BAB II

PERSAMAAN SIMULTAN

Berbeda dengan persamaan Regresi Linier, dimana pemakaian Metode Kuadrta Terkecil (Ordinary Least Square) mampu memberikan estimasi yang konsisten, maka pada persamaan simultan Metode Kuadrat Terkecil tidak lagi memberikan suatu estimasi yang konsisten. Hal ini disebabkan karena variabel-variabel yang dalam setiap persamaan akan berkorelasi dengan error. Padahal pengetrapan Metode Kuadrat Terkecil, baru akan menghasilkan estimasi yang tak bias dan dengan standrat error yang kecil (minimum) kalau didasari atas asumsi bahwa error tidak berkorelasi dengan variabel-variabelnya.

Misalnya persamaan regresi seperti pada Bab 1:

$$Y_{1t} = B_{10} + B_{20}X_{1t} + \varepsilon_{1t} \qquad (2.1)$$

$$X_{1t} = Y_{1t} + I_{1t} \qquad (2.2)$$

dimana:

Y_{1t}, X_{1t} = variabel endogen

I_{1t} = variabel eksogen

B_{10}, B_{20} = parameter dan $0 < B_{20} < 1$.

ε_{1t} = error

Untuk mencari estimasi dari persamaan tersebut, kita pakai asumsi-asumsi pada persamaan regresi linier, yaitu $E(\varepsilon_{1t}) = 0$, $E(\varepsilon^2_{1t}) = \sigma^2$, $E(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{1t+j}) = 0$ (untuk t = j), kov $(I_{1t}, \varepsilon_{1t}) = 0$.

Akan dibuktikan bahwa X_{1t} berkorelasi dengan ε_{1t}, dan kemudian b_{20} adalah estimator untuk B_{20} yang tidak konsisten.

Kita subtitusi persamaan (2.1) ke persamaan (2.2).

$$X_{1t} = B_{10} + B_{20}X_{1t} + \varepsilon_{1t} + I_{1t}$$

$$(1 - B_{20}) X_{1t} = B_{10} + I_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_{1t} = \frac{B_{10}}{1 - B_{20}} + \frac{I_{1t}}{1 - B_{20}} + \frac{\varepsilon_{1t}}{1 - B_{20}} \quad (2.3)$$

Sehingga didapat:

$$E (X_{1t}) = \frac{\hat{B}_{10}}{1 - \hat{B}_{20}} + \frac{I_{1t}}{1 - \hat{B}_{20}} \quad (2.4)$$

karena $E (\varepsilon_{1t}) = 0$, dan I_{1t} merupakan variabel yang non-random. Nilai dari I_{1t} sudah ditentukan sebelumnya, sehingga $E (I_{1t}) = I_{1t}$. $\hat{}$ parameter yang diestimasi.

Apabila persamaan (2.3) - (2.4) didapat:

$$X_{1t} - E (X_{1t}) = \frac{\varepsilon_{1t}}{1 - B_{20}} \quad (2.5)$$

Sehingga:

$$\text{kov} (X_{1t},\varepsilon_{1t}) = E \left[X_{1t} - E (X_{1t})\right]\left[\varepsilon_{1t} - E (\varepsilon_{1t})\right]$$

$$= \frac{E (\varepsilon_{1t}^2)}{1 - B_{20}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1 - B_{20}} \quad (2.6)$$

Karena kov (X_{1t}, ε_{1t}) $\neq 0$, ini berarti bahwa variabel X_{1t} tidak bebas terhadap error ε_{1t}. Jadi X_{1t} dan ε_{1t} berkorelasi. Hal ini melanggar asumsi model regresi linier. Di dalam situasi seperti ini, hasil estimasi parameter tidak akan konsisten. Sedangkan suatu estimator disebut konsisten jika Probabilitas Limit (disingkat P.lim), sama dengan nilai parameternya.

Jika b_{20} merupakan estimasi dari $\hat{B}_{20}$, maka untuk membuktikan bahwa b_{20} merupakan estimator yang tak konsisten adalah sebagai berikut:

$$b_{20} = \frac{\sum_{t=1}^{n} (Y_{1t} - \bar{Y})(X_{1t} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{n} (X_{1t} - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} (Y_{1t} - \bar{Y}) x_{1t}}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_{1t} x_{1t}}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2} \qquad (2.7)$$

dimana $x_{1t} = X_{1t} - \bar{X}$

Karena $Y_{1t} = B_{10} + B_{20} X_{1t} + \varepsilon_{1t}$, maka:

$$b_{20} = \frac{\sum_{t=1}^{n} (B_{10} + B_{20} X_{1t} + \varepsilon_{1t}) x_{1t}}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2}$$

$$= \bar{B}_{20} + \frac{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{1t}\, x_{1t}}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2}$$

$$= \bar{B}_{20} + \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{1t}\, \varepsilon_{1t}}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2}$$

dimana:

$$\frac{\sum_{t=1}^{n} X_{1t}\, \varepsilon_{1t}}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2} = 1$$

Sekarang dibuktikan bahwa $\underset{n\to\infty}{\text{P.lim}}\ b_{20} \neq \bar{B}_{20}$. Karena $\bar{B}_{20}$ parameter, maka $\underset{n\to\infty}{\text{P.lim}}\ \ddot{B}_{20} = B_{20}$.

$$\underset{n\to\infty}{\text{P.lim}}\ b_{20} = \underset{n\to\infty}{\text{P.lim}}\ B_{20} + \underset{n\to\infty}{\text{P.lim}} \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{1t}\, \varepsilon_{1t}}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2}$$

$$= B_{20} + \underset{n\to\infty}{\text{P.lim}} \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{1t}\varepsilon_{1t}/N}{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2/N}$$

$$= B_{20} + \frac{\underset{n\to\infty}{\text{P.lim}}\left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}\varepsilon_{1t}/N\right)}{\underset{n\to\infty}{\text{P.lim}}\left(\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2/N\right)} \qquad (2.8)$$

Untuk $n\to\infty$, maka kovarian dari $X_{1t}\varepsilon_{1t}$ akan meliputi seluruh populasi. Kovarian dari suatu populasi merupakan konstanta, maka harga $\underset{n\to\infty}{\text{P.lim}}$ kov $(X_{1t}, \varepsilon_{1t})=$

$$E\left[(X_{1t} - E(X_{1t}))(\varepsilon_{1t} - E (\varepsilon_{1t})\right] = \sigma^2/ (1 - B_{20})$$

dan untuk varian $X_{1t}^2 =$

$$E(X_{1t} - E(X_{1t}))^2 = \sigma_x^2$$

Jadi untuk persamaan (2.8) dapat ditulis:

$$P.\lim b_{20} = B_{20} + \frac{\sigma^2/(1 - B_{20})}{\sigma_x^2}$$

$$= B_{20} + \frac{1}{1 - B_{20}} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \qquad (2.9)$$

σ^2 dan σ_x^2 dalam bentuk kuadrat, dan diambil $0 < B_{20} < 1$. Jadi $P.\lim b_{20} < B_{20}$. Sehingga dikatakan bahwa b_{20} merupakan estimator yang tak konsisten, dan selalu bias meskipun sampel diperbesar.

2.1. Bentuk Reduksi

Misalnya, pada bidang ekonomi kita mempunyai data tentang P (daftar hatga) dan Q (daftar barang) tanpa ada keterangan lainnya seperti pendapatan, pembeli, harga sebelumnya dan keadaan cuaca. Maka permasalahannya: bagaimana hanya dengan data itu, kita tahu bahwa suatu persamaan yang sedang kita hadapi benar-benar persamaan permintaan atau persamaan penawaran ?

Dengan kata lain, jika kita sedang menghadapi persamaan permintaan, apakah yang kita hadapi benar-benar persamaan permintaan, bukan persamaan lain ? Disinilah identifikasi kita perlukan.

Dalam suatu himpunan persamaan simultan, pada setiap persamaan selalu muncul dua jenis variabel, yaitu variabel endogen dan variabel eksogen. Variabel endogen, nilainya selalu berubah dari waktu ke waktu. Sedangkan variabel eksogen sering disebut juga variabel yang ditentukan terlebih dahulu (predetermined variabels). Kadang-kadang variabel eksogen disebut juga variabel kebijakan (policy variabels).

Variabel yang nilainya ditentukan terlebih dahulu bisa dibagi menjadi dua katagori. Yaitu pertama: eksogen, baik yang baru ditetapkan maupun yang lampau (laggeg exogeneus). Dan yang kedua: variabel endogen lampau (lagged endogeneus). Jadi misalnya X_{1t} = variabel eksogen baru, $X_{1(t-1)}$ = variabel eksogen lampau dan $Y_{1(t-1)}$ = variabel endogen lampau satu periode. Jika nilai $Y_{1(t-1)}$ sudah diketahui pada saat t, maka $Y_{1(t-1)}$ dianggap sebagai variabel yang ditentukan sebelumnya. Dalam hal yang seperti ini error ε_{1t} tidak berkorelasi secara berurutan dengan $\varepsilon_{1(t-1)}$. Sebab kalau tidak demikian $Y_{1(t-1)}$ akan berkorelasi dengan ε_{1t}. Sehingga kita tidak dapat memperlakukan $Y_{1(t-1)}$ sebagai Predetermined variabel.

Dengan kata lain, pada saat t, variabel "eksogen baru", variabel "eksogen lampau" dan variabel "endogen lampau", nilainya sudah diketahui atau ditentukan diluar model.

Persamaan simultan, secara keseluruhan dikenal sebagai persamaan yang bersifat struktural, atau bersifat perilaku (behavior). Hal ini disebabkan persamaan tadi bisa menggambarkan struktural dari suatu perekonomian atau perilaku para ekonom, misalnya produser, konsumen, penanam modal, penabung dan lain-lain. Misalnya kalau harga naik produsen akan menaikkan produksinya, sebaliknya konsumen akan mengurangi permintaan.

Dari persamaan struktural dapat diperoleh persamaan bentuk reduksi dan koefisien bentuk reduksi, yaitu persamaan yang menyatakan hubungan antara satu variabel endogen hanya dengan variabel eksogen dan error.

Perhatikan persamaan berikut ini:

$$Y_{1t} = B_{10} + B_{20}X_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_{1t} = Y_{1t} + I_{1t}$$

dimana:

Y_{1t}, X_{1t} = variabel endogen

I_{1t} = variabel eksogen

B_{10}, B_{20} = parameter

ε_{1t} = error

Kalau kita subsitusi persamaan (2.1) ke (2.2), maka akan kita peroleh:

$$X_{1t} = (B_{10} + B_{20}X_{1t} + \varepsilon_{1t}) + I_{1t}$$

$$X_{1t} = B_{10} + B_{20}X_{1t} + I_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$X_{1t} - B_{20}X_{1t} = B_{10} + I_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

$$(1 - B_{10}) X_{1t} = B_{10} + I_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

Bentuk diatas bisa ditulis:

$$X_{1t} = H_0 + H_1 I_{1t} + W_{1t} \tag{2.10}$$

dimana:

$$H_0 = \frac{B_{10}}{1 - B_{20}}$$

$$H_1 = \frac{1}{1 - B_{20}} \tag{2.11}$$

$$W_{1t} = \frac{\varepsilon_{1t}}{1 - B_{20}}$$

Persamaan (2.10) disebut persamaan bentuk reduksi yaitu suatu persamaan yang menunjukkan hubungan variabel endogen X_{1t} dengan hanya variabel eksogen I_{1t} dan error W_{1t}. H_0, H_1: koefisien (parameter) bentuk reduksi yang merupakan kombinasi non-linier dari koefisien struktural.

Dengan memasukkan persamaan (2.10) ke persamaan (2.1) didapat:

$$Y_{1t} = H_2 + H_3 I_{1t} + W_t \tag{2.12}$$

dimana:

$$H_2 = \frac{B_{10}}{1 - B_{20}}$$

$$H_3 = \frac{B_{20}}{1 - B_{20}} \tag{2.13}$$

$$W_{1t} = \frac{\varepsilon_{1t}}{1 - B_{20}}$$

Parameter bentuk reduksi sperti H_2 dan H_3 juga dikenal sebagai dampak pelipatgandaan (impact multipliers), sebab parameter-parameter tersebut mengukur dampak / pengaruh pada variabel endogen, disebabkan adanya perubahan sebesar satu satuan pada variabel endogen.

Kalau dalam persamaan ini variabel eksogen I_{1t} nilainya naik Rp 1 juta dan parameter B_{20} = 0,8 maka

$$H_1 = \frac{1}{1 - 0{,}8} = \frac{1}{0.2} = 5.$$

Ini artinya kenaikan I_{1t} naik Rp 1 juta, maka X_{1t} akan meningkat sebesar 5 kali lipat. Demikian juga halnya dengan persamaan (2.13) menunjukkan bahwa nilai

$H_3 = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 4$, artinya kalau I_{1t} bertambah 1 satuan maka akhirnya secara tidak langsung Y_{1t} akan bertambah 4 kali lipat.

Dalam persamaan (2.2) nampak suatu bentuk persamaan yang menunjukkan nilai keseimbangan. Dimana pada persamaan tersebut menunjukkan, satu variabel endogen sama dengan satu variabel endogen dan satu variabel eksogen. Jika keseimbangan/persamaan ini salah satu variabel berubah, maka variabel-variabel lainnya dengan segera mengadakan penyesuaian.

Dampak pelipatgandaan ini kemudian akan memberikan tingkat/laju perubahan daripada nilai kesimbangan ketika keadaan keseimbangan diganggu oleh perubahan yang terjadi pada nilai variabel eksogen. Didalam ekonomi variabel eksogen ini dibawah pengawasan pemerintah, misalnya tarif pajak, bungan bank, harga BBM, subsidi dan sebagainya.

Secara umum, persamaan simultan digambarkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
Y_{1t} &= B_{12}Y_{2t} + B_{13}Y_{3t} + B_{14}Y_{4t} + \dots + B_{1M}Y_{Mt} \dots \\
&\quad + D_{11}X_{1t} + D_{12}X_{2t} + \dots + D_{1k}X_{kt} + \varepsilon_{1t} \\
Y_{2t} &= B_{21}Y_{1t} + \dots + B_{23}Y_{3t} + \dots + B_{2M}Y_{Mt} \dots \\
&\quad + D_{21}X_{1t} + D_{22}X_{2t} + \dots + D_{2k}X_{kt} + \varepsilon_{2t} \\
Y_{3t} &= B_{31}Y_{1t} + B_{32}Y_{2t} + \dots + B_{3M}Y_{Mt} \dots \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad + D_{31}X_{1t} + D_{32}X_{2t} + \dots + D_{3k}X_{kt} + \varepsilon_{3t} \\
& \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
Y_{Mt} &= B_{Mt}Y_{1t} + B_{M2}Y_{2t} + \dots + B_{M(M-1)}Y_{M-1,t} \dots \\
&\quad + D_{M1}X_{1t} + D_{M2}X_{2t} + \dots + D_{Mk}X_{kt} + \varepsilon_{Mt}
\end{aligned}
$$

dimana:

$Y_{1t}, Y_{2t}, \dots Y_{Mt}$ = M variabel endogen bersifat random.

$X_{1t}, X_{2t}, \dots X_{kt}$ = k variabel eksogen bersifat nonrandom.

$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots \varepsilon_{Mt}$ = M error merupakan variabel random dengan nilai $E(\varepsilon_{mt}) = 0$

$t = 1, 2, 3 \dots n$ = observasi

B = koefisien variabel endogen

D = koefisien variabel eksogen.

Dalam prakteknya, tidak semua variabel harus muncul.