BAB II

RUANG HILBERT

2.1. RUANG LINEAR

DEFINISI 2.1.1.

Suatu ruang vektor R^n di mana vektor-vektor u,v,.... merupakan suatu pasangan n-tuples dan α merupakan skalar yang memenuhi axioma sebagai berikut :

1. Jika u dan v dalam R^n maka u+v di dalam R^n
2. $u+v = v+u$
3. $u+(v+w) = (u+v)+w$
4. Terdapat vektor 0 dalam R^n sedemikian hingga $0+u = u+0 = u$ untuk semua u dalam R^n
5. Untuk setiap u dalam R^n, terdapat -u dalam R^n sedemikian hingga $u+(-u)=(-u)+u=0$
6. Jika α sebarang bilangan riil dan u sebarang dalam R^n, maka αu dalam R^n
7. $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$
8. $(\alpha+\beta) u = \alpha u + \beta u$
9. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
10. $1u=u$

Dalam aljabar elementer sering dijumpai ruang vektor R^n yang terdiri dari pasangan n-tuples dari bilangan riil. Jumlahan vektor dan perkalian skalar dinyatakan sebagai :

$$u = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots\ldots, \varepsilon_n)$$
$$v = (\eta_1, \eta_2, \qquad , \eta_n)$$

di mana α adalah sebarang bilangan riil maka ruang vektor ini dinyatakan sebagai :

$$u + v = (\varepsilon_1 + \eta_1 , \varepsilon_2 + \eta_2 , \ldots\ldots, \varepsilon_n + \eta_n)$$

$$\alpha u = (\alpha \varepsilon_1 , \alpha \varepsilon_2 , \ldots\ldots, \alpha \varepsilon_n)$$

$$0 = (0,0,\ldots\ldots\ldots,0)$$

$$-u = (- \varepsilon_1 , - \varepsilon_2 , \ldots\ldots, - \varepsilon_n)$$

DEFINISI 2.1.2.

Ditentukan set R darielemen u,v,w,... (vektor-vek - tor) merupakan ruang linear jika :

a. Ada operasi penjumlahan

1. $u,v \in R$ sedemikian hingga $u + v \in R$
2. $u + v = v + u$
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. $0 \in R$ sedemikian hingga $0 + u = u + 0 = u$
5. $\forall\, u \in R \;\exists\, -u \in R$ sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$

b. Perkalian dari elemen-elemen R dari bilangan (real atau komplex) α , β , γ , ... didefinisikan sebagai berikut :

1. $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$
2. $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
3. $\alpha (\beta u) = (\alpha \beta) u$

4. $1\ u = u$

5. $0\ u = 0$

DEFINISI 2.1.3.

Himpunan m buah vektor-vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$ disebut bergantung linear (linearly dependent) bila ter - dapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m$ yang tidak semua nol sedemikian hingga $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m = 0$

DEFINISI 2.1.4.

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$ disebut bebas linear (linearly independent) apabila $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_m u_m = 0$ untuk $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$

DEFINISI 2.1.5.

Ruang linear R adalah berdemensi n bila dapat dite - mukan suatu himpunan n vektor-vektor $\in$ R yang bebas linear Sedangkan setiap himpunan (n + 1) vektor-vektor $\in$ R selalu bergantung linear, dengan kata lain banyaknya maximum vektor-vektor $\in$ R bebas linear adalah n.

DEFINISI 2.1.6.

Vektor satuan adalah vektor yang mempunyai panjang satu.

misal = $i = (1, 0, 0)$; $j = (0, 1, 0)$

$k = (0, 0, 1)$ dalam R^3

CONTOH 2.1.1.

Himpunan n tuple dari vektor-vektor u , v , w , ... didefinisikan penjumlahan :

$$(u + v) (x) = u (x) + v (x)$$

dan perkalian skalar :

$$(\alpha u) (x) = \alpha (u (x))$$

di mana x dan α skalar riil, merupakan ruang vektor se - bab :

(i). $u (x) , v (x) \in R^n$ maka

$u (x) + v (x) \in R^n$

(ii) $(u + v) (x) = u (x) + v (x)$

$= v (x) + u (x)$

$= (v + u) (x)$

(iii) $(u + (v + w)) (x)$

$= u (x) + (v + w) (x)$

$= u (x) + v (x) + w (x)$

$= (u + v) (x) + w (x)$

$= ((u + v) + w) (x)$

(iv) $0 \in R^n$ maka $0 + u (x) = u (x) + 0$

$= u (x)$

(v). $\forall u (x) \in R^n \quad \exists -u \in R^n$ maka

$u (x) + (-u (x)) = (u-u) (x) = 0$

(vi). α skalar , $u(x) \in R^n$ maka

$\alpha u(x) \in R^n$

(vii). α skalar ; $u(x)$, $v(x) \in R^n$

$\alpha(u(x) + v(x)) = \alpha u(x) + \alpha v(x)$

(viii). $(\alpha + \beta) u(x)$

$= \alpha(u(x)) + \beta(u(x))$

$= \alpha(u(x)) + \beta(u(x))$

$= \alpha u(x) + \beta u(x)$

(ix). $\alpha(\beta u)(x) = (\alpha\beta) u(x)$

$= \alpha(\beta u(x)) = (\alpha\beta) u(x)$

(x). $1 u(x) = u(x)$

Jadi himpunan n tuple dari vektor-vektor tersebut merupakan ruang vektor.

<u>CONTOH 2.1.2.</u>

Ruang vektor R^3 dengan :

$a = (2, 1, 1)$; $b = (1, 3, 2)$

$c = (-1, 2, 1) \in R^3$

Ketiga vektor tersebut bergantung linear karena

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \text{ maka}$$

$$\lambda_1(2,1,1) + \lambda_2(1,3,2) + \lambda_3(-1,2,1) = (0,0,0)$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

(ii) dan (iii)

$$\begin{array}{r} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \hline \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} -$$

(i) dan 2x (ii)

$$\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \hline -5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{array} -$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

misal : $\lambda_2 = 1$

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_3 = -1$$

(ii). $\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 + 3 \cdot 1 + 2(-1) = 0$$

$$\lambda_1 = -3 + 2 = -1$$

Sehingga ada $\lambda \neq 0$

CONTOH 2.2.3.

(3 , 1) dan (4 , 6) adalah bebas linear karena

$\lambda_1 (3 , 1) + \lambda_2 (4 , 6) = (0 , 0)$ attau

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$$

diperoleh hanya $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

CONTOH 2.2.4.

Vektor $x \neq 0$ adalah bebas linear, karena $\lambda x = 0$ didapat $\lambda = 0$

CONTOH 2.2.5.

Vektor $x = 0$ adalah bergantung linear, karena $\lambda x = 0$ untuk semua nilai λ.

CONTOH 2.2.6.

Ruang vektor R^3 dengan

$a = (2 , -1 , 4)$; $b = (1 , 1 , 1)$; $c = (-1 , 2 , 1)$

$d = (1 , -2 , 1)$

Kita selidiki 4 vektor tersebut bebas linear atau bergantung linear.

$$\lambda_1(2,-1,4) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(-1,2,1) + \lambda_4(1,-2,1) = (0,0,0)$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

(i) - (ii)

$$\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \hline 3\lambda_1 - 3\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{array} - \quad \ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$$

(ii) - (iii)

$$\begin{array}{r} -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \hline -5\lambda_1 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \end{array} - \quad \ldots\ldots \text{(v)}$$

(iv) + (v)

$$\begin{array}{r} 3\lambda_1 - 3\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -5\lambda_1 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ \hline -2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \end{array} +$$

$$\lambda_1 = -\lambda_3$$

(iv) $3\lambda_1 - 3\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$

$$\lambda_4 = (-3\lambda_1 + 3\lambda_3)/3$$

$$\lambda_4 = \frac{-3(-\lambda_3)+3\lambda_3}{3} = 2\lambda_3$$

(i) $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0$

$$\lambda_2 = -2\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = -2(-\lambda_3) + \lambda_3 - 2\lambda_3$$

$$= \lambda_3$$

misal $\lambda_3 = 1$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = -1$$

$$\lambda_4 = 2\lambda_3 = 2$$

ke-4 vektor tersebut bergantung linear.

Sekarang kita cari banyak maximum diantara $\{a, b, c, d\}$ yang bebas linear.

Tiga vektor, misal a , b dan c

$$\lambda_1(2,-1,4)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(-1,2,1)=(0,0,0)$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad \text{(v)}$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \qquad \text{(vi)}$$

$$4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \text{(vii)}$$

(v) - (vi)

$$\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \hline 3\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \end{array} \; - \longrightarrow \lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

(v) - (vii)

$$
\begin{array}{r}
2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\
4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
\hline
-2\lambda_1 \qquad -2\lambda_3 = 0
\end{array} \; -
$$

$$-\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = 0$$

karena $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

maka ke-3 vektor bebas linear

Jadi dimensinya = 3

DEFINISI 2.1.7.

Suatu ruang norm linear adalah ruang linear (real atau complex) di mana $\|u\|$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

a. $\|u\| > 0$, $u \neq 0$

b. $\|0\| = 0$

c. $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$

d. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

2.2. KONSEP TOPOLOGI

DEFINISI 2.2.1.

Diberikan himpunan X yang tidak kosong, yang elemen-elemennya disebut titik. Didefinisikan fungsi bernilai real non negatif d pada X x X (jadi d fungsi dua variabel dengan variabel-variabel pada X) sebagai berikut :

Untuk sebarang titik x dan y di dalam X harus dipenuhi

a. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ jhj $x = y$

b. $d(x, y) = d(y, x)$

c. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

untuk sebarang titik $z \in X$ merupakan pertidaksa - maan segitiga.

Fungsi d yang memenuhi ketiga sifat dinamakan fungsi jarak atau metrik pada X.

Nilai $d(x, y)$ dinamakan jarak dari x ke y.

Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak dinamakan ruang metrik.

Misal (X, d) suatu ruang metrik.

DEFINISI 2.2.2.

Jika x sebarang titik di dalam ruang metrik X, dan $r > 0$ maka himpunan :

$$B(x, r) = \{p \in X, d(x, p) < r\}$$

dinamakan daerah sekitar titik x dengan radius r.

Titik x dinamakan pusat sekitar.

DEFINISI 2.2.3.

Untuk setiap $x \in X$ dan setiap $r > 0$, himpunan :

$$B(x, r) = \{p \in X, d(x, p) < r\}$$

dan

$$B(x, r) = \{p \in X, d(x, p) \leq r\}$$

masing-masing disebut bola terbuka (persekitaran dari x) dan bola tertutup.

DEFINISI 2.2.4.

Jika $x \in X$ disebut titik limit himpunan A subset X bila setiap titik x paling sedikit satu titik $y \in A$ dan $y \neq x$ di mana $d(y, x) < r$, $\forall r > 0$.

DEFINISI 2.2.5.

Himpunan A disebut tertutup jika setiap limit dari A adalah titik dari A.

DEFINISI 2.2.6.

Jika X suatu ruang metrik dan A^1 menyatakan himpunan semua titik limit himpunan A, maka penutup A (closure A) adalah himpunan $\bar{A} = A \cup A^1$.

DEFINISI 2.2.7.

Titik $x \in A$ disebut titik dalam dari A jika ada bola terbuka dengan pusat x yang terkandung di A.
Atau titik $x \in A$ disebut titik dalam dari A jika $B(x, r) \subset A$ untuk $r > 0$.

DEFINISI 2.2.8.

Himpunan A disebut terbuka jika setiap titik dari A adalah titik dalam dari A.

CONTOH 2.2.1.

Garis real R dengan metrik biasa, yaitu jarak antara x dan y didefinisikan sebagai nilai mutlak $|x - y|$ yaitu $d(x, y) \stackrel{def}{=} |x - y|$

a. Jika $x \neq y$ maka $|x - y| > 0$ sehingga $d(x, y) > 0$

Jika $x = y$ maka $|x - y| = |x - x| = 0$ sehingga $d(x, y) = 0$.

maka $d(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} |x - y|$ memenuhi definisi 2.2.1.a.

b. Untuk $x \neq y$ dan $y = x$ maka

$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$

maka $d(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} |x - y|$ memenuhi definisi 2.2.1.b.

c. $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y|$

$\leqslant |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$

jelas $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

maka $d(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} |x - y|$ memenuhi definisi 2.2.1.c.

Jadi dari (a), (b) dan (c) maka $d(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} |x - y|$ memenuhi ketiga axioma dari definisi 2.2.1.

CONTOH 2.2.2.

Di dalam R ditinjau himpunan E yaitu selang terbuka (a, b) Maka titik a, titik b dan semua titik p diantara a dan b merupakan titik limit E. Tetapi titik c di luar E bukan titik limit E, sebab jika $r > 0$ diambil nilai $r = \min\{|a - c|, |b - c|\}$ maka $B(c, r) = (c - r, c + r)$ tidak ada yang memuat x dengan $x \in (a, b)$.

CONTOH 2.2.3.

$S = \{ x \in R \mid 0 < x \leqslant 4 \}$

R himpunan bilangan riil.

Akan kita cari $\bar{S} = S \cup S^1$

- untuk $S = \{ x \in R \mid 0 < x \leqslant 4 \}$

ambil $r > 0$ untuk masing-masing titik dari :

$S = \{ 0 < x \leqslant 4 \mid x \in R \}$

maka $\forall\, r > 0\ \exists\, c \in S = \{ x \in R \mid 0 < x \leqslant 4 \}$ dan $c \neq x$ di mana $d(c, x) < r$ sehingga $c \in B(x, r)$

Jadi titik-titik di dalam $S = \{ 0 < x \leqslant 4 \mid x \in R \}$ merupakan titik-titik limit.

- untuk $x = 0$

ambil $r > 0$ maka $\forall\, r > 0\ \exists\, c \in S = \{ x \in R \mid 0 < x \leqslant 4 \}$ dan $c \neq 0$ di mana $d(c, 0) < r$ sehingga $c \in B(0, r)$

jadi $x = 0$ merupakan titik limit.

$$\begin{aligned} S^1 &= S \cup \{0\} \\ &= \{ 0 < x \leqslant 4 \mid x \in R \} \cup \{0\} \\ &= \{ 0 \leqslant x \leqslant 4 \mid x \in R \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S} &= S \cup S^1 \\ &= \{ 0 < x \leqslant 4 \mid x \in R \} \cup \{ x \in R \mid 0 \leqslant x \leqslant 4 \} \\ &= \{ x \in R \mid 0 \leqslant x \leqslant 4 \} \end{aligned}$$

CONTOH 2.2.4.

$T = \{ x \in A \mid 0 \leqslant x \leqslant 4 \}$

A = himpunan bilangan asli, sehingga

- untuk $x = 0$

ambil $r = \frac{1}{2}$

$\exists\, r = \frac{1}{2} > 0\ \forall\, c \in T = \{ x \in A \mid 0 \leqslant x \leqslant 4 \}$. sebut $c = 1$ sehingga $d(1, 0) > r = \frac{1}{2}$ dengan demikian $c = 1 \notin B(0,r)$

Jadi $\exists\, r > 0\ \forall c \in T = \{x \in A \mid 0 \leq x \leq 4\}$ di mana

$d(c, x) > r$ sehingga $c \notin B(x, r)$

terpenuhi $x = 0$ bukan titik limit.

- untuk $x = 1,2,3,4$.

analog untuk $x = 0$

Jadi $x = 1,2,3,4$ bukan titik limit.

CONTOH 2.2.5.

$A = \{x \in R \mid 2 \leq x < 4\}$

2 bukan titik dalam dari A

4 bukan titik dalam dari A

2,5 titik dalam dari A

CONTOH 2.2.6.

$A = \{x \in R \mid 0 < x < 3\}$ adalah himpunan terbuka

DEFINISI 2.2.9.

a. f dikatakan fungsi dari A ke B jika setiap $a \in A$ menentukan dengan tunggal $b \in B$ sedemikian hingga $f(a) = b$.

   Di mana A disebut domain dari f

   B disebut codomain dari f

   Range f ditulis $R_f = \{y \mid y = f(x),\ \forall x \in R$

b. Fungsi f dari A ke B juga didefinisikan sebagai himpunan semua pasangan bilangan riil

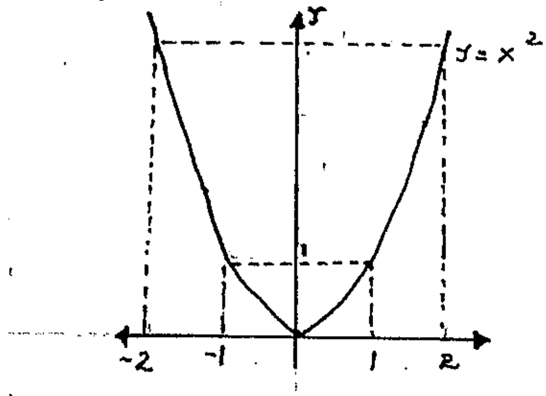
   yaitu :

   $f = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ sedemikian hingga jika $(x_1, y_1) = (x_1, y_2)$ bila $y_1 = y_2$

CONTOH 2.2.7.

Ditentukan R himpunan semua bilangan riil dan

$$f = \{ (x, y) \mid y = x^2 , x \in R \}$$



f adalah fungsi yang terdiri atas pasangan terurut (x, x^2) dengan $x \in R$ yaitu :

$$f = \{ (x, y) \mid y = x^2 , x \in R \}$$

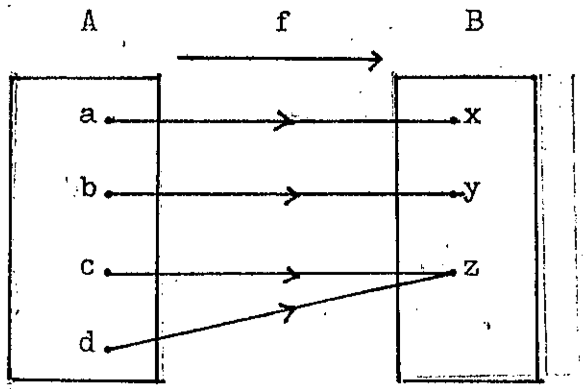
DEFINISI 2.2.10.

Jika f adalah fungsi dari A into B jika ada anggota dari B yang merupakan image dari anggota A.
Sedang range dari f ialah himpunan image dari A yaitu f(A) yang merupakan subset dari B.

DEFINISI 2.2.11.

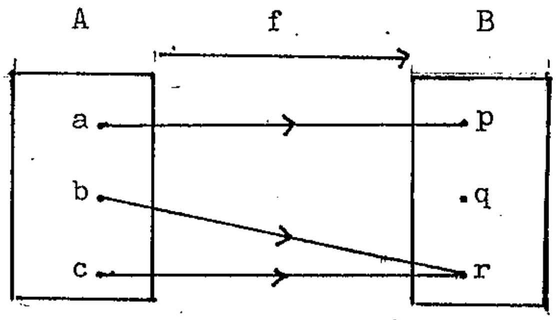
Jika f adalah fungsi dari A onto B maka setiap anggota dari B merupakan image dari sekurang-kurangnya satu anggota dari A.

CONTOH 2.2.8.



merupakan fungsi onto karena $f(A) = \{c, y, z\} = B$

CONTOH 2.2.9.



bukan fungsi onto karena $f(A) = \{p, r\} \neq B$

DEFINISI 2.2.12.

Diberikan himpunan terurut S dan $A \subset S$. Himpunan A terbatas ke atas jika $\exists\ p \in S$ sehingga $\forall\ x \in A$ berlaku $x \leqslant p$. Elemen p disebut batas atas himpunan A.

Jika $\exists\ q \in S$, $\forall\ x \in A$ berlaku $x \geqslant q$, maka A terbatas ke bawah. Elemen q disebut batas bawah himpunan A.

DEFINISI 2.2.13.

Jika ruang metrik X adalah closure dari subset countable X maka X dikatakan separable. Maka dalam ruang separable ada himpunan countable N sedemikian hingga $\forall\ f \in X$ dan

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists g \in N$ sedemikian hingga $d(f, g) < \varepsilon$ (3.4

2.3. KEKONVERGENAN

DEFINISI 3.2.1.

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik X dikatakan konvergen ke $x \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N, sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ bila $n > N$.

Jika barisan $\langle x_n \rangle$ tidak konvergen, ia disebut divergen. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan terbatas jika rangenya terbatas.

TEOREMA 2.3.1.

a. Barisan konvergen di ruang metrik mempunyai limit tunggal.

b. Bila $\langle x_n \rangle$ adalah barisan yang konvergen di ruang metrik maka barisan $\langle x_n \rangle$ adalah terbatas.

BUKTI :

a. Misalkan $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_1$

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapatlah bilangan asli N_1 dan N_2, sedemikian hingga untuk $n > N_1$ maka $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ dan untuk $n > N_2$ maka $d(x_n, x_1) < \varepsilon/2$

Ambil $N = \max(N_1, N_2)$, maka untuk $n > N$ diperoleh :

$d(x, x_1) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_1)$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang kecil, maka diperoleh $d(x, x_1) = 0$ berarti $x = x_1$.

Jadi terbukti limit suatu barisan konvergen adalah tunggal.

b. Misalkan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapatlah bilangan asli N sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$. Untuk $n > N$. Ambil $\varepsilon = 1$, sehingga $d(x_n, x) < 1$. Misal $r = \max\{1, d(x_1, x), \ldots\ldots, d(x_n, x)\}$, maka jelas $d(x_n, x) < r$, untuk $n = 1,2,3,\ldots\ldots$

Jadi terbukti barisan $\langle x_n \rangle$ terbatas.

TEOREMA 2.3.2.

Misalkan A himpunan bagian dari ruang metrik (X, d) Dan $\bar{A}$ adalah penutup dari himpunan A maka

a. jika $x \in \bar{A}$ jika dan hanya jika ada barisan $\langle x_n \rangle$ di A sedemikian hingga $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x

b. A adalah himpunan tertutup jika dan hanya jika $x_n \in A$, $\langle x_n \rangle$ konvergen ke $x \Longrightarrow x \in A$

BUKTI :

a. ($\Longrightarrow$) Misalkan $x \in \bar{A}$

Jika $x \in A$ maka jelas barisan $\langle x_n \rangle = \langle x, x, \ldots \rangle$ di A yang konvergen ke x.

Jika $x \notin A$ berarti x adalah titik limit dari A maka untuk setiap bola terbuka $B(x, 1/n)$ $n = 1, 2, \ldots\ldots$

mengandung $x_n \in A$, sehingga $n > N, d(x, x_n) < \varepsilon$

Jelas $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x sebab $1/n \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$

($\Longleftarrow$) Jika barisan $\langle x_n \rangle$ di A dan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x maka $x \in A$ atau setiap persekitaran dari x mengandung titik $x_n \neq x$, jadi x adalah titik limit dari A.

Maka terbukti bahwa $x \in \overline{A}$.

b. ($\Longrightarrow$) Misalkan A tertutup , $x_n \in A$ ($n = 1,2,\ldots$) dan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x. Akan dibuktikan $x \in A$

Jika $x_n = x$ untuk setiap n yang cukup besar, jelaslah $x \in A$.

Jika $x_n \neq x$ untuk n yang cukup besar, karena x adalah titik limit dari A dan A tertutup maka $x \in A$

($\Longleftarrow$) Misalkan $\langle x_n \rangle$ barisan di A yang konvergen ke suatu titik $x \in A$. Akan dibuktikan A tertutup. Jika $x_m \neq x_n \neq x$ untuk setiap m dan n yang cukup besar, maka x adalah titik limit dari A.

Jadi pernyataan tersebut berarti A mengandung setiap titik limitnya, yang berarti bahwa A tertutup.

DEFINISI 2.3.2.

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik (X , d) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk $n, m > N$.

TEOREMA 2.3.3.

Setiap barisan yang konvergen di ruang metrik adalah barisan cauchy.

BUKTI :

Misalkan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ untuk $n > N$.

Dengan pertidaksanaan segitiga, untuk $m, n > N$ terdapat

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Jadi terbukti barisan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan cauchy.

DEFINISI 2.3.3.

Ruang metrik (X , d) disebut lengkap jika setiap barisan cauchy di X konvergen ke suatu titik di X.

CONTOH 2.3.1.

Barisan $\langle s_n \rangle = 1/n$, $n = 1,2,\ldots\ldots$

dalam ruang metrik X dengan metrik biasa adalah konvergen ke 0.

Sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$ $\exists s = 0 \in X$, $|s_n - s| < \varepsilon$

$$|s_n - s| = |1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$$

$$1/n < \varepsilon \text{ atau } n > 1/\varepsilon$$

sedemikian hingga untuk N yang cukup besar $\exists N > 0$ untuk suatu $n > N$

diambil :

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$$

$$d (s_n , s) = \left| 1/n - 0 \right| = 1/n < 1/N = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Jadi $d (s_n , s) < \varepsilon$

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N > 0) (n > N \Longrightarrow d (s_n , s) < \varepsilon)$

<u>CONTOH 2.3.2.</u>

Barisan $\langle s_n \rangle$ pada ruang metrik X dengan :

$d (s_n , s_m) = | s_n - s_m |$ dan $s_n = 1/n$, $n = 1 , 2, \ldots\ldots$

adalah barisan Cauchy.

Sebab jika diberikan $\varepsilon > 0$ dan $| s_n - s_m | < \varepsilon$

$$| s_n - s_m | = | 1/n - 1/m | \leqslant 1/m < \varepsilon$$

$$1/m < \varepsilon \Longrightarrow m > 1/\varepsilon$$

sehingga $\exists$ bilangan bulat $N > 0$, $n,m > N$

Misal diambil $N = 1/\varepsilon$

$$d (s_n , s_m) = | s_n - s_m | = | 1/n - 1/m | \leqslant 1/m < 1/N = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

Jadi berlaku $d (s_n , s_m) < \varepsilon$

$(\forall \varepsilon > 0)$ ($\exists$ N bilangan bulat > 0) $(n,m > N \Longrightarrow$
$d (s_n , s_m) < \varepsilon)$

<u>CONTOH 2.3.3.</u>

Ruang R^n adalah ruang metrik lengkap.

BUKTI :

Metrik pada R^n didefinisikan sebagai :

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

di mana $x = (x_i)$ dan $y = (y_i)$

Misalkan $\langle x_m \rangle$ adalah suatu barisan Cauchy di R^n, di mana $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$

karena $\langle x_m \rangle$ barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga

$$d(x_m, x_r) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(r)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots.(1)$$

$$(m, r > N)$$

dikuadratkan, sehingga untuk $m, r > N$ dan $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$(x_i^{(m)} - x_i^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \quad \text{dan} \quad |x_i^{(m)} - x_i^{(r)}| < \varepsilon$$

ini menunjukkan untuk setiap i, ($1 \leq i \leq n$) , barisan ($x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots$) adalah barisan Cauchy dari bilangan riil, karena R ruang metrik lengkap.

Jelas bahwa barisan tersebut konvergen, dikatakan $x_i^{(m)}$ konvergen ke x_i untuk $m \longrightarrow \infty$

Kita definisikan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jelas $x \in R^n$

Dari persamaan (1) dengan $r \longrightarrow \infty$, $d(x_m, x) \leq \varepsilon$

$(m > N)$.

Jadi terbukti barisan $\langle x_m \rangle$ konvergen ke x.

Maka ruang R^n adalah ruang metrik lengkap.

DEFINISI 3.2.4.

Suatu barisan bilangan real $\langle s_n \rangle$ dikatakan :

a. naik monoton jika $s_n \leqslant s_{n+1}$ untuk $n = 1,2,\ldots.$

b. turun monoton jika $s_n \geqslant s_{n+1}$ untuk $n = 1,2,\ldots$

Barisan yang naik monoton dan barisan yang turun monoton disebut barisan monoton.

2.4. RUANG INNER PRODUCT DAN RUANG HILBERT.

DEFINISI 2.4.1.

Suatu inner product dalam ruang vektor (real atau complex) adalah fungsi dari pasangan variabel x dan y dalam ruang vektor tersebut yang memenuhi axioma :

1. $\langle x , y \rangle = \overline{\langle y , x \rangle}$
2. $\langle \alpha x , y \rangle = \alpha \langle x , y \rangle$
3. $\langle x + y , z \rangle = \langle x , z \rangle + \langle y , z \rangle$
4. $\langle x , x \rangle \geqslant 0$; $\langle x , x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

DEFINSISI 2.4.2.

Ruang inner product adalah ruang vektor dengan operasi inner product, yang normnya dinyatakan dengan :

$$\| x \| = \sqrt{\langle x , x \rangle}$$

sedang metriknya dinyatakan :

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x - y , x - y \rangle}$$

Akibat dari definisi 2.4.1.

(i). $\langle \alpha x + \beta y , z \rangle = \alpha \langle x , z \rangle + \beta \langle y , z \rangle$

(ii). $\langle x , \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x , y \rangle$

(iii). $\langle x , \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x , y \rangle + \bar{\beta} \langle x , z \rangle$

Jika ruang vektor riil maka tanda konjugasi di atas dapat diabaikan, sehingga definisi 2.4.1.(1). menjadi :

$\langle x , y \rangle = \langle y , x \rangle$

<u>DEFINISI 2.4.3.</u>

Ruang Hilbert adalah ruang inner product yang leng - kap (ruang metriknya lengkap).
(memenuhi definisi 2.4.1. dan 2.4.2.).

<u>CONTOH 2.4.1.</u>

Ruang R^n yang terdiri dari pasangan n-tuples dengan ele - men-elemen bilangan riil, yang dinyatakan :

$$\langle u , v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots\ldots + u_n v_n$$

merupakan ruang inner product.
di mana :

$u = (u_i) = (u_1 , u_2 , \ldots\ldots\ldots , u_n)$

$v = (v_i) = (v_1 , v_2 , \ldots\ldots\ldots , v_n)$

yaitu :

(i). $$\langle u ; v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \; v_i$$

$$= u_1 \; v_1 + u_2 \; v_2 + \ldots\ldots + u_n \; v_n$$

$$= v_1 \; u_1 + v_2 \; u_2 + \ldots\ldots + v_n \; u_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \; u_i$$

$$= \langle v , u \rangle$$

maka $\langle u , v \rangle = \langle v , u \rangle$ memenuhi definisi 2.4.1.(1).

(ii). $$\langle \alpha u , v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha \, u_i \; v_i$$

$$= \alpha u_1 \; v_1 + \alpha \, u_2 \; v_2 + ;\ldots + \alpha \, u_n \; v_n$$

$$= \alpha (\, u_1 \; v_1 + u_2 \; v_2 + \ldots + u_n \; v_n \,)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i \; v_i$$

$$= \alpha \langle u , v \rangle$$

maka $\langle \alpha u , v \rangle = \alpha \langle u , v \rangle$ memenuhi definisi 2.4.1.(2).

(iii). $$\langle u + v , w \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\, u_i + v_i \,) \, w_i$$

$$= (u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2 + \ldots\ldots\ldots +$$

$$(u_n + v_n) w_n$$

$$= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots\ldots + u_n w_n) +$$

$$(v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots\ldots + v_n w_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

$$= \langle u , w \rangle + \langle v , w \rangle$$

maka $\langle u + v , w \rangle = \langle u , w \rangle + \langle v , w \rangle$

memenuhi definisi 2.4.1.(3).

(iv). $\langle u , u \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i$

$$= u_1 u_1 + u_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n u_n$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + \ldots\ldots\ldots + u_n^2 \geqslant 0$$

$$\langle u , u \rangle = 0 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots\ldots + u_n^2 = 0$$

akan dipenuhi jika dan hanya jika $u_i = 0$

maka $\langle u , u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ dan $\langle u , u \rangle \geqslant 0$

memenuhi definisi 2.4.1.(4).

Dari (i),(ii),(iii) dan (iv) maka memenuhi axioma dari inner product.

Normnya diperoleh :

$$\| u \| = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots\ldots + u_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

dan metriknya dinyatakan sebagai :

$$d (u , v) = \| u - v \|$$

$$= \left[(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Jadi jelas ruang R^n merupakan ruang Hilbert.

CONTOH 2.4.2.

Ruang C^n yang terdiri dari pasangan n-tuples dari elemen-elemen bilangan komplex yang didefinisikan :

$$\langle u , v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

merupakan ruang inner product.

(i). $$\overline{\langle v , u \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i \overline{u_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}\, u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} = \langle u , v \rangle$$

maka $\langle u , v \rangle = \overline{\langle v , u \rangle}$ memenuhi definsi 2.4.1.(1).

(ii). $$\langle \alpha u , v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha\, u_i \overline{v_i}$$

$$= \alpha u_1 \overline{v}_1 + \alpha u_2 \overline{v}_2 + \ldots + \alpha u_n \overline{v}_n$$

$$= \alpha (u_1 \overline{v}_1 + u_2 \overline{v}_2 + \ldots + u_n \overline{v}_n)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i = \alpha \langle u , v \rangle$$

maka $\langle \alpha u , v \rangle = \alpha \langle u , v \rangle$ memenuhi definisi 2.4.1.(2).

(iii). $\langle u + v , w \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) \overline{w_i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{w_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

$$= \langle u , w \rangle + \langle v , w \rangle$$

maka $\langle u + v , w \rangle = \langle u , w \rangle + \langle v , w \rangle$

memenuhi definisi 2.4.1.(3).

(iv). $\langle u , u \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{u_i} = u_1 \overline{u_1} + u_2 \overline{u_2} + \ldots + u_n \overline{u_n}$

$u_1 = a_1 + i\, b_1$

$u_2 = a_2 + i\, b_2$

$$\langle u , u \rangle = (a_1 + i\, b_1) (a_1 - i\, b_1) +$$

$$(a_2 + i\, b_2) (a_2 - i\, b_2) + \ldots\ldots$$

$$+ (a_n + i\, b_n) (a_n - i\, b_n).$$

$$= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 + b_n^2$$

$$\langle u , u \rangle = 0 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n^2) + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + b_n^2) = 0$$

Normnya diperoleh :

$$\| u \| = \left[\sum_{i=1}^{n} \| u_i \|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Metriknya dinyatakan :

$$d(u,v) = \| u - v \| = \left[\sum_{i=1}^{n} \| u_i - v_i \|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Jadi jelas ruang C^n merupakan ruang Hilbert.

2.5. MANIFOLD LINEAR DAN SUB RUANG.

DEFINISI 2.5.1.

Sub himpunan L adalah manifod linear untuk sebarang vektor f dan g dalam L berlaku $\alpha f + \beta g \in L$, untuk sebarang α, β.

CATATAN :

Diambil himpunan M yang finite atau infinite dari anggota X. Dipandang L kombinasi linear finite.

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots\ldots + \alpha_n f_n$$

dari elemen $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ dalam M.
Himpunan L ini manifold linear terkecil yang memuat M, yang disebut envelope (selimut) linear M atau manifold linear spanned M.
Jika X ruang metrik maka closure dari envelope linear dari himpunan M merupakan himpunan yang tertutup.

DEFINISI 2.5.2.

Ruang vektor R^n.

$W \subset R^n$ merupakan subruang jika memenuhi :

(i). $W \neq 0$

(ii). $\forall\ a, b \in W \implies a + b \in W$

(iii). $\forall\ b \in W$ dan $\alpha \in K(\text{riil}) \implies \alpha b \in W$

DEFINISI 2.5.3.

Jika U ruang inner product dan $V \subset U$.

Ortogonal komplemen dari V di tulis $V^{\perp}$ adalah himpunan yang terdiri dari vektor-vektor di U di mana ortogonal terhadap setiap $v \in V$.

$$V^{\perp} = \{ u \in U \mid \langle u , v \rangle = 0, \forall\ v \in V \}$$

Jika U ruang Hilbert H dan $V \in H$ maka

$$V^{\perp} = \{ u \in H \mid u \perp v \}$$

Jika $V^{\perp} = Z$; maka Z disebut ortogonal komplemen dari V dan dapat dinyatakan

$$Z = U \ominus V$$

DEFINISI 2.5.4.

Ruang vektor U disebut jumlahan langsung dari ruang bagian V dan Z, dapat ditulis :

$$U = V \oplus Z$$

Jika :

1. $u = v + z$, $u \in U$, $v \in V$, $z \in Z$

2. $V \cap Z = \{0\}$

TEOREMA 2.5.2.

(pertidaksamaan segitiga)

Jika u dan v adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang inner product, maka $\| u + v \| \leqslant \|u\| + \| v \|$

BUKTI :

$$\begin{aligned}
\| u + v \|^2 &= \langle u + v , u + v \rangle \\
&= \langle u , u \rangle + 2 \langle u , v \rangle + \langle v , v \rangle \\
&\leqslant \langle u , u \rangle + 2 |\langle u , v \rangle| + \langle v , v \rangle \\
&\leqslant \langle u , u \rangle + 2 \| u \| \| v \| + \langle v , v \rangle \\
&= \| u \|^2 + 2 \| u \| \| v \| + \| v \|^2 \\
&= (\| u \| + \| v \|)^2
\end{aligned}$$

Dengan mengambil akar-akar kuadratnya maka akan diperoleh

$$\| u + v \| \leqslant \| u \| + \| v \|$$

CONTOH 2.5.1.

Misal dalam ruang vektor R^3.

Diandaikan :

P = bidang XZ

Q = sumbu Y

$P = \{ (r , 0 , t) \mid r , t \in R \}$

$Q = \{ (0 , s , 0) \mid s \in R \}$

Setiap vektor di R^3 dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung.

$$R^3 = P \oplus Q$$

$$(r , s , t) = (r , 0 , t) + (0 , s , 0)$$

CONTOH 2.5.2.

Pandang R^3

$W \subset R^3$ dengan definisi $W = \{ (x, y , z) \mid x + y + z = 0 \}$ merupakan subruang.

(i). $W \neq \emptyset$ dikarenakan $(0 , 0 , 0) \in W \Rightarrow 0 + 0 + 0 = 0$

(ii). $u = (x_1 , y_1 , z_1) \in W \Longrightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$

$v = (x_2 , y_2 , z_2) \in W \Longrightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 0$

$$u + v = (x_1 , y_1 , z_1) + (x_2 , y_2 , z_2)$$
$$= (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)$$

maka :

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) =$$
$$= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

sehingga $u + v \in W$

(iii). $u = (x_1 , y_1 , z_1) \in W$

$$\alpha u = \alpha (x_1 , y_1 , z_1) = (\alpha x_1 , \alpha y_1 , \alpha z_1)$$

maka $\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha (x_1 + y_1 + z_1)$

$= \alpha (0 + 0 + 0) = 0$

sehingga $\alpha u \in W$

Jadi W subruang.

CONTOH 2.5.3.

Jawab dari sistem persamaan linear homogin merupakan manifold linear.

Ambil :

$$x = (x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n) \in L$$

dan berlaku :

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n x_n = 0$$

$$y = (y_1 , y_2 , \ldots\ldots , y_n) \in L$$

dan berlaku :

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n y_n = 0$$

akan dibuktikan :

$\alpha x + \beta y \in L \qquad \forall \alpha , \beta$ sebarang

yaitu :

$$\alpha x = \alpha (x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n)$$

$$= \alpha (A_1 x_1) + \alpha (A_2 x_2) + \ldots\ldots + \alpha (A_n x_n)$$

$$= \alpha (A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots\ldots + A_n x_n)$$

$$= \alpha \cdot 0 = 0$$

$\alpha x \in L$ merupakan sistem persamaan linear homogin.

$$\beta y = \beta (y_1 , y_2, \ldots\ldots , y_n)$$

$$= \beta (A_1 y_1) + \beta (A_2 y_2) + \ldots\ldots + \beta (A_n y_n)$$

$$= \beta (A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n y_n)$$

$$= \beta . 0 = 0$$

$\beta y \in L$ merupakan sistem persamaan linear homogin.
$\alpha x + \beta y = 0 + 0 = 0 \in L$
Jadi jawab dari sistem persamaan linear homogin merupakan manifold linear.

2.6. ORTOGONAL DAN ORTONORMAL

DEFINISI 2.6.1.

Elemen u dari ruang inner product U dikatakan ortogonal dengan elemen $v \in V$ jika $\langle u , v \rangle = 0$ atau u dan v ortogonal jika $u \perp v$.

Untuk himpunan bagian $P, Q \subset V$, berlaku :

$u \perp P$ jika $u \perp p \quad \forall p \in P$

$P \perp Q$ jika $p \perp q \quad \forall p \in P \quad \forall q \in Q$

Ditentukan ortogonal untuk setiap $u \in U$

$$\langle 0 , v \rangle = \langle 0.u , v \rangle = 0 \langle u , v \rangle = 0$$

$$\langle u , 0 \rangle = \langle u , 0.v \rangle = \overline{\langle 0.v , u \rangle} = 0 \langle v , u \rangle$$

$$= 0$$

TEOREMA 2.6.1.

(Persamaan pytagoras)

Jika u dan v adalah vektor-vektor ortogonal dalam inner product, maka :

$$\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$$

BUKTI :

$$\| u + v \|^2 = \langle u + v , u + v \rangle$$
$$= \langle u , u \rangle + \langle u , v \rangle + \langle v , u \rangle + \langle v , v \rangle$$
$$= \| u \|^2 + \langle u , v \rangle + \langle v , u \rangle + \| v \|^2$$

karena u dan v ortogonal, maka $\langle u , v \rangle = \langle v , u \rangle = 0$ sehingga :

$$\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2$$

TEOREMA 2.6.2.

(Pertidaksamaan cauchy- schwarz)

Jika u dan v adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang inner product, maka :

$$\langle u , v \rangle^2 \leqslant \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle$$

BUKTI :

Jika u = 0 maka pertidaksamaan cauchy-schwarz terpenuhi sebab $\langle 0 , v \rangle = 0$.

Jika $u \neq 0$, misal $\langle u , u \rangle = a$, $2 \langle u , v \rangle = b$ dan $c = \langle v , v \rangle$ serta t sebarang bilangan riil.

maka :

$0 \leqslant \langle (tu + v) , (tu + v) \rangle =$

$$= \langle tu\,,\,tu\rangle + \langle tu\,,\,v\rangle + \langle v\,,\,tu\rangle + \langle v\,,\,v\rangle$$

$$= t^2\langle u\,,\,u\rangle + t\,\langle u\,,\,v\rangle + t\,\langle v\,,\,u\rangle + \langle v\,,\,v\rangle$$

$$= a\,t^2 + b\,t^2 + c$$

Polinomial kuadrat $a\,t^2 + b\,t + c$ tidak punya baik akar-akar riil maupun akar riil yang berulang. Maka diskriminannya harus $b^2 - 4\,a\,c \leqslant 0$.

Dengan a , b, c dalam u dan v.

$$4\,\langle u\,,\,v\rangle^2 - 4\,\langle u\,,\,u\rangle\,\langle v\,,\,v\rangle \leqslant 0$$

$$\langle u\,,\,v\rangle^2 \leqslant \langle u\,,\,u\rangle\langle v\,,\,v\rangle$$

teorema terbukti.

DEFINISI 2.6.2.

Jika u dan v adalah vektor-vektor tidak nol dalam R^2 atau R^3, maka kita dapat menuliskan sebagai :

$$v = h_1 + h_2$$

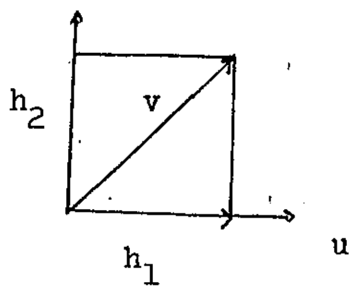
di mana :

h_1 = kelipatan skalar dari u

h_2 = $\perp$ dengan u

vektor h_1 dinamakan proyeksi ortogonal dari v pada u

vektor h_2 dinamakan komponen dari v yang ortogonal pada u



h_1 kelipatan skalar dari u maka $h_1 = \alpha u$

$$v = \alpha \cdot u + h_2$$

$$v.u = (\alpha u + h_2) u = \alpha \| u \|^2 + h_2 u$$

$$\alpha = \frac{v.u}{\|u\|^2}$$

$$h_1 = \alpha u$$

$$h_2 = v - \alpha u = v - \frac{(v,u)}{\| u \|^2} u$$

DEFINISI 2.6.3.

Jika elemen dari himpunan M pasangan vektor ortogonal dan jika setiap vektor dinormalkan yaitu jika masing-masing punya norm 1, maka himpunan M disebut sistem ortonormal. Sebagai tambahan, jika himpunan M countable maka disebut barisan ortonormal.

PROSES ORTOGONAL GRAM SCHMIDT

Proses Gram-schmidt merupakan cara yang digunakan untuk menyelesaikan suatu basis ortogonal dari ruang vektor menjadi basis ortonormal.

Misal :

Barisan vektor yang bebas linear

$$g_1 , g_2 , \ldots\ldots , g_n , \ldots\ldots \qquad (1)$$

Barisan vektor ortonormal

$$e_1 , e_2 , \ldots\ldots , e_n , \ldots\ldots \qquad (2)$$

Tahapan proses Gram-schmidt sebagai berikut :

Tahap 1 :

$$e_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|}$$

Tahap 2 :

Ditentukan : $h_2 = g_2 - \alpha e_1$

$$h_2 \perp e_1$$

$$\langle h_2 , e_1 \rangle = \langle g_2 - \alpha e_1 , e_1 \rangle$$

$$0 = \langle g_2 , e_1 \rangle - \alpha \langle g_1 , e_1 \rangle$$

karena $\langle e_1 , e_1 \rangle = 1$

$$\alpha = \langle g_2 , e_1 \rangle$$

$$h_2 = g_2 - \langle g_2 , e_1 \rangle e_1$$

$$e_2 = \frac{h_2}{\| h_2 \|}$$

Tahap 3 :

Ditentukan :

$$h_3 = g_3 - \alpha e_1 - \beta e_2$$

$h_3 \perp e_1$ dan $h_3 \perp e_2$

maka :

$$\langle h_3 , e_1 \rangle = \langle g_3 - \alpha e_1 - \beta e_2 , e_1 \rangle$$

$$0 = \langle g_3 , e_1 \rangle - \alpha \langle e_1 , e_1 \rangle - \beta \langle e_2 , e_1 \rangle$$

$$\langle e_1 , e_1 \rangle = 1 \text{ dan } \langle e_2 , e_1 \rangle = 0$$

maka :

$$\alpha = \langle g_3 , e_1 \rangle$$

$$\langle h_3 , e_2 \rangle = \langle g_3 - \alpha e_1 - \beta e_2 , e_1 \rangle$$

$$0 = \langle g_3 , e_1 \rangle - \alpha \langle e_1 , e_1 \rangle - \beta \langle e_2 , e_2 \rangle$$

$$\langle e_1 , e_1 \rangle = 1 \text{ dan } \langle e_2 , e_2 \rangle = 1$$

maka:

$$\alpha = \langle g_3 , e_1 \rangle$$

$$\langle h_3 , e_2 \rangle = \langle g_3 - \alpha e_1 - \beta e_2 , e_2 \rangle$$

$$0 = \langle g_3 , e_2 \rangle - \alpha \langle e_1 , e_1 \rangle - \beta \langle e_2 , e_2 \rangle$$

$$\langle e_1 , e_2 \rangle = 0 \text{ dan } \langle e_2 , e_2 \rangle = 1$$

maka :

$$\beta = \langle g_3 , e_2 \rangle$$

$$h_3 = g_3 - \langle g_3 , e_1 \rangle e_1 - \langle g_3 , e_2 \rangle e_2$$

$$e_3 = \frac{h_3}{\| h_3 \|}$$

Selanjutnya dengan jalan yang sama untuk tahap ke-n

$$e_n = \frac{h_n}{\| h_n \|}$$

dan

$$h_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle g_n , e_k \rangle e_k$$

Sekarang dengan asumsi barisan (2) ortogonal dan vektor $h \in H$. Untuk setiap integer n, vektor h dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$h = \sum_{k=1}^{n} \langle h , e_k \rangle e_k + f_n$$

di mana vektor f_n ortogonal untuk setiap vektor e_1 , e_2 , ..., e_n. Vektor

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle h , e_k \rangle e_k \qquad (3)$$

mempunyai himpunan vektor-vektor

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots\ldots + \lambda_n e_n \qquad (4)$$

dan dari vektor-vektor tersebut, s_n paling dekat dengan vektor h. Jarak s_n ke h adalah

$$\delta_n = \min_{\lambda_k} \| h - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \ldots\ldots - \lambda_n e_n \|$$

$$= \| f_n \| = \sqrt{\| h \|^2 - \sum_{k=1}^{n} | \langle h_1 , e_k \rangle |^2} \qquad (5)$$

merupakan jarak titik h ke envelope linear G_n dari himpunan yang terdiri dari n vektor pertama dari barisan (2).

Jika kombinasi linear order ke n (4), akan dihasilkan kombinasi linear order ke (n + 1).

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots\ldots\ldots + \mu_{n+1} e_{n+1} \qquad (4^1)$$

yang terdekat pada vektor h, maka harus mengambil vektor

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \langle h , e_k \rangle e_k$$

Dengan tidak merubah koefisien dalam kombinasi linear (3). Selanjutnya hanya menyebutkan jumlahan lebih dari satu.

$$\langle h , e_{n+1} \rangle e_{n+1}$$

pada ruas kanan dari (3).

Diberikan barisan ortonormal infinite (2), barisan itu digabungkan dengan setiap vektor $h \in H$ dalam deret infinite itu.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle h , e_k \rangle e_k \qquad (6)$$

Persamaan (5) menghasilkan pertidaksamaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h , e_k \rangle|^2 \leqslant \| h \|^2 \qquad (7)$$

konvergen dari deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h , e_k \rangle|^2$$

berarti :

$$\| s_n - s_m \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} | \langle h , e_k \rangle |^2 \qquad (m < n)$$

konvergen dari nol sampai m, yaitu deret (6) konvergen dalam H. Kuadrat jarak titik h ke manifold G

$$\| h \|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} | \langle h , e_k \rangle |^2$$

DEFINISI 2.6.4.

Suatu himpunan A di dalam ruang metrik X disebut rapat (dense) jika penutup A adalah X. Jadi $X = A \cup A^1$

DEFINISI 2.6.5.

Sistem ortonormal e_1 , e_2 , ..., e_n...... tertutup dalam H berlaku :

$$\| h \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \langle h , e_k \rangle |^2 \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

untuk $h \in H$. Persamaan (8) merupakan relasi Parseval.

DEFINISI 2.6.6.

Sistem ortonormal e_1 , e_2 , ..., e_n..... , maka untuk pasangan vektor $g, h \in H$ relasi Parsevalnya :

$$\langle g , h \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g , e_k \rangle \langle e_k , h \rangle \qquad (9)$$

CONTOH 2.6.1.

Diperoleh relasi Parseval untuk setiap vektor $g + \lambda h$. yaitu :

Sesuai (8)definisi 2.6.5. maka :

$$\| g + \lambda h \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \langle g + \lambda h , e_k \rangle |^2$$

menghasilkan:

$$\begin{aligned} \| g + \lambda h \|^2 &= \langle g + \lambda h , g + \lambda h \rangle \\ &= \langle g , g \rangle + \lambda \langle h , g \rangle + \bar{\lambda} \langle g , h \rangle + \\ &\quad |\lambda|^2 \langle h , h \rangle . \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ | \langle g , e_k \rangle |^2 + \lambda \langle h , e_k \rangle \langle e_k , g \rangle \\ &\quad + \bar{\lambda} \langle g , e_k \rangle \langle e_k , h \rangle + |\lambda|^2 | \langle h , e_k \rangle |^2 \Big\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \lambda \langle h , g \rangle + \bar{\lambda} \langle g , h \rangle &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \langle h , e_k \rangle \langle e_k , g \rangle \\ &\quad + \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \langle g , e_k \rangle \langle e_k , h \rangle \end{aligned}$$

karena λ sebarang, maka sesuai (9) pada definisi 2.6.6. diperoleh relasi Parseval.

DEFINISI 2.6.7.

Sistem ortonormal M adalah lengkap dalam H jika M tidak termuat dalam sistem ortonormal yang lebih luas dalam H yaitu jika tidak terdapat vektor tak nol dalam H yang ortogonal untuk setiap vektor dari sistem M.

TEOREMA 2.6.3.

Suatu barisan ortonormal infinite

$$e_1 , e_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

adalah lengkap dalam H jika dan hanya jika barisan tertutup dalam H.

BUKTI :

$(\Longleftarrow)$

Sistem (10) tertutup dalam H $\Longrightarrow$ sistem lengkap dalam H.

Diandaikan bahwa sistem (10) tidak lengkap.

Notasi h suatu vektor tak nol yang ortogonal pada setiap vektor (10). Maka $\langle h , e_k \rangle = 0$ (k=1,2,......)

karena sistem (10) tertutup maka setiap vektor h terdapat relasi Parseval. Diturunkan kontradiksi $0 \neq \| h \|^2 = 0$

Pengandaian salah, yang benar sistem (10) lengkap.

$(\Longrightarrow)$

Sistem (10) lengkap $\Longrightarrow$ sistem tertutup dalam H

Ditentukan sebarang vektor $h \in H$ dan dengan memperhatikan barisan vektor :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle h , e_k \rangle e_k \qquad (n=1,2,\ldots.)$$

$\langle s_n \rangle$ Cauchy yang berarti konvergen pada vektor g. Maka

$$\langle g , e_k \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle s_n , e_k \rangle = \langle h , e_k \rangle \qquad (11)$$

$$(k=1,2,\ldots\ldots)$$

dan g termuat dalam envelope linear tertutup dari barisan (10). Berakibat relasi Parseval berlaku untuk g.

$$\| g \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \langle g , e_k \rangle |^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \langle h , e_k \rangle |^2 \qquad (12)$$

Dari (11) vektor g-h ortogonal pada setiap vektor dari barisan (10). Karena (10) lengkap sehingga g-h=0 sedemikian hingga g=h dan (12) dinyatakan :

$$\| h \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \langle h , e_k \rangle |^2$$

maka sebarang vektor $h \in H$ terdapat relasi Parseval. Maka (10) tertutup dalam H. Teorema terbukti.

<u>TEOREMA 2.6.4.</u>

Ruang H memuat barisan ortonormal lengkap jika dan hanya jika H separable.

<u>BUKTI :</u>

$(\Longleftarrow)$

H separable maka ruang H memuat barisan ortonormal lengkap. Ditentukan ruang H separable dan N suatu himpunan countable dari vektor-vektor yang dense dalam H. Menghilangkan beberapa vektor barisan N yang merupakan kombinasi linear dari vektor yang pertama dan ortogonalisasi barisan terakhir diperoleh barisan ortonormal M. Barisan ini lengkap. Diberikan vektor $h \in H$ ortogonal untuk setiap elemen dari barisan M, maka h ortogonal pada setiap vektor N. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada vektor $f \in N$ sedemikian hingga :

$$\| h - f \| < \varepsilon$$

sedemikian hingga :

$$\| h \|^2 = \langle h , h \rangle \leqslant \langle h - f , h \rangle \leqslant \| h - f \| \; \| h \| < \varepsilon \|h\|$$

dan

$$\| h \| < \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ sebarang, $h = 0$ dan barisan ortonormal M adalah lengkap dalam H.

$(\Longrightarrow)$

Ruang H memuat barisan ortonormal lengkap maka H separable.

Ditentukan (10) barisan ortonormal lengkap dalam H.

Misal N himpunan semua kombinasi linear dari bentuk :

$$\gamma_1^{(n)} e_1 + \gamma_2^{(n)} e_2 + \ldots\ldots + \gamma_n^{(n)} e_n$$

$(n=1,2,\ldots\ldots\ldots)$

dimana $\gamma_k^{(r)} = \alpha_k^{(r)} + i\,\beta_k^{(r)}$ dan $\alpha_k^{(r)}$, $\beta_k^{(r)}$ bilangan rasional.

Himpunan N adalah countable. Untuk setiap $h \in H$ dan $\forall\, \varepsilon > 0$ ada integer n sedemikian hingga :

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{n} \langle h , e_k \rangle e_k \right\| < \varepsilon/2$$

dengan pendekatan maka didapatkan :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left\{ \langle h , e_k \rangle - \gamma_k^{(n)} \right\} e_k \right\| < \varepsilon/2$$

maka ada vektor

$$f = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} e_k$$

dalam N, di mana

$$\| h - f \| < \varepsilon$$

dan berarti H separable.

DEFINISI 2.6.8.

Dimensi ruang Hilbert H adalah kardinalitas dari sistem ortonormal lengkap dalam H.

TEOREMA 2.6.5.

Dua sistem ortonormal lengkap dalam ruang Hilbert mempunyai bilangan kardinal yang sama.

BUKTI :

Misal M dan N adalah 2 sistem ortonormal yang masing masing lengkap dalam H, dengan m dan n sebagai bilangan kardinal. Pilih $e \in M$ paling sedikit satu hasil skalar $\langle e , f \rangle \neq 0$, $f \in N$, karena jika tidak akan memperluas

sistem ortonormal N dengan penambahan vektor e. Dengan kata lain tidak ada lebih dari sebuah himpunan countable dari elemen-elemen $f \in N$ di mana $\langle e , f \rangle \neq 0$.
Elemen-elemen tersebut dinotasikan :

$$f_1 , f_2 , \ldots\ldots , f_n \quad (1 \leq n \leq \omega) \qquad (13)$$

Diperoleh fungsi φ dengan domain M sedemikian hingga $\varphi(e)$ himpunan vektor-vektor (13) di mana $\langle e , f \rangle \neq 0$
Fungsi memetakan M onto himpunan dari sub himpunan countable N.
Setiap $f^* \in N$ menghasilkan $f^* \in \varphi(e)$ untuk suatu $e^* \in M$ karena $\forall f^* \in N$ ada elemen $e^* \in M$ yang tak ortogonal pada elemen f^*.
Selanjutnya $m \geq n$
Berlawanan dari pengandaian sistem M dan N maka didapatkan $n \geq m$. Sehingga $n = m$. Teorema terbukti.

CONTOH 2.6.2.

Pandang basis di R^3

$$M = \{ v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1) \}$$

Dengan prosis Gram-schmidt akan diperoleh basis ortonormal

$$u_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$h_2 = v_2 - \langle v_2 , u_1 \rangle u_1$$

$$= (0 , 1 , 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3} , \frac{1}{3} , \frac{1}{3} \right)$$

Dibuat vektor h_2 dengan norm 1.

$$u_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$h_3 = v_3 - \langle v_3 , u_1 \rangle u_1 - \langle v_3 , u_2 \rangle u_2$$

$$= (0 , 0 , 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right) -$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$= \left(0 , -\frac{1}{2} , \frac{1}{2} \right)$$

Dibuat vektor h_3 dengan norm 1.

$$u_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|} = \left(0 , -\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Sehingga basis ortonormalnya untuk R^3 adalah :

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$u_3 = \left(0 \,, -\frac{1}{\sqrt{2}} \,, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) ,$$

Himpunan ortonormalnya $\{ u_1 , u_2 , u_3 \}$

Dapat ditunjukkan bahwa $\langle u_1 , u_2 \rangle = \langle u_1 , u_3 \rangle = \langle u_2 , u_3 \rangle = 0$

dan $\| u_1 \| = \| u_2 \| = \| u_3 \| = 1$

CONTOH 2.6.3.

Pandang basis dari R^3

$$M = \{ e_1 = (1 , 0 , 0), e_2 = (0 , 1 , 0), e_3 = (0 , 0 , 1) \}$$

Jelas bahwa $\langle e_1 , e_1 \rangle = \langle e_2 , e_2 \rangle = \langle e_3 , e_3 \rangle = 1$

$\langle e_i , e_j \rangle = 0$ untuk $i \neq j$

$M = \{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ adalah himpunan ortonormal.

M adalah barisan ortonormal dan juga barisan ortogonal.

CONTOH 2.6.4.

Misal X adalah ruang inner product dari fungsi riil kontinu pada interval tertutup $[-\pi , \pi]$, di mana inner productnya didefinisikan :

$$\langle x , y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x (t) y (t) \, dt$$

Himpunan di bawah ini adalah contoh dari himpunan bagian yang ortogonal dari X.

$$M = \{ 1 , \cos t , \cos 2t , \ldots , \cos nt , \sin t , \sin 2t , \sin nt \}$$