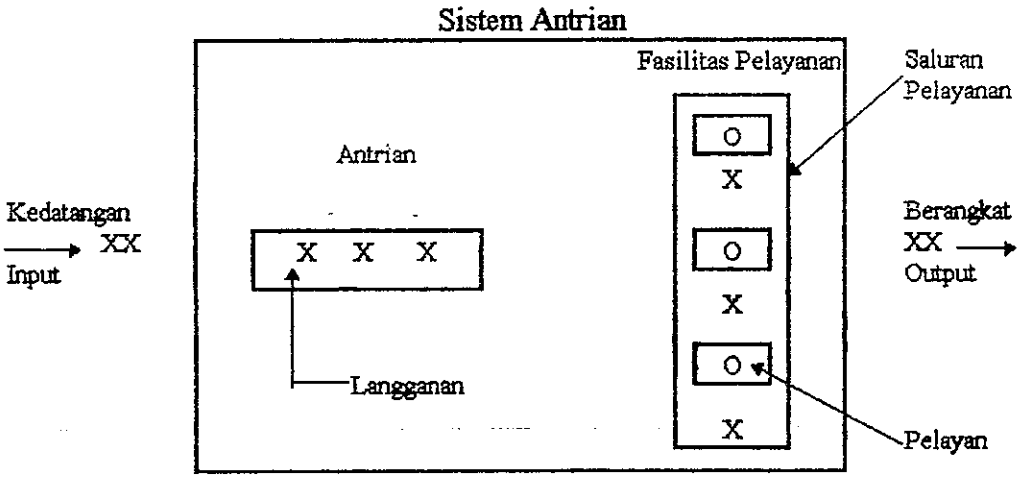
BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1 Sistem Antrian

Langganan tiba dengan laju tetap atau tidak tetap untuk memperoleh pelayanan pada fasilitas pelayanan. Bila langganan yang tiba dapat masuk ke dalam fasilitas pelayanan, maka hal itu akan segera ia lakukan. Tetapi kalau harus menunggu, maka mereka akan membentuk satu antrian hingga tiba waktunya untuk dilayani. Mereka akan dilayani dengan laju tetap atau tidak tetap. Setelah selesai, merekapun berangkat. Dari penjelasan di atas, sistem antrian dapat digambarkan seperti diagram berikut ini



Gambar 2.1

Berdasarkan uraian singkat di atas, maka sistem antrian dapat dibagi atas 2 (dua) komponen yaitu :

1) Antrian yang memuat langganan atau satuan-satuan yang memerlukan pelayanan (pembeli, orang sakit, mahasiswa, kapal, dan lain-lain).
2) Fasilitas pelayanan yang memuat pelayan dan saluran pelayanan (pompa minyak dan pelayan, loket bioskop dan petugas jual karcis dan lain-lain).

Terdapat banyak jenis sistem antrian dan masing-masing dapat dibedakan sesuai dengan karakteristiknya seperti di bawah ini :

2.1.1 Sumber

Sumber adalah kumpulan orang atau barang dari mana satuan-satuan datang atau dipanggil untuk pelayanan. Kumpulan orang-orang atau barang ini boleh berhingga ataupun tidak berhingga.

Dalam praktek, sumber adalah berhingga. Akan tetapi, dalam satu populasi yang besar , sumber dianggap tidak berhingga. Untuk keperluan analisis sering lebih mudah menggunakan sumber tidak berhingga sebagai dasar perhitungan. Dalam kebanyakan kasus sumber berhingga, satuan-satuan kembali membentuk populasi sumber begitu pelayanan selesai.

2.1.2 Proses masukan

Proses masukan adalah suatu proses pembentukan suatu bentuk antrian akibat kedatangan satuan-satuan orang atau barang. Secara teori, waktu kedatangan antara satuan-satuan dengan satuan berikutnya dianggap acak dan bebas. Bentuk umum dari proses ini dan sering digunakan dalam model-model antrian, ialah yang dikenal dengan proses Poisson. Dalam keterangan berikutnya, proses ini akan diterangkan lebih jelas.

2.1.3 Mekanisme Pelayanan

Ada tiga aspek yang harus diperhatikan dalam mekanisme pelayanan, yaitu :

- Tersedianya pelayanan.
- Kapasitas pelayanan.
- Lama berlangsungnya pelayanan.

Ketiganya merupakan variabel bebas dan boleh jadi sudah tetap atau mungkin tidak. Ketiga-tiganya akan kita bedakan sebagai berikut :

2.1.3.1 Tersedianya Pelayanan

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia untuk setiap saat. Misalnya pelayanan terhenti dan petugas pelayanan (pelayan) istirahat dalam pertunjukan bioskop, loket penjualan karcis masuk hanya dibuka pada waktu tertentu antara satu pertunjukan dengan pertunjukan berikutnya. Sehingga pada saat loket ditutup, mekanisme pelayanan terhenti dan petugas pelayanan (pelayan) istirahat.

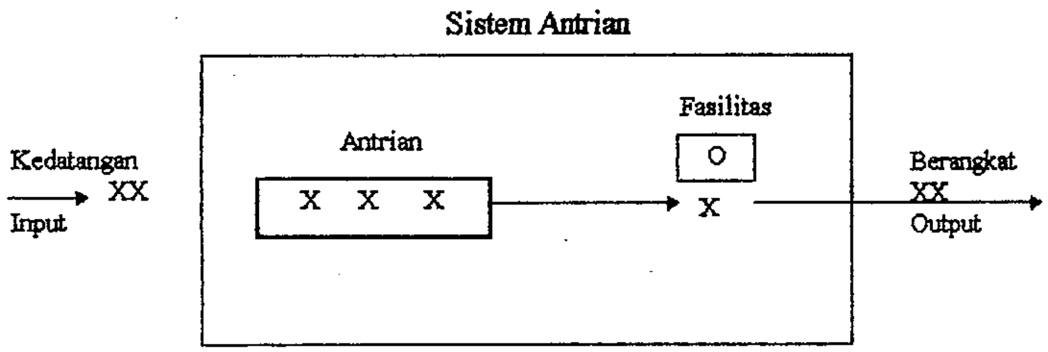
2.1.3.2 Kapasitas pelayanan

Kapasitas dari mekanisme pelayanan diukur berdasarkan jumlah langganan (satuan) yang dapat dilayani secara bersama-sama. Kapasitas pelayanan tidak selalu sama untuk setiap saat; ada yang tetap, tapi ada juga yang berubah-ubah. Karena itu, fasilitas pelayanan dapat memiliiki satu atau lebih saluran. Fasilitas yang memiliki satu saluran disebut saluran tunggal atau sistem pelayanan tunggal dan fasilitas yang mempunyai lebih dari satu saluran disebut saluran ganda atau pelayanan ganda.

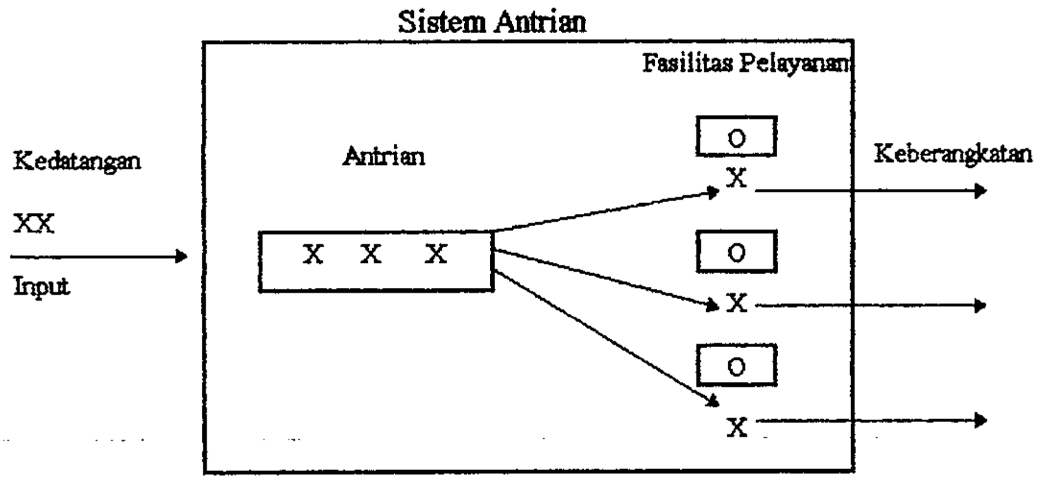
2.1.3.3 Lamanya Pelayanan

Lamanya pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang langganan atau satu satuan. Ini harus dinyatakan secara pasti. Oleh karena itu, waktu pelayanan boleh tetap dari waktu ke waktu untuk semua langganan atau boleh juga berupa variabel acak. Umumnya dan untuk keperluan analisis, waktu pelayanan dianggap sebagai variabel acak yang terpencar secara bebas dan sama, tidak tergantung pada waktu kedatangan.

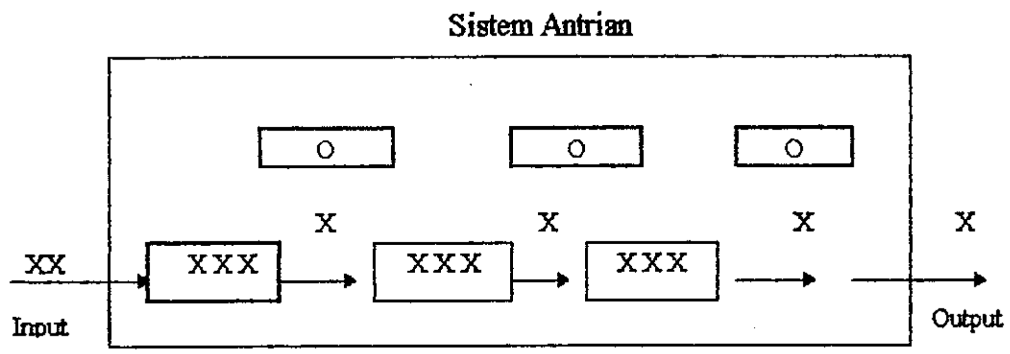
Berdasarkan ketiga sifat-sifat ini dan kombinasi daripadanya membentuk bermacam-macam sistem antrian, diantaranya :



Gambar 2.2 : Antrian tunggal, pelayan tunggal

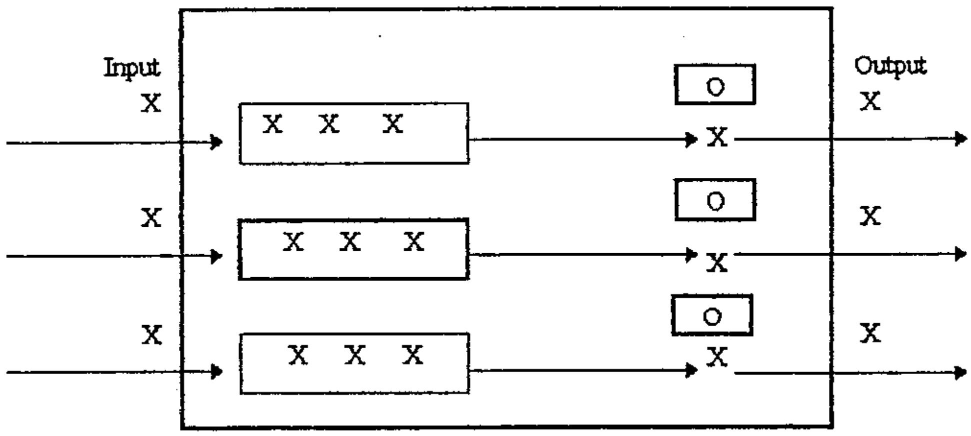


Gambar 2.3 : Antrian tunggal, pelayan ganda sejajar



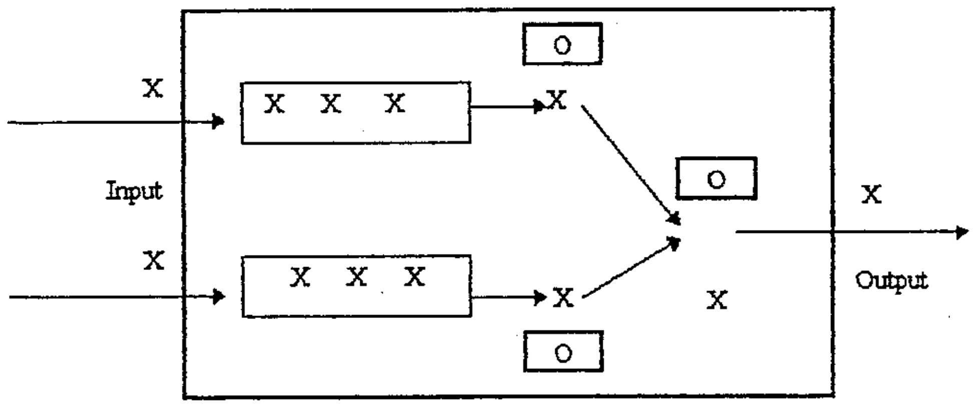
Gambar 2.4 : Antrian tunggal, pelayan ganda dalam seri

Sistem Antrian



Gambar 2.5 : Antrian ganda, pelayan ganda

Sistem Antrian



Gambar 2.6 : Antrian ganda, pelayan ganda

2.1.4 Disiplin Pelayanan

Kebiasaan ataupun kebijakan dengan cara bagaimana para langganan dipilih dari antrian untuk dilayani, disebut disiplin pelayanan. Ada beberapa bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan dalam praktek, yaitu :

1) First-come First-served (FCFS) atau First-in First-out (FIFO) artinya, lebih dulu datang (sampai) lebih dulu dilayani. misalnya antri beli tiket bioskop.

2) Last-come First-served atau Last-in First-out (LIFO), artinya yang tiba terakhir yang lebih dulu keluar. Misalnya, sistem antrian dalam elevator (lift) untuk lantai yang sama.
3) Service in Random Order (SIRO) artinya, panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak soal siapa yang lebih dulu tiba.
4) Priority Service (PS) artinya, prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan mereka yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini kemungkinan disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang keadaan penyakitnya lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter. Mungkin juga kedudukan atau jabatan seseorang menyebabkan dia dipanggil terlebih dahulu atau diberi prioritas lebih tinggi. Demikian juga bagi seseorang yang menggunakan waktu pelayanan yang lebih sedikit diberi prioritas dibanding dengan mereka yang memerlukan pelayanan lebih lama, tidak soal siapa yang lebih dahulu masuk dalam garis tunggu. Contoh-contoh di atas merupakan sebagian kecil dari Priority Service yang sering terlihat dalam keadaan yang sesungguhnya.

2.2 Analisis Pola Kedatangan

Sangatlah sukar untuk membicarakan seluruh kasus kedatangan yang muncul dalam kehidupan sehari-hari yang sering tidak berpola. Karenanya, secara teori waktu kedatangan antara satuan-satuan orang atau barang dengan satuan berikutnya dianggap acak dan bebas. Akan tetapi, ada beberapa kasus yang dapat dipergunakan sebagai landasan teori untuk menyelidiki kasus kedatangan secara umum. Sebelum kasus-kasus ini dibicarakan, akan diperkenalkan beberapa notasi sebagai berikut :

1. n = Jumlah satuan (langganan) dalam antrian pada waktu t.
2. $P_n(t)$ = Peluang bahwa ada n satuan dalam antrian pada waktu t.

   Notasi $P_n(t)$ juga bisa ditulis sebagai $P(n,t)$.
3. λ = Rata-rata kecepatan kedatangan dalam satu satuan waktu.
4. $\lambda\Delta t$ = Peluang bahwa ada satu satuan atau langganan baru yang masuk dalam antrian dalam kurun waktu dari t hingga $t + \Delta t$.
5. μ = Rata-rata kecepatan pelayanan dalam satu satuan waktu.
6. $\mu\Delta t$ = Peluang bahwa ada satu satuan atau langganan yang telah selesai dilayani dalam kurun waktu dari t hingga $t + \Delta t$

Selanjutnya, dimisalkan bahwa kecepatan pelayanan tidak berpengaruh terhadap jumlah satuan dalam antrian dan bahwa satuan-satuan yang membentuk garis tunggu atau antrian tersebut dilayani sesuai dengan disiplin pelayanan first in first out (FIFO). Maka peluang bahwa ada n satuan ($n > 0$) pada waktu ($t + \Delta t$) ditentukan oleh empat kemungkinan keadaan sebagai berikut :

1). Kemungkinan bahwa :

(a) Ada n satuan dalam antrian pada waktu t

$= P_n(t)$.

(b) Tidak ada kedatangan selama waktu Δt.

$= 1 - \lambda\Delta t$

(c) Tidak ada satuan yang dilayani selama waktu Δt.

$= 1 - \mu\Delta t$

2). Kemungkinan bahwa :

(a) Ada $n + 1$ satuan dalam antrian pada waktu t

$= P_{n+1}(t)$.

(b) Tidak ada kedatangan selama waktu Δt.

$= 1 - \lambda\Delta t$

(c) Ada satu satuan yang dilayani selama waktu Δt.

$= \mu\Delta t$

3). Kemungkinan bahwa :

(a) Ada $n - 1$ satuan dalam antrian pada waktu t

$= P_{n-1}(t)$.

(b) Ada kedatangan satu satuan selama waktu Δt.

$= \lambda\Delta t$

(c) Tidak ada satuan yang dilayani selama waktu Δt.

$= 1 - \mu\Delta t$

4) Kemungkinan bahwa :

(a) Ada n satuan dalam antrian pada waktu t

$= P_n(t)$.

(b) Ada kedatangan satu satuan selama waktu Δt.

$= \lambda\Delta t$

(c) Ada satu satuan yang dilayani selama waktu Δt.

$= \mu\Delta t$

Berdasarkan empat kemungkinan yang ada di atas, maka peluang bahwa ada n satuan dalam antrian pada waktu $(t + \Delta t)$ yaitu $P_n(t + \Delta t)$ dengan asumsi peluang kedatangan dan peluang pelayanan lebih dari satu satuan dalam waktu Δt dianggap sama dengan nol, adalah :

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)(\mu\Delta t) \\
&\quad + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_n(t)(\lambda\Delta t)(\mu\Delta t) \\
&= P_n(t) - \lambda.\Delta t.\, P_n(t) - \mu.\Delta t.\, P_n(t) + \lambda.\mu.(\Delta t)^2.P_n(t) + \mu.\Delta t\, P_{n+1}(t) \\
&\quad -\lambda.\mu.(\Delta t)^2.\, P_{n+1}(t) + \lambda.\Delta t.\, P_{n-1}(t) - \lambda.\mu.(\Delta t)^2 P_{n-1}(t) \\
&\quad + \lambda.\mu.(\Delta t)^2 P_n.t) \\
&= P_n(t) - (\lambda+\mu).\Delta t.\, P_n(t) + \mu.\Delta t.\, P_{n+1}(t) + \lambda.\Delta t.\, P_{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{4} O_i\Delta t
\end{aligned}
$$

dengan O_i adalah faktor yang mengandung (Δt).

Oleh karena itu :

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda-\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \sum_{i=1}^{4} O_i$$

Untuk $\Delta t \to 0$, terdapat $\sum_{i=1}^{4} O_i \to 0$, sehingga :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

atau

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t),\ n>0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dalam keadaan $n = 0$, atau dengan kata lain peluang bahwa tidak ada satuan dalam antrian pada waktu $(t+\Delta t)$ ditulis $P_0(t+\Delta t)$ diperoleh dari dua kemungkinan keadaan berikut :

1. Kemungkinan bahwa

(a) Tidak ada satuan dalam antrian pada waktu t.

$= P_0(t)$

(b) Tidak ada satuan yang masuk (kedatangan) dalam waktu Δt.

$= (1 - \lambda\Delta t)$

2. Kemungkinan bahwa

(a) Ada satu satuan dalam antrian pada waktu t.

$= P_1(t)$

(b) Tidak ada satuan yang masuk (kedatangan) dalam waktu Δt.

$= (1 - \lambda\Delta t)$

(c) Ada satu satuan yang dilayani dalam waktu Δt.

$= \mu\Delta t$

Dari dua kemungkinan di atas, peluang bahwa tidak ada satuan dalam antrian pada waktu $(t + \Delta t)$ yaitu $P_0(t + \Delta t)$ adalah :

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_1(t)(1 - \lambda\Delta t)(\mu.\Delta t)$$

$$= P_0(t) - \lambda.\Delta t.\, P_0(t) + \mu.\Delta t.P_1(t) - \lambda.\mu.(\Delta t)^2 P_1(t)$$

atau

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) - \lambda.\mu.\Delta t.P_1(t)$$

Untuk $\Delta t \to 0$, terdapat

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) \quad \text{...(2)}$$

Dalam keadaan tidak stabil, yaitu pelayanan tidak berlangsung, atau $\mu = 0$, maka pola kedatangan akan ditentukan sebagai berikut :

Dari persamaan (1), yaitu :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_n\lambda_{-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

diperoleh :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \quad \text{...(3)}$$

Sedangkan dari persamaan (2) yaitu :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t).$$

diperoleh :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad \text{...(4)}$$

Kemudian ,

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt.$$

Setelah kedua ruas diintegralkan, akan didapatkan :

$$\ln P_0(t) = -\lambda t + C$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t + C}$$

$$= A.\ e^{-\lambda t}$$

Karena $P_0(t) = 1$ untuk $t = 0$, yaitu suatu kepastian bahwa tidak ada satuan dalam antrian pada $t = 0$, maka :

$$P_0(0) = A.\ e^{-\lambda 0}$$

$$1 = A.\ e^{-\lambda 0}$$

$$A = 1$$

Sehingga

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{..(5)}$$

Jika persamaan di atas disubstitusikan ke dalam persamaan (3), yaitu :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t)$$

maka untuk n = 1 diperoleh

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} . e^{\lambda t} + \lambda P_1(t).\ e^{\lambda t} = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}[P_1(t).\ e^{\lambda t}] = \lambda$$

$$d[P_1(t).\ e^{\lambda t}] = \lambda dt$$

$$P_1(t).\ e^{\lambda t} = \int \lambda\ d\ t$$

$$P_1(t).\ e^{\lambda t} = \lambda t + C$$

$$P_1(t) = \lambda t.e^{-\lambda t} + C.\ e^{-\lambda t}.$$

Karena $P_1(t) = 0$ untuk $t = 0$, maka

$$P_1(0) = C.\ e^{-\lambda.0}$$

$$0 = C.\ e^{-\lambda.0}$$

$$C = 0$$

Dengan demikian :

$$P_1(t) = \frac{\lambda.t.e^{-\lambda t}}{1!}$$

Dengan menggunakan induksi, akhirnya diperoleh pola kedatangan dari n satuan secara acak dalam antrian pada waktu t, yaitu :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n.e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n \geq 0,\ t \geq 0 \quad \text{...(6)}$$

suatu distribusi Poisson. Karena itu peluang bahwa ada n satuan atau langganan dalam antrian pada waktu t sebarang, sebelum ada pelayanan, didistribusikan secara Poisson dengan parameter λt.

Jumlah rata-rata langganan dalam sistim pada waktu t menjadi :

$$E[\bar{n}(t)] = \lambda.t \ , \quad t \geq 0 \quad \text{...................................(7)}$$

Akibatnya adalah, jika t berupa variabel acak yang menyatakan waktu antara kedatangan berurutan, maka t akan memenuhi suatu distribusi eksponensial dengan λ sebagai parameter, yaitu :

$$f(t) = \lambda.e^{-\lambda t} \ , \ t \geq 0$$

dengan f(t) disebut fungsi kepadatan dalam selang waktu t antara dua kedatangan berurutan.

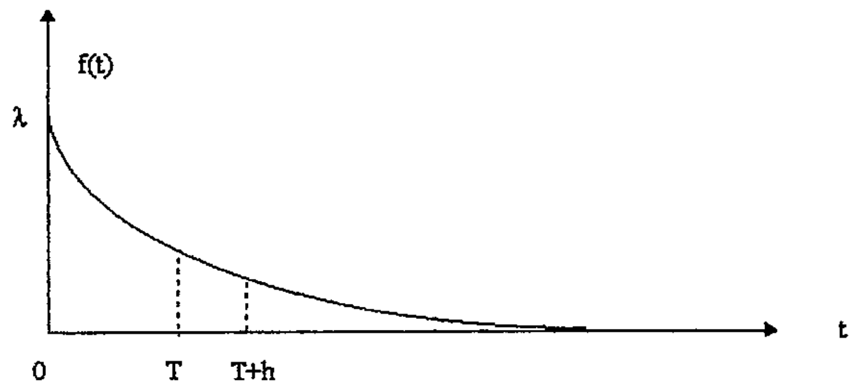
Oleh karena itu peluang kedatangan pertama yang terjadi sesudah waktu T dengan $T \leq t$ adalah :

$$P[T \leq t] = \int_T^{\infty} f(t)dt$$

$$= \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$= e^{-\lambda T} \quad \text{...(8)}$$

Ini juga berarti bahwa peluang tidak ada kedatangan antara selang waktu $t = 0$ hingga $t = T$ sama dengan peluang kedatangan pertama sesudah waktu T. Secara grafik dapat digambarkan seperti di bawah ini :



Distribusi eksponensial fungsi kepadatan selama t, $f(t) = \lambda . e^{-\lambda t}$

Sekarang peluang bersyarat bahwa tidak terjadi kedatangan dalam selang waktu [0,T+h] dengan diketahuinya bahwa tidak terjadi kedatangan dalam selang waktu [0,T] adalah :

$$P[t \geq h] = \frac{\int_{T+h}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_{T}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(T+h)}}{e^{-\lambda T}}$$

$$= e^{-\lambda h}$$

yang hanya tergantung pada h.

Sesuai dengan persamaan di atas, maka peluang tidak ada kedatangan dalam selang waktu (T, T+h) adalah sama, tidak tergantung apakah tidak ada kedatangan dalam selang (0,T) atau apakah ada kedatangan pada waktu T.

Oleh karena itu, peluang tidak ada kedatangan dalam setiap selang sepanjang h ialah :

$$P[t \geq h] = e^{-\lambda h}$$

$$= 1 - \lambda h + \frac{(-\lambda h)^2}{2!} + \ldots$$

Bila $h \to 0$ maka ,

$$P[t \geq h] \approx 1 - \lambda h$$

atau peluang terjadinya satu kedatangan dalam tiap selang sepanjang h adalah :

$$P_1(h) = 1 - (1 - \lambda h)$$

$$= \lambda h$$

Bersama-sama dengan distribusi antara kedatangan (eksponensial), yaitu :

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad (\text{rata-rata } \frac{1}{\lambda}, \text{ dan varian } \frac{1}{\lambda^2}) \text{ dan}$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^{\infty} \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \quad ; \; (E[\tfrac{n}{t}] = \lambda t, \operatorname{var}[\tfrac{n}{t}] = t)$$

semuanya merupakan karakter dari kedatangan bentuk Poison.

Dalam keadaan stasioner atau steady state, $P_n(t) = P_n$ untuk semua t, artinya P_n tidak terkait pada waktu t, sehingga

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 , \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dari persamaan (1)

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) , \; n > 0$$

didapat :

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0 \;, \; n > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

Sedangkan dari persamaan (2)

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

didapat :

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \text{ , ...(12)}$$

Karena $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$, maka

$$P_0 = P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \qquad \text{dari persamaan (12)}$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 .P_0 \qquad \text{dari persamaan (11), untuk n = 1}$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 .P_0 \qquad \text{dari persamaan (11), untuk n = 2}$$

.
.
.

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .P_0$$

______________________________ +

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Misalkan $\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1$, artinya bahwa kecepatan kedatangan rata-rata kurang dari kecepatan pelayanan rata-rata ; yaitu satu syarat yang harus dipenuhi untuk mencegah pertumbuhan garis tunggu berkembang di luar batas.

Karena $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$, dan $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$ (jumlah deret ukur)

maka

$$\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}.P_0 = 1$$

atau

$$P_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

Karena $P_n = \rho^n P_0$

maka $P_n = \rho^n(1-\rho), \quad \rho < 1$ ....(13)

ρ disebut sebagai intensitas lalu lintas dan P_n sebagai peluang adanya n satuan dalam antrian. Dengan kata lain disebutkan bahwa panjang antrian ialah n, tidak tergantung pada waktu.

Oleh karena panjang rata-rata antrian n adalah :

$$\bar{n} = \sum_{0}^{\infty} n.P_n \text{ , dengan } \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$

maka

$$\bar{n} = \sum_{0}^{\infty} n\,\rho^n(1-\rho)$$

$$= (1-\rho)\sum_{0}^{\infty} n\,\rho^n$$

$$= (1-\rho)\left[\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4 + ...\right]$$

$$= (1-\rho)\ \rho\ \left[1+2\rho+3\rho^2+4\rho^3+\ldots\right]$$

Misalkan, $F(\rho) = 1 + 2\rho + 3\rho^2 + 4\rho^3 + \ldots$

maka

$$\int_0^\rho F(\rho)d\rho = \int_0^\rho \left[1+2\rho+3\rho^2+4\rho^3+\ldots\right] d\rho$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \ldots$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (\text{jumlah deret ukur, } \rho < 1)$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\int_0^\rho F(\rho)d\rho\right] = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{\rho}{1-\rho}\right]$$

$$= \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

maka,

$$F(\rho) = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

Oleh karena

$$\bar{n} = (1-\rho)\ \rho.F(\rho)$$

maka

$$\bar{n} = (1-\rho)\ \rho\ \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

atau

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1-\rho}\ ,\ \rho < 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

adalah panjang rata-rata antrian atau jumlah satuan rata-rata dalam sistem antrian pada sebarang waktu.

2.3 Analisis Pola Pelayanan

Dalam menganalisa pola pelayanan, harus beranggapan bahwa selama pelayanan berlangsung tidak terjadi kedatangan. Ini berarti bahwa $\lambda = 0$.

Dari persamaan (2) :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

didapat

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) \quad \text{...(15)}$$

Sedangkan dari persamaan (1) :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \quad n > 0$$

didapat :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t), n > 0 \quad \text{.......................................(16)}$$

Apabila jumlah satuan dalam antrian pada waktu t adalah sebanyak $n = N$, maka :

untuk $n \geq N + 1$, terdapat :

$$P_n(t) = 0$$

untuk $n = N$, terdapat :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = - \mu P_n(t) \quad \text{...(17)}$$

untuk $1 \leq n \leq N - 1$, terdapat :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) - \mu P_n(t)$$

Selanjutnya dari persamaan (17) :

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t)$$

didapatkan :

$$\frac{dP_n(t)}{P_n(t)} = -\mu\, dt$$

sehingga $\ln P_n(t) = \int -\mu dt$

$$\ln P_n(t) = -\mu t + C$$

$$P_n(t) = e^{-\mu t + C}$$

$$P_n(t) = A \cdot e^{-\mu t},\ t > 0$$

Karena $P_N(t) = 1$ untuk $t = 0$, maka $A = 1$, sehingga :

$$P_n(t) = e^{-\mu t},\quad t \geq 0 \qquad (18)$$

merupakan peluang bahwa n satuan berada dalam antrian pada waktu t.

Selanjutnya, apabila $n = N - 1$, didapat

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} = -\mu P_{N-1}(t) + \mu P_N(t)$$

atau

$$\frac{dP_{N-1}(t)}{dt} + \mu P_{N-1}(t) = \mu e^{-\mu t}$$

Bentuk persamaan di atas dapat dirubah menjadi :

$$\frac{d}{dt}\left[P_{N-1}(t).e^{\mu t}\right] = \mu$$

$$d\left[\ P_{N-1}(t).e^{\mu t}\ \right] = \mu\, dt$$

$$P_{N-1}(t).e^{\mu t} = \mu t + C$$

$$P_{N-1}(t) = \mu t \,.\, e^{-\mu t} + C.\, e^{-\mu t}$$

Karena $P_{N-1}(t) = 0$ untuk $t = 0$, maka $C \,.\, e^{-\mu t} = 0$, sehingga :

$$P_{N-1}(t) = \frac{\mu t.e^{-\mu t}}{1!}$$

Akhirnya, dengan menggunakan induksi diperoleh :

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n}.e^{-\mu t}}{(N-n)!} \quad , n = 1, 2, 3, ..., N\text{-}1 \text{ dan } t \geq 0 \quad \text{.............................(19)}$$

Kalau persamaan di atas disubtitusikan ke dalam persamaan (15) :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) \quad , \ n = 0$$

maka,

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu \frac{(\mu t)^{N-1}.e^{-\mu t}}{(N-1)!}$$

atau :

$$P_0(t) = \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{N-1}.e^{-\mu x}}{(N-1)!} dx + C.$$

Karena untuk $t = 0$ terdapat $P_0(t) = 0$, maka $C = 0$

sehingga,

$$P_0(t) = \int_0^t \frac{\mu(\mu x)^{N-1}.e^{-\mu x}}{(N-1)!} dx \quad \text{...(20)}$$

Dengan cara lain, $P_0(t)$ dapat dicari dengan jalan berikut :

Karena $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$

maka :

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{n=N} P_n(t)$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{n=N} \frac{(\mu t)^{N-n} . e^{-\mu t}}{(N-n)!} \qquad \text{.......(21)}$$

Sedangkan jumlah rata-rata satuan dalam antrian adalah :

$$E\left[\frac{n}{t}\right] = \sum_{n=1}^{n=r} \frac{n(\mu t)^{r-n} e^{-\mu t}}{(r-n)!}$$

Apabila t adalah variabel acak untuk memperlihatkan lamanya waktu melayani tiap satuan atau langganan, maka g(t) adalah fungsi kepadatan panjang waktu t untuk melayani tiap langganan, dimana $t \geq 0$, g(t) merupakan distribusi waktu pelayanan berbentuk eksponensial, yaitu :

$$g(t) = \mu \,.\, e^{-\mu t} \quad , t \geq 0 \qquad \text{.......(22)}$$

Oleh karena itu,

$$\text{Rata-rata waktu pelayanan} = \int_0^\infty t.g(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty t.\mu \,.\, e^{-\mu t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\mu}$$

Apabila seorang langganan atau satu satuan sedang dilayani pada waktu t kemudian sistim diperiksa pada waktu t+h, maka P(layanan tidak siap dalam selang waktu sepanjang h) = $e^{-\mu h}$. Untuk $h \to 0$, terdapat P(layanan tidak siap dalam selang waktu sepanjang h) = $1 - \mu h$ dan P(layanan siap dalam selang waktu sepanjang h) =

$1 - (1 - \mu h) = \mu h$.

Bersama-sama dengan distribusi waktu pelayanan eksponensial

$$g(t) = \mu \cdot e^{-\mu t} \quad , t \geq 0$$

dan

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} \cdot e^{-\mu t}}{(N-n)!} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, N\text{-}1$$

semuanya merupakan pola atau karakter pelayanan bentuk Poisson.

2.4 Model - Model Antrian

Suatu model antrian dapat dikembangkan melalui kombinasi populasi masukan seperti sumber-sumber langganan, mekanisme pelayanan dan karakteristik dari disiplin antrian. Oleh karena itu tidak mungkin dibicarakan semua model-model antrian secara keseluruhan. Pembicaraan hanya pada beberapa model antrian yang relevan yang secara umum diklasifikasikan berdasarkan format berikut ini.

Format umum , (a / b / c) : (d / e / f)

dengan :

a = Bentuk distribusi kedatangan, yaitu jumlah kedatangan pertambahan waktu.

b = Bentuk distribusi waktu pelayanan (pemberangkatan), yaitu selang waktu antara satuan-satuan yang dilayani (berangkat).

c = Jumlah satuan pelayanan paralel dalam sistem.

d = Disiplin pelayanan.

e = Jumlah maksimum yang diperkenankan berada dalam sistem (dalam pelayanan ditambah garis tunggu).

f = Besarnya populasi masukan.

Untuk huruf a dan b, digunakan kode-kode pengganti sebagai berikut :

M= distribusi kedatangan Poisson atau distribusi pelayanan (keberangkatan) eksponensial; juga sama dengan distribusi waktu antara kedatangan eksponensial atau distribusi satuan yang dilayani Poisson.

D = antar kedatangan atau waktu pelayanan tetap.

G = Distribusi umum pemberangkatan atau waktu pelayanan.

Untuk huruf c, digunakan bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah pelayanan paralel.

Untuk huruf d, digunakan kode-kode pengganti sebagai berikut :

1. FIFO atau FCFS = First-In, First-Out atau First-Come, First-Served
2. LIFO atau LCFS = Last-In, First-Out atau Last-Come, First-Served
3. SIRO = Service In Random Order
4. GD = General Service Disciplint

Misalnya jika terdapat model (M/M/1):(FIFO/∞/∞), ini berarti bahwa model tersebut menyatakan bahwa kedatangan didistribusikan secara Poisson, waktu pelayanan didistribusikan secara eksponensial, jumlah pelayanan adalah 1 unit atau 1 loket, disiplin antrian adalah first-in first-out, jumlah langganan boleh masuk dalam sistim antrian tidak berhingga, dan ukuran (besarnya) populasi masukan adalah tidak berhingga.

Meskipun demikian, kode-kode seperti tertera di atas tidak cukup untuk mencakup semua karakteristik dari sistem antrian yang begitu banyak. Disamping itu perlu diketahui beberapa istilah penting sebelum membicarakan beberapa model antrian yaitu:

1. Panjang garis tunggu = jumlah satuan atau layanan dalam sistem antrian.
2. Panjang antrian = jumlah langganan yang menunggu unuk dilayani, atau panjang garis tunggu dikurangi jumlah langganan yang sedang dilayani.

3.Waktu tunggu = waktu yang diperlukan antara kedatangan suatu satuan atau seorang langganan hingga dimulai pelayanan sesungguhnya.

2.4.1 Model (M/M/1):(FIFO/ ∞/∞) Sistem Saluran Tunggal

Dalam model ini hanya dibicarakan kasus dalam keadaan steady state. Hal ini berarti bahwa sistem antrian sudah berlangsung lama untuk mencapai keadaan steady state tersebut. Oleh karena itu, pembahasan hanya terhadap karakteristik operasi yang sudah stabil, atau dengan kata lain bahwa karakteristik operasinya tidak tergantung pada faktor waktu. Untuk model ini, perlu ditelaah beberapa karakteristik operasi sebagai berikut :

Intensitas Lalu Lintas

Intensitas lalu lintas ρ, dengan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ yaitu merupakan hasil bagi antara laju kedatangan dan laju pelayanan. Semakin besar harga ρ, semakin panjang antrian yang terjadi. Demikian juga sebaliknya, semakin kecil harga ρ semakin pendek antrian yang ada.

Periode Sibuk

Ketika suatu satuan tiba dalam sistem antrian, dia akan menemukan mekanisme pelayanan dalam keadaan sibuk sehingga harus menunggu, atau mekanisme pelayanan tidak dalam keadaan sibuk, sehingga dia segera mendapatkan pelayanan. Kalau mekanisme pelayanan sibuk, dikatakan bahwa sistem antrian sedang dalam periode sibuk. Peluang bahwa sistem antrian dalam keadaan sibuk pada saat sebarang, dinamakan peluang periode sibuk.

Peluang periode sibuk dari sistem antrian dengan pelayanan tunggal sama dengan intensitas lalu lintas. Karena itu, bila f(b) merupakan fungsi peluang periode sibuk, maka :

$$f(b) = \rho$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}$$

Distribusi Peluang dari Langganan dalam Sistem

Bila ρ merupakan peluang bahwa sistem antrian dalam keadaan sibuk, maka tentu $1-\rho$ merupakan peluang bahwa sistem antrian tidak dalam keadaan sibuk pada sebarang waktu. Artinya $1-\rho$ merupakan peluang bahwa sistem antrian tidak mempunyai pelanggan. Misalkan P_n merupakan peluang adanya n langganan dalam sistem antrian, maka :

$$P_0 = 1 - \rho.$$

Karena

$$P_n = \rho^n . P_0$$

maka

$$P_n = \rho^n (1 - \rho).$$

Jumlah Rata - Rata dalam Sistem

Misalkan $\bar{n}$ atau $E[n_t]$ berupa jumlah rata-rata langganan dalam sistem antrian, mencakup langganan yang menunggu dan mereka yang sedang dilayani, maka

$$E[n_t] = \bar{n}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \text{...(23)}$$

Bila $\rho \to 1$ atau jumlah laju kedatangan λ mendekati jumlah laju pelayanan μ maka jumlah rata-rata dalam sistem , $E[n_t]$ berkembang menjadi lebih besar. Bila $\lambda = \mu$ atau

$\rho = 1$, maka $E[n_t] = \infty$ atau jumlah langganan dalam sistem antrian menjadi besar tak berhingga.

Jumlah Rata - Rata dalam Antrian

Misalkan $E[n_w]$ sebagai jumlah rata-rata langganan dalam antrian, maka :

$$E[n_w] = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)$$

$$= \rho\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

Persamaan di atas diperoleh karena :

Panjang antrian = jumlah dalam sistem - 1, untuk $n > 0$.

Oleh karena itu,

$$E(n_w) = 0P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$= E(n_t) - (1 - P_0)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu}$$

sehingga

$$E(n_w) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

atau

$$E(n_w) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad \text{...(24)}$$

Jumlah Rata-rata Yang Menerima Layanan

Misalkan jumlah yang menerima layanan dinamakan $E(n_s)$, yang dapat dihitung dari jumlah rata-rata dalam sistem dikurangi jumlah rata-rata dalam antrian. Jadi :

$$E(n_s) = E[n_t] - E(n_w)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \rho$$

Waktu Rata-rata dalam Sistem

Misalkan N merupakan jumlah langganan dalam satu tahap tertentu dari sistem antrian, dan T merupakan waktu yang diperlukan satu satuan atau langganan untuk menyelesaikan tahap tersebut. Jika E(T) dan E(N) berturut-turut merupakan harga rata-rata dari T dan N, maka :

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda}$$

Hubungan ini dapat digunakan untuk menentukan waktu rata-rata dalam sistem, yaitu misalkan $E(T_t)$ merupakan waktu rata-rata dari satu satuan atau langganan yang akan menghabiskan waktunya dalam sistem.

Jadi :

$$E(T_t) = \frac{E(n_t)}{\lambda}$$

dimana $E(n_t)$ adalah jumlah rata-rata dalam sistem.

Karena $E(n_t) = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$, maka :

$$E(T_t) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad \text{...(25)}$$

Waktu Rata-rata Dalam Antrian

Misalkan $E(T_w)$ merupakan waktu rata-rata yang dihabiskan oleh suatu satuan atau langganan dalam antrian, maka :

$$E(T_w) = \frac{E(N_w)}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right) \qquad \text{...(26)}$$

Waktu Pelayanan Rata-rata

Misalkan $E(T_s)$ merupakan waktu rata-rata yang diperlukan oleh suatu satuan atau langganan untuk menerima pelayanan yang sebenarnya, maka :

$$E(T_s) = \frac{E(n_s)}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Persamaan di atas dapat diperoleh dari ketentuan bahwa :

$$E(T_s) = E(T_t) - E(T_w)$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu} \qquad \text{...(27)}$$

2.4.2 Model (M/M/c):(GD/ ∞/∞) Sistem Saluran Ganda

Salah satu cara untuk menurunkan rata-rata garis tunggu ialah dengan membuat saluran pelayanan bekerja lebih efektif. Sedangkan cara lain ialah dengan menambah jumlah saluran pelayanan. Kalau sistem antrian mempunyai lebih dari satu saluran, maka sistem antrian tersebut dikatakan sistem antrian saluran ganda. Seperti ditulis dalam model, karakteristik dari sistem ini ialah pelayanan atau saluran ganda, masukan Poisson, waktu pelayanan Eksponensial dan antrian tak berhingga.

Masa Sibuk

P_0 merupakan proporsi atau peluang waktu menganggur tidak saja untuk satu pelayanan tapi berlaku untuk semua pelayan atau sistem. Bila satu satuan berada dalam sistem, maka satu pelayan akan sibuk dan (c-1) pelayan akan menganggur. Bila dua satuan atau langganan berada dalam sisteam, maka dua pelayan akan sibuk dan (c-2) pelayan lainnya akan menganggur. Demikian seterusnya, hingga $n \geq c$ dan kemudian semua pelayan akan sibuk.

Selanjutnya dapat dilihat laju pelayanan rata-rata μ_n , diperoleh dengan cara :

$$\mu_n = \begin{cases} n.\mu , & 0 \leq n \leq c \\ \\ c.\mu , & n \geq c \end{cases}$$

Karena mekanisme pelayanan memuat lebih dari satu saluran pelayanan dengan anggapan tiap saluran mempunyai laju sama dengan μ, maka laju pelayanan seluruh mekanisme pelayanan di dalam sistem ialah μ dikalikan dengan jumlah saluran c, yaitu $c.\mu$. Karena itu $c.\mu$ disebut laju pelayanan mekanisme dan μ disebut laju pelayanan saluran.

Dengan menggunakan rumus untuk c = 1, maka $P_n = \rho \cdot P_{n-1}$ dapat diturunkan untuk berbagai harga n.

$n = 1,\qquad P_1 = \rho \cdot P_0 \quad \text{dengan } \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$n = 2,\qquad P_2 = \rho \cdot P_1\ , \text{ dengan } \rho = \dfrac{\lambda}{2\mu}$

$$= \frac{\lambda}{2\mu} P_1$$

$$= \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$

$$= \frac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{2} \cdot P_0$$

$n = 3,\qquad P_3 = \rho \cdot P_2 \quad \text{dengan } \rho = \dfrac{\lambda}{3\mu}$

$$= \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$

$$= \frac{\lambda^3}{3.2.\mu^3} P_0$$

$$= \frac{\left(\lambda/\mu\right)^3}{3.2} \cdot P_0$$

dan seterusnya, sehingga :

$$P_n = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} P_0 \qquad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots, c$$

$$P_n = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{c!.\,c^{n-c}} P_0 \quad \text{untuk } n = c, c+1, c+2,... \qquad \text{..........(28)}$$

dengan

$$P_0 = \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!}\right\} + \frac{\left(\lambda/\mu\right)^c}{c!} \cdot \frac{1}{1-\left(\lambda/c\mu\right)}}$$

$$= \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!}\right\} + \frac{\rho^c}{c! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{c}\right)}}$$

Dalam hal ini ketentuan yang harus ditaati adalah :

$$\lambda < 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\lambda}{c\mu} < 1$$

Karakteristik Operasi

Perhitungan terhadap karakteristik operasi dari sistem antrian saluran ganda sama seperti pada sistem saluran tunggal.

Jumlah Rata-rata Dalam Sistem

Dalam sistem saluran tunggal diketahui bahwa :

$$E(n_t) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Peluang} \\ \text{masa sibuk}\end{array}\right] \left[\frac{\text{Laju kedatangan}}{\text{Laju pelayanan} - \text{Laju kedatangan}}\right] + \left[\frac{\text{Laju kedatangan}}{\text{Laju pelayanan}}\right]$$

Karena laju pelayanan sistem saluran ganda adalah c.μ maka :

$$E(n_t) = f(b)\left(\frac{\lambda}{C\mu - \lambda}\right) + \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{..(29)}$$

dengan :

f(b) = Peluang masa sibuk untuk saluran ganda.

$\frac{\lambda}{\mu}$ = Jumlah rata-rata langganan dalam mekanisme pelayanan .

Harga ini juga berlaku untuk saluran tunggal.

Jumlah rata-rata dalam antrian

Untuk sistem saluran tunggal, diketahui bahwa

$$E(n_w) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}.\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}\text{peluang} \\ \text{masa sibuk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\text{laju kedatangan}}{\text{laju pelayanan - laju kedatangan}}\end{bmatrix}$$

Karena laju pelayanan saluran harus diubah ke laju pelayanan mekanisme, maka :

$$E(n_w) = f(b).\left(\frac{\lambda}{C\mu - \lambda}\right) \quad \text{..(30)}$$

dengan f(b) = peluang masa sibuk untuk saluran ganda

Waktu Rata-rata Dalam Sistem

Dalam saluran tunggal, diketahui :

$$E(T_t) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)+\frac{1}{\mu}$$

$$= \begin{bmatrix}\text{peluang}\\ \text{masa sibuk}\end{bmatrix}\left[\frac{1}{\text{Laju pelayanan} - \text{Laju kedatangan}}\right]+\left[\frac{1}{\text{Laju pelayanan}}\right]$$

Karena laju pelayanan harus diubah ke laju pelayanan mekanisme, maka :

$$E(T_t) = f(b)\left(\frac{1}{c\mu-\lambda}\right)+\frac{1}{\mu}$$

dengan f(b) = peluang masa sibuk untuk saluran ganda.

Waktu Menunggu Rata-rata (waktu rata-rata dalam antrian)

Dalam sistem saluran tunggal :

$$E(T_w) = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}\text{peluang}\\ \text{masa sibuk}\end{bmatrix}\left[\frac{1}{\text{Laju pelayanan} - \text{Laju kedatangan}}\right]$$

Karena laju pelayanan saluran harus diubah ke laju pelayanan mekanisme, maka :

$$E(T_w) = f(b)\left(\frac{1}{c\mu-\lambda}\right)$$

dengan f(b) = peluang masa sibuk untuk saluran ganda.

Waktu Pelayanan Rata-rata

Waktu pelayanan rata-rata $E(T_s)$ pada sistem antrian tunggal maupun sistem antrian ganda mempunyai harga yang sama yaitu $\frac{1}{\lambda}$, karena laju pelayanan pada sistem antrian tunggal adalah sama dengan laju pelayanan pada sistem antrian ganda, sehingga :

$$E(T_s) = \frac{1}{\lambda}$$

Peluang Masa Sibuk

Peluang masa sibuk pada sistem saluran ganda dapat dihitung sebagai berikut :

$$f(b) = P[\, n \geq c \,]$$

$$= \frac{\rho^c \mu c}{c!(\mu c - \lambda)} P_0$$

$$= \frac{\rho^c}{c!\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)} P_0$$

Sementara itu harga-harga f(b) dapat dicari dalam tabel untuk tiap harga ρ dan c yang sesuai.

2.5 Uji Goodness of Fit

Suatu cara yang cepat untuk memeriksa apakah suatu himpunan data mentah tertentu sesuai dengan distribusi teoritis tertentu adalah membandingkan secara grafik distribusi empiris kumulatif dengan fungsi kepadatan kumulatif yang bersesuaian dari distribusi teoritis yang bersangkutan. Jika kedua fungsi tersebut tidak memperlihatkan deviasi yang berlebihan, terdapat kemungkinan yang cukup besar bahwa distribusi teoritis itu sesuai dengan data mentah tersebut.

Uji statistik lain yang berlaku baik untuk variabel acak diskrit maupun kontinu, adalah **Uji Chy Kuadrat.** Uji ini didasari oleh perbandingan fungsi kepadatan probabilitas daripada fungsi kepadatan kumulatif. Langkah pertama dalam prosedur Chy Kuadrat adalah mengembangkan sebuah histogram frekuensi. Dengan menggambarkan histogram frekuensi, secara visual dapat diputuskan fungsi kepadatan teoritis mana yang paling sesuai dengan data mentah dalam bentuk histogram tersebut.

Uji Chy Kuadrat didasari oleh pengukuran jumlah deviasi antar fungsi kepadatan empiris dan teoritis. Untuk mencapai tugas ini, anggap $[I_{n-1}, I_n]$ mewakili batas-batas interval n sebagaimana didefinisikan dalam distribusi empiris, dan asumsikan bahwa f(t) adalah fungsi kepadatan teoritis yang dihipotesakan. Dengan diketahui sampel data mentah berukuran N, maka frekuensi teoritis yang berkaitan dengan interval n dihitung sebagai :

$$e_n = N \int_{I_{t-1}}^{I_t} f(t)\, dt \qquad n = 1,2,3,\ldots,m$$

dengan m adalah jumlah sel yang dipergunakan dalam mengembangkan fungsi kepadatan empiris.

Dengan diketahui e_n sebagaimana dihitung di atas dan asumsi bahwa f_n frekuensi empiris yang diamati di sel n, sebuah ukuran deviasi antara frekuensi empiris dan yang diamati dihitung sebagai

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^{m} \frac{(f_n - e_n)^2}{e_n},$$

dengan χ^2 cenderung Chy Kuadrat secara asymtot $m \rightarrow \infty$. Angka derajat kebebasan dari Chy Kuadrat adalah m-k-1, dengan k adalah jumlah parameter yang diestimasi dari data mentah untuk dipergunakan dalam mendefinisikan distribusi teoritis yang bersangkutan.

Dengan menganggap $\chi^2_{m-k-1}(\alpha)$ sebagai nilai Chy Kuadrat untuk derajat kebebasan m-k-1 dan spesifikasi tingkat signifikan α, aplikasi dari uji χ^2 menyatakan bahwa hipotesa data mentah yang diamati ditarik dari distribusi teoritis f(t) diterima jika $\chi^2 < \chi^2_{m-k-1}(\alpha)$, jika tidak hipotesa tersebut ditolak. Peraturan umum yang disarankan adalah bahwa frekuensi teoritis yang diperkirakan dalam setiap interval tidak kurang dari 5. Ini biasanya dipecahkan dengan menggabungkan beberapa interval sampai peraturan tersebut dipenuhi.