikat tak terbatas dalam vocabulary, maka aksioma-aksioma substitusi fungsi atau substitusi predikat menjadi tidak terbatas.

Contoh 26 (kesamaan) :

Untuk sebuah fungsi biner g, hal-hal yang berkorespondensi dari aksioma fungsi substitusi fungsional ε_4 adalah :

$$\begin{array}{l}(\text{untuk semua } x)\\(\text{untuk semua } y)\\(\text{untuk semua } z_2)\end{array}\begin{bmatrix}\text{jika } x = y\\ \text{maka}\\ g(x, z_2) = g(y, z_2)\end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{array}{l}(\text{untuk semua } x)\\(\text{untuk semua } y)\\(\text{untuk semua } z_2)\end{array}\begin{bmatrix}\text{jika } x = y\\ \text{maka}\\ g(z_1, x) = g(z_1, y)\end{bmatrix}$$

Untuk sebuah predikat unar p, hal-hal yang berhubungan dari aksioma substitusi predikat ε_5 :

$$\begin{array}{l}(\text{untuk semua } x)\\(\text{untuk semua } y)\end{array}\begin{bmatrix}\text{jika } x = y\\ \text{maka } p(x)\\ \quad\text{jika dan hanya jika}\\ \quad p(y)\end{bmatrix}$$

Aksioma-aksioma untuk teori kesamaan memasukkan aksioma-aksioma transitif, simetri dan refleksif dari teori relasi equivalensi. Dengan kata lain, = adalah sebuah relasi equivalensi.

Proposisi : (aturan semantik untuk kesamaan)

Jika I adalah model untuk teori kesamaan, maka terdapat sebuah interpretasi untuk term-term t_1 dan t_2.

jika

nilai t_1 dalam I

adalah sama dengan

nilai t_2 dalam I

maka

$t_1 = t_2$.

Hasil $t_1 = t_2$ ini disebut "peraturan =."

Bukti :

Andaikan term-term t_1 dan t_2 mempunyai nilai sama yaitu d, yang merupakan elemen domain dalam I. Akan diperlihatkan bahwa kalimat $t_1 = t_2$ benar dalam I.

Dengan mengambil $=_2$ menjadi relasi biner untuk simbol predikat kesamaan = dalam I. Maka (dengan aturan semantik proposisi, karena nilai-nilai dari t_1 dan t_2 masing-masing adalah d).

Nilai dari $t_1 = t_2$ dalam I adalah $d_1 = d_2$.

Akan ditunjukkan bahwa

$d =_I d$ adalah benar.

Sudah diasumsikan bahwa I adalah sebuah model untuk teori kesamaan. Sesuai aksioma refleksif :

(untuk semua x)[x = x]

adalah benar dalam I, maka kalimat :

$t_1 = t_2$ benar dalam I .

Sudah diketahui bahwa nilai t_1 dalam I adalah d, sehingga

Nilai t_1 dan t_2 dalam I adalah $d =_I d$

Karena itu $d =_I d$ benar.

Ini merupakan rumusan dari teori kesamaan yang mempunyai model-model simbol predikat biner =. Untuk setiap model I, kalimat $t_1 = t_2$ benar dalam I, tepat bila term-term t_1 dan t_2 mempunyai nilai sama dalam I. Secara implikatif jika t_1 dan t_2 mempunyai nilai sama dalam I maka kalimat $t_1 = t_2$ benar.

2.6. Teori Grup

2.6.1. Operasi Biner

Definisi 31 : (operasi biner)

Jika S adalah suatu himpunan yang tidak kosong maka operasi biner $\circ$ pada S adalah suatu pemetaan (fungsi) yang mengawankan setiap pasangan berurutan :

$$(a, b) \in S \times S \text{ dengan tepat satu elemen } (a \circ b) \in S.$$

Secara simbolik definisi di atas yaitu definisi operasi biner $\circ$ dapat ditulis sebagai :

$$\circ : S \times S \rightarrow S.$$

Contoh 27 (operasi biner) :

1. Himpunan bilangan asli genap A = {2, 4, 6, ...} dengan operasi penjumlahan +. Operasi penjumlahan + merupakan operasi biner pada A, sebab jumlah setiap dua bilangan asli genap selalu merupakan bilangan asli genap dalam A.
2. Himpunan bilangan asli ganjil B = {1, 3, 5, ...} dengan operasi penjumlahan +. Operasi penjumlahan + dalam B bukan merupakan operasi biner, sebab terdapat hasil penjumlahan dua anggota B yang merupakan anggota B.

2.6.2. Grup

Definisi 32: (grup)

Suatu himpunan G yang tidak kosong dan suatu operasi biner $\circ$ yang didefinisikan pada G membentuk suatu grup jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut ini :

1. Operasi $\circ$ pada G bersifat assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ maka $(a \circ b) \circ c = a \circ b \circ c)$.
2. G terhadap operasi biner $\circ$ mempunyai elemen identitas, yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a \circ e = e \circ a = a$.
3. G terhadap operasi biner $\circ$ mempunyai invers, yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Contoh 28 (grup) :

Himpunan bilangan bulat B = { ..., -2, -1, 0,1, 2, ...} terhadap operasi biner penjumlahan + merupakan grup karena :

1. Sifat assosiatif dipenuhi, sebab penjumlahan bilangan-bilangan bulat bersifat assosiatif.
2. B terhadap operasi penjumlahan + mempunyai elemen identitas yaitu 0,sebab untuk setiap $a \in B$ terdapat $a^{-1} = 0$ sehingga $a + 0 = 0 + a = 0$.
3. B terhadap operasi penjumlahan + mempunyai elemen inverse, sebab untuk setiap $a \in B$ terdapat $a^{-1} = -a$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.