BAB III

OPERATOR

## 3.1. OPERATOR LINEAR DAN OPERATOR ADJOINT

### DEFINISI 3.1.1.

Fungsi T yang mengawankan setiap elemen $f \in D$ sedemikian hingga $Tf = g \in H$ disebut operator dalam ruang H.

### DEFINISI 3.1.2.

Operator identitas yaitu operator yang memetakan setiap vektor ke dirinya sendiri, ditunjukkan oleh E.

### DEFINISI 3.1.3.

Jika operator T merupakan pemetaan satu-satu $D \longrightarrow \Delta$ maka terdapat invers yang memetakan $\Delta \longrightarrow D$ Operator invers ditunjukkan dengan simbol $T^{-1}$ dan $T^{-1}g = f$ jika dan hanya jika $f = Tg$. Selanjutnya :

$$D_{T^{-1}} = \Delta_T \quad , \quad \Delta_{T^{-1}} = D_T$$

di mana D = domain dan $\Delta$ range.

### DEFINISI 3.1.4.

Operator T dari ruang Hilbert H ke dirinya sendiri disebut operator linear bila memenuhi sifat :

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$$

u,v dalam H dan $\alpha$, $\beta$ skalar.

DEFINISI 3.1.5.

Suatu operator T terbatas pada domainnya ( $D_T$ ) jika untuk setiap $u \in D_T$ , terdapat konstanta c sedemikian hingga $\| Tu \| \leqslant c \, \| u \|$

Norm T didefinisikan :

$$\| T \| = \sup_{\| u \| \neq 0} \frac{\| Tu \|}{\| u \|} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

atau :

$$\| T \| = \sup_{\| u \| = 1} \| Tu \|$$

DEFINISI 3.1.6.

Misal $T : H_1 \longrightarrow H_2$ operator linear terbatas di mana $H_1$ dan $H_2$ ruang Hilbert.

Maka operator Hilbert-adjoint $T^*$ dari T adalah operator

$$T^* : H_2 \longrightarrow H_1$$

sedemikian hingga untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$

$$\langle Tx , y \rangle = \langle x , T^* y \rangle$$

Jika T terbatas dan $T^* = T$ maka T self adjoint.

TEOREMA 3.1.1.

Jika $\langle v_1 , w \rangle = \langle v_2 , w \rangle$ untuk setiap w dalam inner product X, maka $v_1 = v_2$ .

Pada khususnya $\langle v_1 , w \rangle = 0$ untuk setiap $w \in X$ berarti $v_1 = 0$.

BUKTI :

Ditentukan untuk setiap w.

$$\langle v_1 - v_2 , w \rangle = \langle v_1 , w \rangle - \langle v_2 , w \rangle = 0$$

untuk :

$w = v_1 - v_2$ diberikan $\| v_1 - v_2 \|^2 = 0$

karena itu $v_1 - v_2 = 0$ sedemikian hingga $v_1 = v_2$.

Pada khususnya :

$\langle v_1 , w \rangle = 0$ dengan $w = v_1$ deberikan

$\| v_1 \|^2 = 0$ sehingga $v_1 = 0$.

TEOREMA 3.1.2.

Misal $H_1$ , $H_2$ ruang Hilbert.

$S : H_1 \longrightarrow H_2$

$T : H_1 \longrightarrow H_2$

Operator linear terbatas dan $\alpha$ suatu skalar, maka :

a. $\langle T^* y , x \rangle = \langle y , Tx \rangle$ , $x \in H_1$ , $y \in H_2$

b. $(S + T)^* = S^* + T^*$

c. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

d. $(T^*)^* = T$

e. $( S T )^* = T^* S^*$ $\quad ( H_1 = H_2 )$

**BUKTI :**

a. Menurut definisi 3.1.6. didapat :

$$\langle Tx , y \rangle = \langle x , T^* y \rangle$$

Menurut definisi 2.4.1. maka :

$$\overline{\langle Tx , y \rangle} = \overline{\langle x , T^* y \rangle}$$

sehingga $\langle y , Tx \rangle = \langle T^* y , x \rangle$ atau

$$\langle T^* y , x \rangle = \langle y , Tx \rangle$$

b. Menurut definisi 3.1.6. untuk setiap x dan y

$$\begin{aligned} \langle x , ( S + T )^* y \rangle &= \langle ( S + T )x , y \rangle \\ &= \langle Sx + Tx , y \rangle \\ &= \langle Sx , y \rangle + \langle Tx , y \rangle \\ &= \langle x , S^* y \rangle + \langle x , T^* y \rangle \\ &= \langle x , ( S^* + T^* )y \rangle \end{aligned}$$

sesuai dengan teorema 3.1.1. didapat :

$$( S + T )^* = S^* + T^*$$

c. Menurut definisi 3.1.6. didapat :

$$\langle ( \alpha T )x , y \rangle = \langle x , ( \alpha T )^* y \rangle$$

menurut definisi 2.4.1.

$$\overline{\langle ( \alpha T )x , y \rangle} = \overline{\langle x , ( \alpha T )^* y \rangle}$$

Sehingga :

$$\langle y , (\alpha T)x \rangle = \langle (\alpha T)^* y , x \rangle$$

$$\langle (\alpha T)^* y , x \rangle = \langle y , (\alpha T)x \rangle$$
$$= \bar{\alpha} \langle y , Tx \rangle$$

Dari $\langle y , Tx \rangle = \langle T^* y , x \rangle$

Maka $\langle (\alpha T)^* y , x \rangle = \bar{\alpha} \langle T^* y , x \rangle$
$$= \langle \bar{\alpha} T^* y , x \rangle$$

Sesuai dengan teorema 3.1.1. didapat :

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

d. $( T^* )^*$ atau $T^{**}$

Menurut definisi 3.1.6. maka untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$

$$\langle ( T^* )^* x , y \rangle = \langle x , T^* y \rangle$$

Menurut (a) $\langle T^* y , x \rangle = \langle y , Tx \rangle$ dan menurut definisi 2.4.1.

$$\overline{\langle T^* y , x \rangle} = \overline{\langle y , Tx \rangle}$$

$$\langle x , T^* y \rangle = \langle Tx , y \rangle$$

maka :

$$\langle ( T^* )^* x , y \rangle = \langle Tx , y \rangle$$

sesuai dengan teorema 3.1.1.

$$( T^* )^* = T$$

e. Menurut definisi 3.1.6.

$$\langle x , ( ST )^* y \rangle = \langle ( ST )x , y \rangle$$
$$= \langle Tx , S^* y \rangle$$
$$= \langle x , T^* S^* y \rangle$$

sesuai dengan teorema 3.1.1.

$$( ST )^* = T^* S^*$$

CONTOH 3.1.1.

Misal H ruang Hilbert dan a skalar.

Operator T dari H ke H sedemikian hingga Tu = au

Akan dibuktikan T merupakan operator linear.

Ambil $\alpha$, $\beta$ skalar dan $u, v \in H$

maka :

$$T ( \alpha u + \beta v ) = a ( \alpha u + \beta v )$$
$$= a \alpha u + a \beta v$$
$$= \alpha ( au ) + \beta ( av )$$
$$= \alpha Tu + \beta Tv$$

sehingga memenuhi definisi 3.1.6.

Maka T merupakan operator linear.

CONTOH 3.1.2.

Operator nol dinyatakan 0. Tu = 0.u = 0 untuk setiap $u \in H$

Misal $\alpha$, $\beta$ skalar dan $f, g \in H$.

$$T ( f \alpha + g \beta ) = 0 . ( f \alpha + g \beta )$$

$$= 0.f\alpha + 0.g.\beta$$

$$= \alpha(0.f) + \beta(0.g)$$

$$= \alpha T(f) + \beta T(g)$$

$$= \alpha.0 + \beta.0 = 0$$

$$\|T\| = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \frac{\|0\|}{\|u\|} = 0$$

Operator tersebut linear dan punya norm 0.

<u>CONTOH 3.1.3.</u>

Diberikan $A : R^n \longrightarrow R^n$ suatu operator, di mana perkalian setiap vektor suatu bilangan real untuk matrik M berukuran n x n , sedemikian hingga :

$$A(x) = Mx \quad \text{untuk } x \in R^n$$

Untuk $M^t$ matrik yang berkorespondensi dengan operator adjoint $A^*$.

Diambil : $x = e_r$ dan $e_s$, dimana $e_i$ adalah vektor unit dengan 1 dalam elemen ke-i dan lainnya 0.

$M^t_{rs} = M_{sr}$ , sehingga $M^t$ transpose dari M.

Dimisalkan :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

maka :

$$M^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = Mx = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\langle A(x), y \rangle = (4, 8, 9)(0, 0, 1)$$
$$= (0 + 0 + 9) = 9$$

$$A^*(y) = M^t y = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\langle x , A^*(y) \rangle = (0, 0, 1)(6, 1, 9)$$
$$= 0 + 0 + 9 = 9$$

sehingga didapat :

$$\langle A(x) , y \rangle = \langle x , A^*(y) \rangle$$

Jadi didapat operator adjoint $A^*$.

CONTOH 3.1.4.

Operator identitas E adalah operator yang didefinisikan oleh $T(u) = E.u = u$ untuk $\forall\, u \in H$.

Operator ini merupakan operator linear.

Misal : $\alpha$, $\beta$ skalar dan $f, g \in H$.

$$T(f\alpha + g\beta) = E(f\alpha + g\beta) = E.f.\alpha + E.g.\beta$$
$$= \alpha(E.f) + \beta(E.g)$$
$$= \alpha\, T(f) + \beta\, T(g)$$