BAB III
ANALISIS METODE PERAMALAN

Hal yang paling pokok didalam pemilihan metode peramalan yang akan digunakan dalam situasi tertentu adalah bentuk deret data dan seleksi model peramalan yang paling cocok dengan deret data tersebut. Pertimbangan manusia harus dimasukkan namun ada juga beberapa syarat bermanfaat yang perlu dikemukakan. Tujuan utamanya adalah menentukan sifat trend (jika ada) dan musiman (jika ada). Jika sifat tersebut dapat diidentifikasi maka komponen random tidak begitu besar pengaruhnya. Sebagai contoh, jika datanya bersifat kuartalan, maka suatu plot dari data mentah tersebut menunjukkkan sifat trend dan musiman. Dengan membuat plot rata-rata bergerak 4 bulanan dari data, unsur musiman dapat dihilangkan. Jadi, dalam pemakaian metode penghalusan, analis deret data untuk memeriksa adanya faktor musiman akan membantu menetapkan metode penghalusan yang ditentukan, yang dapat mendeteksi ada atau tidaknya pengaruh musiman. Tahapan yang sama berupa analis dan seleksi juga digunakan dalam pemakaian metode-metode dekomposisi dan regresi. Dengan demikian tak mengherankan jika pada bab ini akan dibahas metode deret berkala umum untuk penganalisaan dan penyeleksian model.

Dalam bab II telah diuji 2 kategori utama teknik peramalan deret berjkala yaitu penghalusan dan dekomposisi. Metode penghalusan mendasarkan ramalannya pada prinsip kerata-rataan (penghalusan) kesalahan-kesalahan masa lalu dengan menambahkan prosentase kesalahan kepada prosentase ramalan sebelumnya. Secara matematis, metode penghalusan tunggal berbentuk sebagai berikut :

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(X_t - F_t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}1)$$
$$= F_t + \alpha e_t$$

Persamaan (3-1) dapat diperluas dengan mensubstitusikan :

$$F_t = F_{t-1} + \alpha(X_{t-1} - F_{t-1})$$

Sehingga menjadi

$$F_{t+1} = F_{t-1} + \alpha(X_{t-1} - F_{t-1}) + \alpha(X_t - F_t)$$
$$F_{t+1} = F_{t-1} + \alpha e_{t-1} + \alpha e_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}2)$$

Bila persubstitusian dilanjutkan untuk F_{t-2} maka :

$$F_{t+1} = F_{t-2} + \alpha(X_{t-2} - F_{t-2}) + \alpha(X_{t-1} - F_{t-1}) + \alpha(X_t - F_t)$$

$$F_{t+1} = F_{t-2} + \alpha e_{t-2} + \alpha e_{t-1} + \alpha e_t \quad \ldots\ldots\ldots (3\text{-}3)$$

Hasil pengembangan lebih lanjut substitusi ini akan menjadi lebih jelas dengan diketahui suatu ramalan awal, misalkan F_{t-2}, dapat diperoleh ramalan baru dengan menambahkan suatu prosentase kesalahan antara nilai sebenarnya dengan nilai ramalan tersebut (misalnya $X_{t-2} - F_{t-2}$) dengan demikian secara rata-rata F_{t+1} akan mempunyai pola yang mendekati pola data seben arnya.

Metode dekomposisi deret berkala didasrakan pada prinsip " pemecahan " data deret berkala kedalam masing-masing komponennya yaitu musiman, trend, siklus dan unsur random, dan kemudian dilakukan ramalan terhadap nilai masing-masing dalam komposisi tersebut secara terpisah (kecuali faktor acak yang tidak dapat diduga) dan akhirnya menggabungkan kembali ramalan-ramalan tersebut.

Apabila prinsip-prinsip metode kausal dikaitkan kedalam metode deret waktu, maka akan diperoleh metode autoregresi. Dalam model kausal atau explanatory, dari multiple regresi bentuknya adalah :

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots\ldots\ldots + b_kX_k + e \ldots\ldots\ldots (3\text{-}4)$$

Dimana X_1, X_2, ...,X_k adalah variabel bebas, b_o, b_1, ..., b_k adalah koeffisien regresi linier, e menyatakan unsur kesalahan, dan Y adalah variabel tak bebas. Bila variabel-variabel X_1, X_2, ...,X_k diganti dengan variabel yang dicari atau yang diramalkan, untuk periode waktu-waktu sebelumnya yaitu $X_1=Y_{t-1}$; $X_2 = Y_{t-2}$; $X_3 = Y_{t-3}$; ...... ; $X_k = Y_{t-k}$.

Maka persamaan (3-3) diatas menjadi :

$$Y_t = a + b_1Y_{t-1} + b_2Y_{t-2} + \ldots\ldots + b_x\, Y_{t-k} + e_t \ldots (3\text{-}5)$$

Persamaan (3-5) ini masih merupakan pesamaan regresi, akan tetapi berbeda dengan persamaan (3-4) karena variabel-variabel yang terdapat disebelah kanan yang merupakan variabel yang bebas (independent) adalah nilai-nilai dari

Y_t untuk nilai-nilai pada periode sebelumnya. Nilai ini adalah nilai dari waktu terbelakang (time lags) dari variabel yang diramalkan atau dependen variabel. Oleh karena itu maka metode ini dikenal dengan metode autoregresi (AR). Bila metode autoregresi ini dihubungkan dengan metode single exponential smoothing maka metode yang terkhir ini bentuknya hampir sama ddengan persamaan (3-5) yaitu :

$$F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha) X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 X_{t-3} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^k X_{t-k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}6)$$

Dalam metode exponential smoothing, nilai yang lalu dirata-ratakan secara tertimbang dengan menggunakan koefisien-koefisien parameter $\alpha, \alpha(1-\alpha), \alpha(1-\alpha)^2, \alpha(1-\alpha)^3 \ldots$.. Dengan cara yang sama, persamaan (3-5) dapat ditulis dalam bentuk:

$$Y_t = a + b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2} + b_k e_{t-k} + e_k \quad \ldots\ldots (3\text{-}7)$$

Disini secara eksplisit, ditetapkan hubungan ketergantungan antara nilai-nilai kesalahan yang berurutan dan persamaannya disebut moving average (MA). Perhatikanlah hubungannya dengan persamaan (3-3). Model-model autoregresi (AR) dapat secara efektif digabungkan dengan model moving average (MA) untuk membentuk kelas model yang sangat umum dan berguna dalam model deret berkala yang biasa digunakan pola atau proses antoregresif moving average (ARMA).

3.1. MODEL-MODEL DERET BERKALA

Hal pertama yang perlu diperhatikan adalah bahwa kebanyakan deret berkala bersifat non stasioner tetapi aspek autoregresi (AR) dan moving average (MA) dari model peramalan hanya berkenaan dengan deret berkala yang stasioner. Karena itu kita perlu memiliki notasi yang berlainan untuk deret berkala non stasioner yang asli dengan pasangan stasionernya, dengan diadakannya pembedaan (differencing). Notasi tersebut adalah operator shift mundur (backward shift), B yang penggunaannya adalah :

$$BX_t = X_{t-1} \quad \text{.............................} \quad (3\text{-}8)$$

Dalam hal ini notasi B yang ada akan mempunyai pengaruh menggeser X_t pada data 1 periode ke belakang, sedangkan untuk dua penerapan B untuk shift X_{t-1} akan menggeser data tersebut dua periode kebelakang sebagai berikut :

$$B(BX_t) = B^2X_t = X_{t-2}$$

Dengan menggunakan operator shift mundur kita bisa tepat untuk menggambarkan proses pembedaan. Untuk membuat data yang stasioner kita dapat melakukan p[embedaan pertama dari deret data sebagai berikut :

Pembedaan pertama : $X'_t = X_t - X_{t-1}$

Dengan menggunakan shift mundur persamaan diatas (pembedaan pertama) dapat ditulis sebagai berikut :

$$X'_t = X_t - BX_t = (1-B) X_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3-9)$$

Selanjutnya untuk pembedaan orde kedua :

$$\begin{aligned} X''_t &= X'_t - X'_{t-1} \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \\ X''_t &= (1-2B+B^2) X_t = (1-B)^2 X_t \quad \ldots\ldots \quad (3-10) \end{aligned}$$

Untuk mencapai stasioneritas maka perlu diadakan pembedaan. Jika kita melakukan pembedaan sampai orde ke-d maka secara umum dapat kita tulis sebagai berikut:

$X''_t = (1-B)^d X_t$ sebagai deret yang stasioner.

dan model umum ARIMA (Autoregresif Integrated Moving Average)/ ARIMA (0,d,0) akan menjadi :

$$(1-B)^d X_t = e_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3-11)$$

dimana

$(1-B)^d X_t$ adalah perbedaan orde ke-d

e_t adalah nilai kesalahan

Yang dimaksud dengan ARIMA (0,d,0) mempunyai arti dimana pada deret data yang asli tidak terdapat unsur autoregresif dan tidak mempunyai aspek moving average, tetapi hanya mengalami pembedaan orde ke-d.

Pada deret berkala stationery akan terdapat 3 kelas umum dari model-model yang dapat dipergunakan yaitu :

3.1.1. MODEL AUTOREGRESIVE (AR)

Model autoregresive atau yang biasa ditulis ARIMA (p,0,0) adalah suatu persamaan dengan bentuk umum :

$$X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + e_t \quad \ldots (3\text{-}12)$$

dimana

μ' = nilai konstan

ϕ_j = parameter autoregresive ke-j

e_t = nilai kesalahan pada saat t

Dalam praktek, dua kasus yang akan paling sering kita hadapi adalah apabila P=1 dan P=2 yaitu berturut-turut untuk model AR (1)/ARIMA (1,0,0) dan AR (2)/ ARIMA (2,0,0) seperti terlihat pada persamaan dibawah ini :

AR (1) atau ARIMA (1,0,0)

$$X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + e_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}13)$$

AR (2) atau ARIMA (2,0,0)

$$X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t \quad \ldots\ldots\ldots (3\text{-}14)$$

Sekarang dengan menggunakan simbol operator shift mundur B, maka persamaan diatas menjadi :

ARIMA (1,0,0)

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \mu' + e_t$$

$$(1 - \phi_1 B) X_t = \mu' + e_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}15)$$

ARIMA (2,0,0)

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \mu' + e_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = \mu' + e_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}16)$$

Mengenai model AR (p) atau ARIMA (P,0,0) akan dapat lebih mudah dimengerti dengan menyelidiki bentuk matematisnya sebagai contoh, suatu model AR (1) dapat ditulis sebagai :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t$$

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + e_{t-1}$$

disubstitusikan sehingga didapat :

$$X_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi e_{t-1} + e_t$$

$$X_{t-2} = \phi_1 X_{t-3} + e_{t-2}$$

disubstitusikan sehingga didapat :

$$X_t = \phi_1^2 (\phi_1 X_{t-3} + e_{t-2}) + \phi_1 e_{t-1} + e_t$$

$$X_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1 e_{t-1} + e_t$$

Sehingga akan didapat bentuk umum sebagai berikut :

$$X_t = \phi_1^{n-1} X_{t-n+1} + \phi_1^{n-2} e_{t-n+2} + \dots + \phi_1^4 e_{t-4} + \phi_1^3 e_{t-3} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi e_{t-1} + e_t \quad \dots\dots (3\text{-}17)$$

Model AR (2) atau ARIMA (2,0,0)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t \quad \dots\dots\dots\dots (3\text{-}18)$$

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + \phi_2 X_{t-3} + e_{t-1}$$

$$X_{t-2} = \phi_1 X_{t-3} + \phi_2 X_{t-4} + e_{t-1}$$

Disubstitusikan maka menjadi

$$X_t = \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + \phi_2 X_{t-3} + e_{t-1}) + \phi_2(\phi_1 X_{t-3} + \phi_2 X_{t-4} + e_{t-2}) + e_t$$

$$X_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 \phi_2 X_{t-3} + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1 \phi_2 X_{t-3} \; \phi_2^2 2X_{t-4} + \phi_2 e_{t-2} + e_t$$

$$X_t = \phi_1^2 (\phi_1 X_{t-3} + \phi_2 X_{t-4} + e_{t-1}) + 2\phi_1 \phi_2 X_{t-3} + \phi_2^2 e_{t-4} + \phi_1 e_{t-2} + e_t$$

$$X_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 \phi_2 X_{t-4} + \phi_1^2 e_{t-2} + 2\phi_1 \phi_2 X_{t-3} + \phi_2^2 X_{t-4} + \phi_1 e_{t-1} + \phi_2 e_{t-2} + e_t$$

$$X_t = (\phi_1^2 + 2\phi_2)\phi_1 X_{t-3} + (\phi_1^2 + \phi_2)\phi_2 X_{t-4} + (\phi_1^2 + \phi_2) e_{t-2} + \phi_1 e_{t-1} + e_t \quad \dots\dots\dots (3\text{-}19)$$

Penerapan persamaan AR(2) membutuhkan estimasi untuk nilai-nilai dari parameter autoregresi ϕ_1 dan ϕ_2. Kriteria yang akan digunakan untuk memilih nilai-nilai ϕ_1 dan ϕ_2 adalah yang menghasilkan kesalahan kuadrat sekecil mungkin. Dengan menyusun kembali unsur-unsur yang terdapat dalam persamaan (3-18), kesalahan (error) adalah :

$$e_t = X_t - (\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2})$$

dan tujuan kita adalah meminimalkan $\dfrac{e_t^2}{n-2}$

3.1.2. MODEL MOVING AVERAGE (MA)

Model moving average (MA) biasa juga disebut ARIMA (0,0,q) mempunyai bentuk umum :

$$X_t = \mu + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q} \quad \ldots\ldots (3\text{-}20)$$

dimana

θ_1 sampai θ_q adalah parameter-parameter moving average

e_{t-k} adalah nilai kesalahan pada saat t-k

μ adalah suatu nilai konstanta

Nilai-nilai θ_1 sampai θ_q tidak perlu dijumlahkan menjadi satu, dan juga nilai θ_1 tidak bergerak (moving) dengan adanya observasi baru seperti pada perhitungan rata-rata bergerak (moving average).

Suatu model moving dengan susunan pertama atau MA(1) atau ARIMA (0,0,1) adalah :

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}21)$$

$$X_{t-1} = e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2} \text{ maka } e_{t-1} = X_{t-1} + \theta_1 e_{t-2}$$

disubstitusikan sehingga didapat :

$$X_t = e_t - \theta_1 (X_{t-1} + \theta_1 e_{t-2})$$

$$X_t = e_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 e_{t-2}$$

sedangkan

$$X_{t-2} = e_{t-2} - \theta_1 e_{t-3} \quad \text{atau } e_{t-2} = X_{t-2} + \theta_1 e_{t-3}$$

akhirnya persamaan menjadi

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_1^2 e_{t-2} - \ldots \theta_1^{n-1} X_{t-n+1} - \theta_1^n . X_{t-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}22)$$

Untuk model MA(2)/ARIMA (0,0,2) beruntuk

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

sedangkan model MA(3) berbentuk :

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_3 e_{t-3}$$

3.1.3. MODEL AUTOREGRESSIVE - MOVING AVERAGE (ARMA)

Model autoregresif-moving average (ARMA) adalah kelas khusus yang sangat kuat dan baik dari penyaringan linier, dengan mana suatu data masukan yang random (acakan) disaring, sehingga hasilnya menunjukkan deret waktu yang diobservasi. Bentuk umum dari model ARMA dalam susunan AR(p) dan MA(q) atau ARMA(p,q) adalah

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3\text{-}23)$$

Persamaan (3-23) ini merupakan gabungan dari persamaan-persamaan (3-12) dan (3-20), sebagai contoh adalah nilai penjualan pada masa yang akan datang ditentukan baik oleh nilai penjualan pada masa-masa lalu, juga oleh kesalahan-kesalahan yang terjadi, yang terlihat dari perbedaan antara realisasi dengan nilai ramalan pada masa-masa yang lalu.

Bentuk susunan pertama dari autoregresif- moving average atau ARMA (1,1) adalah

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

Dengan mengkombinasikan pengaruh-pengaruh AR dan MA yaitu :

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2}$$

dan

$$e_{t-1} = X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} + \theta_1 e_{t-2}$$

maka dapat diperoleh persamaan

$$X_t = -\theta_1 X_{t-1} + \phi_1 X_{t-2} + \phi_1 \theta_1 X_{t-2} + e_t + \phi_1 e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2} - \theta_1 \phi_1 e_{t-2}$$

Model ARMA (2,1)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

Model ARMA (2,2)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t - \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2}$$

demikian seterusnya untuk model-model ARMA.

3.2. IDENTIFIKASI DERET BERKALA

Pengidentifikasian ciri-ciri dari suatu deret waktu, seperti kestatisan (stationarity), musiman (seasonality) dan seterusnya, membutuhkan pendekatan secara sistematis. Proses demikian disebut analisa deret berkala dan menggunakan koeffisien antokorelasi untuk beberapa perbedaan terbelakangnya waktu (time lags) dari variabel yang diramalkan.

Persamaan (3-5) diatas terdiri dari variabel yang diramalkan (dependent variable) Y_{t-1}, Y_{t-2}, ...,Y_{t-k} seluruhnya merupakan nilai-nilai periode sebelumnya dari variabel yang diramalkan. Korelasi sederhana dari Y_t dan Y_{t-1} , Y_t dan Y_{t-2}, Y_t dan Y_{t-3} atau suatu Y_t dan Y_{t-k} dapat diperoleh dengan menggambarkan regressinya terlebih dahulu, bila korelasi ini menunjukkan variabel yang sama (auto) dan perbedaan periode waktu atau lags disebut auto korelasi. Hal ini berarti bahwa korelasinya adalah sama besar. Autokorelasi dari Yt dan Yt-1 menunjukkan berapa besar hubungan Y_t dan Y_{t-1} antara satu dengan lainnya.

Apabila terdapat deret yang acakan (random) dan kemuddian dihitung korelasi Y_t dan Y_{t-1}, hasilnya akan mendekati nol, jika setiap nilai dari deret waktu tersebut tidak berhubungan dengan nilai yang lainnya. Koeffisien autokorelasi yang mendekati nol menunjukkan suatu deret waktu yang nilainya secara berurutan tidak berhubungan satu dengan yang lainnya. Sebaliknya, autokorelasi dari nilai berurutan Y_t dan Y_{t-1} dari suatu deret waktu, 1, 2, 3, 4, ...,20 diharapkan menghasilkan hasil yang sangat tinggi, jika terdapat tingkat ketergantungan yang sangat tinggi diantara nilai-nilai yang berurutan. Dengan melihat autokorelasi untuk beberapa terbelakangnya waktu (time lags) yang lebih dari satu periode akan memberikan tambahan keterangan / informasi tentang berapa nilai dari deret waktu itu yang berhubungan.

3.2.1. KOEFFISIEN AUTOKORELASI

Bagaimanapun statistik kunci didalam analisis deret berkala adalah koeffisien autokorelasi. Pengertian koeffisien autokorelasi dapat dimengerti dengan baik dengan melihat illustrasi grafik dan melihat perhitungan matematik yang ada. Sebagai contoh misalnya variabel Yt menyatakan permintaan untuk produk A dan untuk sepuluh periode waktu yang lalu telah diobservasi dan mempunyai nilai seperti terlihat pada tabel III - 1.

Tabel III - 1

DERET WAKTU DARI PEMERINTAH UNTUK PRODUK A

Periode	Nilai asal variabel	Satu waktu terbelakang (time lags) variabel Yt-1	Dua waktu terbelakang variabel Yt-2
(1)	(2)	(3)	(4)
1	13	8	15
2	8	15	4
3	15	4	4
4	4	4	12
5	4	12	11
6	12	11	7
7	11	7	14
8	7	14	12
9	14	12	-
10	12	-	-

Berdasarkan tabel III - 1 diatas Yt dapat dinyatakan sebagai:

$$Y_t = a + b_1Y_{t-1} + b_2Y_{t-2} + U_t \text{ .... (3-24)}$$

Persamaan (3-7) adalah suatu model deret waktu autoregresive (AR) yang menyatakan Y_t sebagai suatu kombinasi linear dari dua buah nilai sebelumnya. Variabel Y_{t-1}, dan Y_{t-2} disusun secara mudah dengan memindahkan ddua nilai periode sebelumnya keperiode yang terakhir. Hasilnya dengan menyatakan nilai pertama Y_{t-1} dan nilai yang kedua Y_{t-2}, maka autokorelasi diantara Yt dan Y_{t-1} serta Y_t dan Y_{t-2} dapat dihitung tanpa kesulitan. Autokorelasi Y_t dan Y_{t-1} menyatakan berapa besar hubungan yang terdapat antara nilai yang satu dengan nilai lainnya yang berturut-turut dalam dua periode (2 time lags).

Koeffisien korelasi sederhana diantara Y_t dan Y_{t-1} dapat dihitung dengan menggunakan formula:

$$\text{Korelasi : } r = \frac{\text{Cov}}{S_{Y_t}\, S_{Y_{t-1}}}$$

$$\text{dimana} \quad \text{Cov} = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y}_t)(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})}{n-1}$$

$$\text{maka:} \quad r = \frac{n \sum Y_t - Y_{t-1} - \sum Y_t \sum Y_{t-1}}{\sqrt{[\, n \sum Y^2{}_t - (\sum Y_t)^2 \,]\,[\, n \sum Y^2{}_{t-1} - (\sum Y_{t-1})^2 \,]}} \quad \ldots (\text{ 3-25})$$

ataupun

$$r_{Y_t, Y_{t-1}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (Y_t - \bar{Y}_t)(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})}{\sigma_{Y_t} - \sigma_{Y_{t-1}}} \quad \ldots\ldots (3\text{-}26)$$

dimana :

$$\sigma_{Y_t} = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - \bar{Y}_t)^2}{n-1}}$$

dan

$$\sigma_{Y_{t-1}} = \sqrt{\frac{\sum (Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})^2}{n-1}}$$

Hasil korelasi dari data yang terdapat pada tabel III-1 adalah :

$$r_{Y_t, Y_{t-1}} = \frac{-27}{12(11,6)} = -0,19 \quad \text{(satu time lags)}$$

$$r_{Y_t, Y_{t-2}} = 0,22 \quad \text{(dua time lags)}$$

Persamaan (3-26) dapat disederhanakan dan dibuat agar dapat diterapkan untuk autokorelasi deret waktu, dengan membuat asumsi bahwa deret Y_t adalah statis / tetap sehingga $\bar{Y}_t = \bar{Y}_{t-1}$. Dengan menggunakan asumsi penyederhanaan ini, maka persamaan (3-26) menjadi:

$$r_{Y_t, Y_{t-1}} = \frac{\sum_{t=1}^{n=1} (Y_t - \bar{Y}) (Y_{t-1} - \bar{Y}_t)}{\sigma_{Y_t}^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (Y_t - \bar{Y}) (Y_{t-1} - \bar{Y}_t)}{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y}_t)^2} \quad .... (3-27)$$

Asumsi statisnya deret memberikan suatu keuntungan bahwa koefisien autokorelasi antara Y_{t-1} dan Y_{t-2} akan sama seperti diantara Y_t dan Y_{t-1}, karena rata-ratanya adalah sama dan Y_{t-1} rata-ratanya sama dengan Y_t dan Y_{t-1}. Persamaan (3-27) adalah umum dan dapat dipergunakan untuk seluruh " time lags " dari satu periode untuk suatu deret waktu. Jadi persamaan (3-27) dapat dituliskan sebagai:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (Y_t - \overline{Y}_t) (Y_{t-1} - \overline{Y}_t)}{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \overline{Y}_t)^2} \quad .... (3-28)$$

dimana r_1 menyatakan koefisien autokorelasi dari satu time lags.

Demikian pula halnya, autokorelasi untuk 2, 3, 4, ..., m time lags, dapat diperoleh dan ditunjukkan oleh r_k. Koefisien autokorelasi dapat dicari dengan menggunakan persamaan yang umum :

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \overline{Y}) (Y_{t-k} - \overline{Y})}{(Y_t - \overline{Y}_t)^2} \quad .... (3-29)$$

Dalam persamaan (3-29) penjumlahan dari Y_{t-k} disusun kembali dari persamaan (3-28). Hal ini tidak mempengaruhi hasil, jika kestatisan telah diasumsikan. Persamaan (3-29) dapat diinterpretasikan secara tepat seperti koefisien korelasi untuk regresi. Kwadrat dari persamaan (3-29) adalah ratio dari " explain to total variation ", yang menunjukkan apakah garis autoregresi diantara Y_t dan Y_{t-k} adalah lebih baik dari garis rata-rata Y_t, dan berapa besar skala relatif diantara 0 dan 1.

Selanjutnya sebagai contoh, nilai r_1 untuk data di tabel III-1 akan dihitung dengan menggunakan persamaan (3-29) :

$$r_1 = \frac{(13-10)(8-10)+(8-10)(15-10)+\ldots+(14-10)(12-10)}{(13-10)^2+(8-10)^2+(15-10)^2+\ldots+(14-10)^2(12-10)^2}$$

$$= \frac{3(-2) + (-2)5 + \ldots + 4(2)}{3^2 + (-2)^2 + 5^2 + \ldots + 4^2 + 2^2}$$

$$= \frac{-27}{144} = -0,188$$

Persamaan (3-29) jelas merupakan cara menghitung autokorelasi yang lebih efisien daripada persamaan (3-25). Dengan menggunakan persamaan (3-29) kita bisa menghitung r_2, r_3 dan sebagainya. Sebagai contoh, nilai r_2 adalah :

$$r_2 = \frac{(13-10)(15-10)+(8-10)(4-10)+\ldots+(7-10)(12-10)}{(13-10)^2+(8-10)^2+(15-10)^2+\ldots+(14-10)^2(12-10)^2}$$

$$= \frac{3(5) + (-2)(-6) + 5(-6)+ \ldots + (-3)(2)}{3^2 + (-2)^2 + 5^2 + \ldots + 4^2 + 2^2}$$

$$= \frac{-29}{144} = -0,201$$

Koefisien autokorelasi r_3 dan r_4 berturut-turut adalah 0,181 dan - 0,132.

3.2.2. KOEFFISIEN AUTOKORELASI PARSIAL

Salah satu tujuan didalam analisa deret berkala adalah untuk memilih model ARIMA yang tepat guna suatu peramalan. Dalam hal ini autokorelasi parsial digunalan untuk mengukur tingkat keeratan (relasi) antara X_t dan X_{t-k} (variabel bebas dan variabel terikat), jika pengaruh time lags 1, 2, ... , k-1 dianggap terpisah.

Jika koefisien autoregresif terakhir dari model AR (m) dimaksudkan sebagai koefisien autokorelasi parsial berorde m maka sebagai contoh persamaan-persamaan dibawah ini yang masing-masing digunakan untuk menetapkan AR (1), AR (2), ..., AR (m-1) dan proses AR (m). Koefisien X yang terakhir pada masing-masing persamaan merupakan koefisien autokorelasi parsial. Ini berarti notasi ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ..., ϕ_{m-1} dan ϕ_m adalah m buah koefisien autokorelasi parsial yang pertama untuk deret berkal tersebut:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t$$
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t$$
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + e_t$$

.

.

.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_{m-1} X_{t-m+1} + e_t$$
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_{m-1} X_{t-m+1} + \phi_m X_{t-m} + e_t$$

Dari persamaan-persamaan ini dapat dicari nilai-nilai ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ..., ϕ_{m-1}, ϕ_m. Penghitungan yang diperlukan akan memakan banyak waktu, oleh karena itu lebih memuaskan untuk memperoleh taksiran ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ..., ϕ_{m-1}, ϕ_m berdasarkan pada koefisien autokorelasi. Penaksiran tersebut dapat dilakukan dengan metode dibawah ini.

Apabila persamaan (3-30) kita kalikan dengan X_{t-1} maka akan kita dapatkan persamaan:

$$X_{t-1} X_t = \phi_1 X_{t-1} X_{t-1} + X_{t-1} e_t \qquad \text{.......(3-31)}$$

Persamaan (3-31) kita ambil nilai ekspektasinya maka kita dapatkan:

$$E\,(X_{t-1} X_t) = \phi_1 E(\, X_{t-1} X_{t-1}\,) + E(\, X_{t-1} e_t\,)$$

Jika diambil

$$E\,(X_{t-1} X_t) = \gamma_1,\ E\,(\, X_{t-1} X_{t-1}\,) = \gamma_0$$

dan $$E\,(\, X_{t-1} e_t\,) = 0.$$

Dimana γ_0 dan γ_1 adalah notasi untuk autokovarians populasi orde 0 dan 1. γ_0 adalah varians deret berkala, dan $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ adalah parameter autokorelasi untuk lag k.

Sehingga di dapat:

$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0$ apabila kedua ruas dibagi dengan γ_0 maka didapat:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1$$

$$\rho_1 = \phi_1 \quad \text{karena } \rho_1 = \gamma_1 / \gamma_0$$

Karena $\phi_1 = \rho_1$ maka berarti autokorelasi parsial pertama sama dengan autokorelasi pertama dan keduanya sama ditaksir didalam sampel dengan r_1. Proses persamaan ini bisa diperluas dengan mengalikan X_{t-k} pada persamaan (3-31), kemudian kita cari harga ekspektasinya maka bisa kita dapatkan sekelompok persamaan simultan, yang dapat dipakai untuk mencari nilai-nilai $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{m-1}$ dan ϕ_m. Nilai-nilai ini dapat digunakan sebagai penaksir nilai-nilai autokorelasi parsial sampai m time lag.

Dalam hal ini yang terpenting bagi kita adalah apabila proses yang mendasari diperolehnya rangkaian (series) adalah model AR (1) maka harus dimengerti bahwa hanya ϕ_1 yang secara nyata akan berbeda dari nol, sedangkan $\phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_{m-1}, \phi_m$ tidak akan berbeda nyata secara statistika. Apabila proses pembangkit yang sebenarnya adalah AR (2) maka hanya ϕ_1 dan ϕ_2 yang akan berbeda nyata, sedangkan nilai-nilai taksiran lainnya tidak akan signifikan. Dengan kata lain, karena cara pembentukan ϕ_1, $\phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_{m-1}, \phi_m$, maka koefisien yang akan berbeda nyata dari nol hanya sampai pada orde proses AR yang digunakan untuk membangkitkan data. Didalam identifikasi model, kemudian diasumsikan bahwa apabila hanya terdapat dua autokorelasi parsial yang berbeda nyata dari nol, maka generating prosesnya berorde dua dan orde dari model peramalannya adalah AR (2). Apabila ada P autokorelasi parsial yang signifikan, maka orde yang diambil haruslah AR (P).

Pada kenyataannya, nilai tersebut menunjukkan suatu ketergantungan dari satu lag kelag berikutnya yang membuatnya menyerupai cara autokorelasi pada AR. Namun apabila autokorelasi parsial tidak memperlihatkan penurunan nilai secara random, melainkan menurun secara eksponensial, maka hal ini dapat diasumsikan bahwa generating proses yang sebenarnya adalah MA.

Jadi apabila hanya terdapat p autokorelasi parsial yang significantnya berbeda dari 0, maka diasumsikan bahwa proses tersebur adalah AR (P). Jika autokorelasi parsial menurun mendekati 0 secara eksponensial, proses tersebut diasumsikan sebagai proses moving average.

3.2.3. ANALISA AUTOKORELASI

a. Penentuan Adanya Acakan (Randomness) dari Data.

Autokorelasi dapat dipergunakan untuk menentukan apakah suatu himpunan (set) data adalah acakan (random). Apabila seluruh koeffisien autokorelasi itu berbeda dalam batas-batas garis tingkat keyakinan, maka data tersebut adalah acakan. Sebagai contoh, ada 36 observasi yang memberikan nilai-nilai dari deret waktu seperti terlihat pada tabel III - 2. Deret ini disusun dengan menggunakan angka randdom dari 0 sampai dengan 100.

Secara teoritis seluruh koeffisien autokorelasi untuk suatu deret angka acakan (random) haruslah nol. Observasi-observasi yang dddilakukan seperti terdapat pada tabel III - 2 adalah salah satu dari kemungkinan sample yang terjadi dari 36 angka-angka acakan.

TABEL III - 2

DERET WAKTU DENGAN 36 NILAI

Periode	Nilai	Periode	Nilai	Periode	Nilai
1	23	13	86	25	17
2	59	14	33	26	46
3	36	15	90	27	9
4	99	16	74	28	72
5	36	17	7	29	33
6	74	18	54	30	17
7	30	19	98	31	3
8	54	20	50	32	29
9	17	21	86	33	30
10	36	22	90	34	68
11	89	23	65	35	87
12	77	24	20	36	44

Besarnya autokorelasi yang terdapat dari masing-masing sample yang dapat disusun adalah berbeda-beda. Jika jumlah sample dari 36 angka acakan dilakukan secara tidak terbatas, maka rata-rata koeffisien autokorelasinya dengan 1, 2, 3, ..., 10 time lags akan memberikan hasil yang mendekati nilai nol.

Koeffisien autokorelasi dari data random mempunyai distribusi sampling yang mendekati kurva normal dengan nilai tengah nol dan kesalahan standar $1/\sqrt{n}$. Hal ini dapat digunakan untuk menetapkan apakah nilai r_k berasal dari populasi yang mempunyai nilai autokorelasi nol pada time-lag k. Karena n adalah 36 seperti pada tabel III - 2, dengan demikian kesalahan standarnya adalah $1/\sqrt{36} = 0,167$. Ini berarti bahwa dengan 95% tingkat keyakinan, maka 95% dari seluruh koeffisien-koeffisien autokorelasi yang didasarkan atas sampel harus terletak didalam batas rata-rata plus atau minus 1,96 kesalahan standar. Nilai 1,96 diperoleh dengan menggunakan tabel Z dari kurva normal dengan 95% tingkat keyakinan, deret data tersebut dapat disimpulkan sebagai acakan (random), jika autokorelasi yang diperoleh terletak didalam batas-batas.

$$-1,96 \ (\ 0,167 \ ) \leq r_k \leq 1,96 \ (\ 0,167 \ )$$

$$0,327 \leq r_k \leq 0,327$$

Gambar III - 1 menunjukkan koeffisien autokorelasi untuk data yang terdapat dalam tabel III - 2. Dua garis tegak lurus yang terputus-putus adalah 95% batas-batas keyakinan atas dan bawah untuk deret yang acakan (random) yaitu -0,327 dan 0,327.

Karena koeffisien korelasi berada didalam tingkat keyakinan 95% maka data ditabel III - 2 adalah acakan (random).

b. Kestabilan Deret Berkala

Dengan memeriksa koeffisien autokorelasi dari suatu deret berkala kita dapat mengetahui kestatisan deret berkala tersebut. Ciri dari kestatisan

Gambar III - 1

AUTOKORELASI UNTUK DERET DATA DARI TABEL III - 2

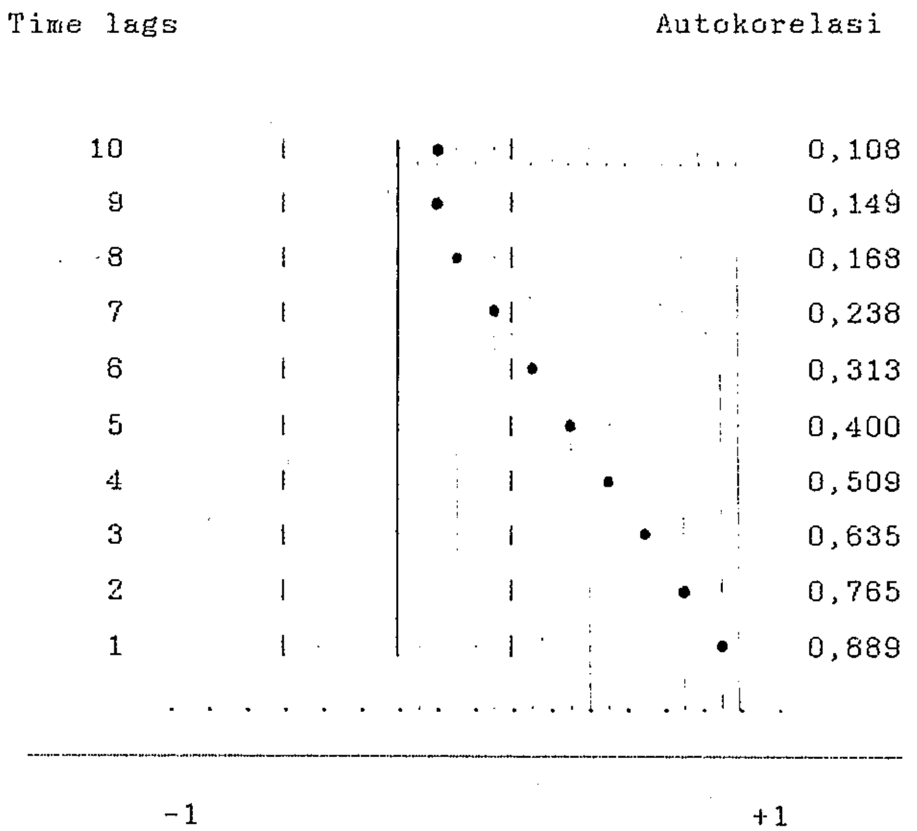
Time lag	Autokorelasi
10	-0,152
9	-0,011
8	-0,004
7	0,275
6	0,025
5	-0,183
4	-0,031
3	-0,043
2	0,099
1	0,103

-1 +1

(stationarity) suatu deret berkala jika autokorelasi dari deret data tersebut menjadi nol setelah time lags kedua atau ketiga, sedangkan untuk data yang tidak statis autokorelasinya berbeda dari nol untuk beberapa periode waktu. Bila dditunjukkan secara grafik, maka autokorelasi dari deret data yang tidak statis menggambarkan suatu trend yang bergerak secara diagonal dari kanan kekiri jika jumlah time lags bertambah.

Gambar III - 2

Koeffisien Autokorelasi dari suatu deret yang tidak statis:



Gambar III -2 menunjukkan grafik autokorelasi untuk deret yang tidak statis. Autokorelasi dari time lags satu sampai lima nyata berbeda dari nol dan terdapat suatu trend yang jelas terlihat.

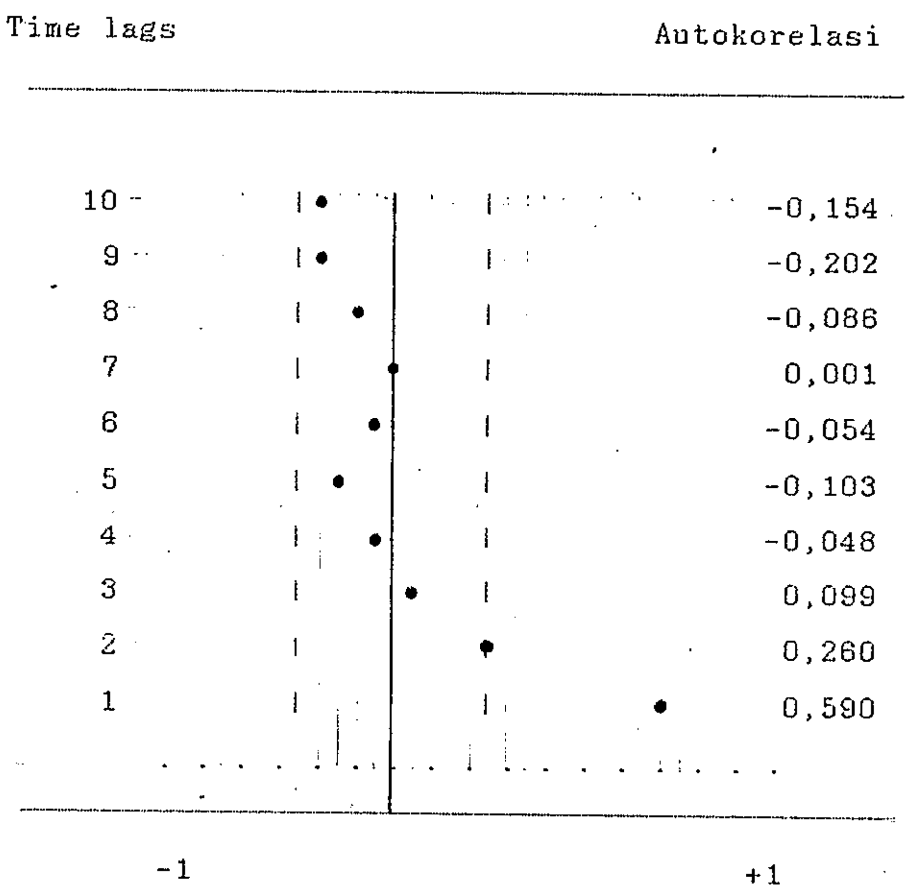
Dengan adanya trend dari suatu deret berkala maka dapat disimpulkan bahwa antara nilai yang satu dengan yang saling saling berkorelasi. Dalam deret data yang demikian autokorelasi untuk satu time lags adalah cukup besar.

Perhatikan deret angka yang sederhana 2, 4, 6, 8, ..., 20 yang mengandung trend linier dan tidak bersifat random. Dengan mengurangkan nilai-nilai yang berurutan, 4-2, 6-4, 8-6, ..., 20-18 kita akan memperoleh nilai-nilai pembedaan pertama (first differences) yang merupakan deret angka 2, 2, 2, ..., 2. Deret ini jelas stasioner. Jadi untuk mendapatkan kestasioneran dapat dibuat deret angka baru yang terdiri dari perbedaan angka antara periode yang berturut-turut.

Autokorelasi untuk banyak deret yang tidak statis tetapi acakan akan membentuk garis lurus. Autokorelasi itu akan berfluktuasi disekitar garis lurus tersebut. Gambar III - 2 menunjukkan suatu deret yang tidak statis, jika autokorelasi tidak turun menjadi nol setelah nilai kedua dan ketiga, tetapi menunjukkan suatu trend. Sebaliknya Gambar III -3 menunjukkan autokorelasi deret yang statis tetapi tidak acakan. Setelah dua time lags, autokorelasi tidak nyata berbeda dari nol.

Gambar III - 3

Koeffisien Autokorelasi dari Suatu Deret yang Statis tapi tidak acakan.



Autokorelasi untuk timelags satu dan dua periode mengandung pola selain trend.

c. Mengenali Adanya Faktor Musiman

Yang dimaksud dengan musiman adalah suatu pola yang berulang-ulang dalam selang waktu yang tetap.

Misalnya penjualan buku tulis cukup besar pada waktu tahun ajaran baru. Jika dalam deret data terdapat suatu pola yang konsisten, maka koeffisien autokorelasi dari lags 12 bulan akan mempunyai nilai positif yang besar yang memperlihatkan adanya pengaruh musiman. Apabila signifikansinya tidak berbeda dari nol, hal ini menunjukkan bahwa bulan-bulan didalam satu tahun, tidak berhubungan (random) dan tanpa pola yang konsisten dari satu tahun ketahun berikutnya. Data yang demikian adalah tidak musiman.

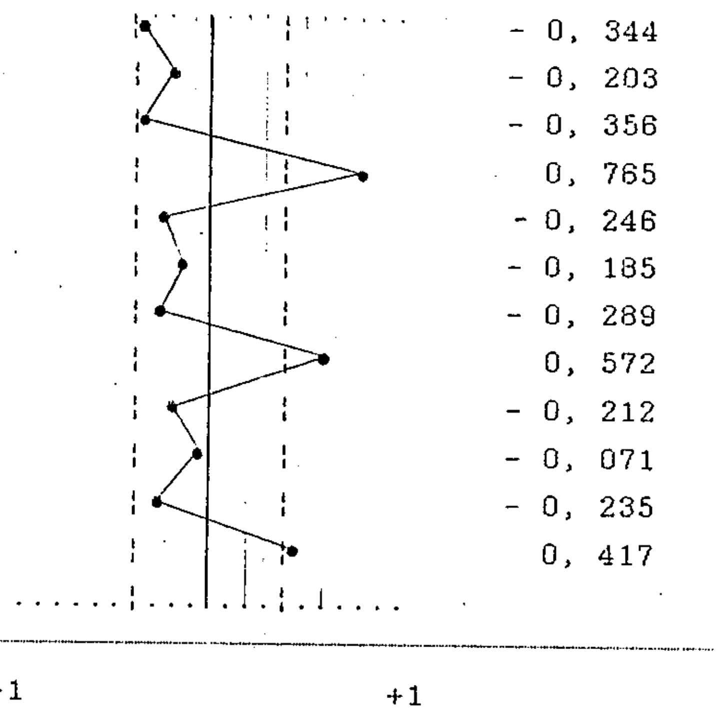
Untuk data yang stasioner, faktor musiman dapat diketahui dengan pengidentifikasian koeffisien autokorelasi lebih dari dua atau tiga time lags yang berbeda nyata dari nol. Suatu autokorelasi yang secara signifikan berbeda dari nol menunjukkan adanya pola tertentu dalam data. Untuk mengetahui adanya musiman ini harus dilihat autokorelasinya yang cukup tinggi.

Koeffisien autokorelasi yang terlihat dalam gambar III -4 jelas menggambarkan suatu pola musiman selama empat periode (4 kwartal).

Gambar III -4

KOEFFISIEN AUTOKORELASI DARI DATA KWARTALAN

Time lags	Autokorelasi
1	- 0, 344
2	- 0, 203
3	- 0, 356
4	0, 765
5	- 0, 246
6	- 0, 185
7	- 0, 289
8	0, 572
9	- 0, 212
10	- 0, 071
11	- 0, 235
12	0, 417

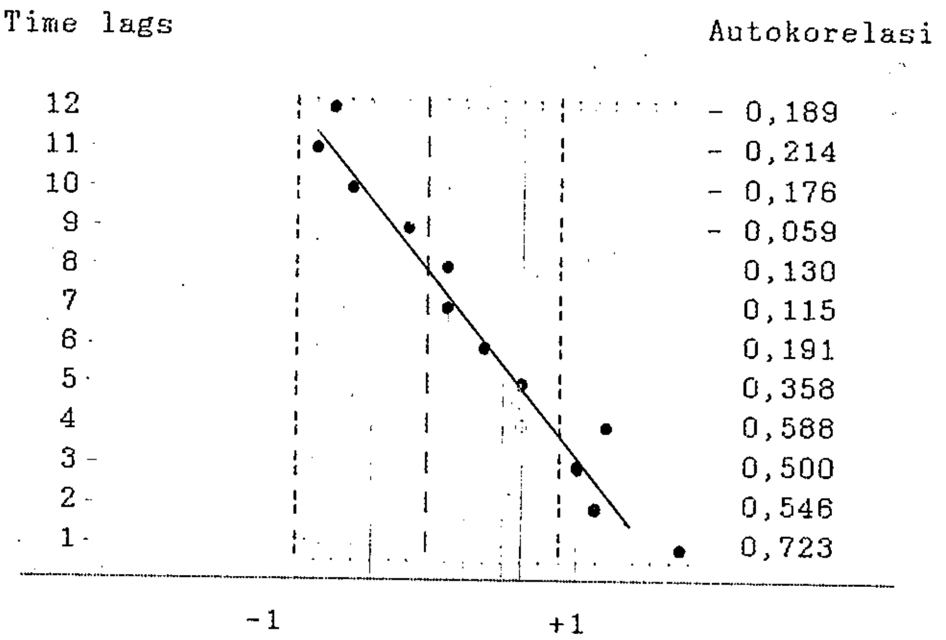


Ini dapat dilihat pada r_4 = 0.765 yang jelas berbeda dari nol. Demikian pula halnya dengan r_8 = 0,572 adalah significant dan r_{12} = 0,417 terletak pada garis batas. Sifat-sifat periode dari musiman dapat dilihat dengan kenyataan bahwa $r_4 > r_8 > r_{12}$ dan ketiga-tiganya adalah nyata (significant) berbeda dari nol. Sebenarnya autokorelasi r_4 = 0,765 cukup menunjukkan adanya musiman dengan panjang 4 periode. Kenyataan tambahan yang menguatkan kesimpulan ini adalah besarnya nilai r_8 dan r_{12} .

Adanya faktor musim dapat dengan mudah dilihat didalam grafik autokorelasi atau dilihat sepintas pada autokorelasi dari time lags yang berbeda, apabila hanya ini pola yang ada. Namun, Hal ini tidaklah selalu mudah apabila dikombinasikan dengan pola lain seperti trend semakin kuat pengaruh trend akan semakin tidak jelas adanya, faktor musim, karena secara relatif besarnya autokorelasi yang positif merupakan hasil dari adanya ketidak stasioneran data (adanya trend) yang stasioner sebelum ditentukan adanya faktor musim.

GAMBAR III-5

KOEFISIEN AUTOKORELASI DARI DATA KWARTALAN DENGAN TREND YANG KUAT



Gambar III-5 menunjukkan suatu himpunan (set) autokorelasi untuk deret data yang tidak statis. Trend dapat dengan mudah dilihat dalam autokorelasi. Autokorelasi yang berlaku untuk 4 periode time lags adalah r_4 = 0,588. Nilai ini adalah lebih besar dari 2 periode time lags sebelumnya, dan sama pula halnya dengan r_8 yang nilainya lebih besar dari 2 periode yang mendahuluinya.

Hal ini memberikan gambaran adanya musiman akan tetapi tidak jelas identifikasinya. Setelah mendeteksi adanya trend, maka data harus dibedakan dan autokorelasi dari deret yang dibedakan harus dihitung. Hasilnya akan terlihat seperti grafik yang terdapat dalam gambar III-4.

Data yang dibedakan (differenced senes) adalah statis jika koefisien autokorelasi menolak pola musim yang nyata (significant) dari 0. Gambar III-4 menggambarkan dengan jelas pola musim yang lamanya adalah 4 periode. Apabila koefisien autokorelasi yang diperoleh dalam analisa menunjukkan nilai yang berbeda nyata sehingga dapat ditentukan model smoothing yang tepat dan lamanya periode yang menunjukkan musiman, maka nilai autokorelasi tersebut tidak perlu diplot dalam gambar.

Tidak seluruh autokorelasi untuk data dengan trend dan musiman akan terlihat seperti di gambar (III-4) dan (III-5). Apabila trend lebih kuat daripada musiman maka autokorelasi dari data asalnya mungkin jatuh pada garis trend yang diagonal dari kanan ke kiri.

Sebaiknya ekstrim yang lain, musimannya jelas terlihat dan mendominasi trend. Jadi langkah pertama dalam analisa autokorelasi adalah ketidakstatisan (non stationarity) harus diubah. Apabila hal ini telah dikerjakan maka polanya dapat diperiksa.

3.3. BEBERAPA MODEL UNTUK DERET DATA MUSIMAN

3.3.1. Model Musiman yang Horisontal

Yang dimaksud dengan model musiman yang horisontal adalah apabila pola dari suatu deret data dalam waktu 1 tahun menunjukkan sifat musiman, tetapi jumlah dari derat data tersebut dari tahun ke tahun rata-ratanya hampir sama. Model ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\hat{Y}_t = \bar{Y}_t \rho_t$$

Dimana $\hat{Y}t$ = permintaan yang diramal.

$\bar{Y}t$ = permintaan rata-rata.

ρt = rasio musiman untuk periode t

Untuk permulaan prosesi ini permintaan masa lalu ($Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$) digunakan untuk mengestimasikan permintaan rata-rata dan nilao rasio musiman (ρ_t). Jika $\hat{Z}_t$ adalah nilai rata-rata pada saat T dan r_{T+m} adalah estimasi rasio musiman ρ_{T+m} untuk m=1, 2, , 3, 4, ..., maka untuk m periode di masa depan besar ramalannya menjadi

$$\hat{Y}_{T+m}(T) = \hat{Z}_T \cdot r_{T+m}$$

Jika nilai-nilai ini sudah dihitung, tingkat awal menjadi sempurna, sehingga ramalan dapat dibuat. Untuk membuat suatu ramalan paling sedikit diperlukan permintaan bulanan masa lalu selama 2 tahun penuh dan tambahan data seharusnya M = 12 sehingga untuk i banyaknya tahun dari data historis yang dapat diperoleh dari tahun-tahun sebelumnya adalah :

$$i = \frac{T}{12}$$

Data historis selanjutnya dikelompokkan menjadi i kelompok sebagai berikut :

$$\begin{array}{llll} Y_1, & Y_2, & Y_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, & Y_{12} \\ Y_{13}, & Y_{14}, & Y_{15}, \ldots\ldots\ldots, & Y_{24} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$Y_{T-11},\ Y_{T-10},\ Y_{T-9},\ \ldots\ldots\ldots,\ Y_T$$

Dalam hal ini (Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{12}) adalah permintaan historis tahun pertama. (Y_{13}, Y_{14}, ..., Y_{24}) adalah permintaan historis tahun kedua dan seterusnya.

Demikian juga: (Y_1, Y_{13}, ..., Y_{T-11}) adalah permintaan pada bulan tertentu; (Y_2, Y_{14}, ..., Y_{T-10}) adalah permintaan pada bulan yang lainnya, demikian seterusnya.

Dengan mempergunakan data diatas, 13 buah penaksir dapat dihitung yaitu:

Z_t = rata-rata permintaan bulanan (pada saat T)

r_{T+m} = adalah penaksir rasio musiman .

untuk bulan-bulan T+1, T+2, T+3, ..., T+12

dimana m = 1, 2, 3, ..., 12.

Sebelum memulai peramalan, maka perlu kita pilih harga-harga dari dua parameter yaitu parameter α yang dipergunakan untuk menaksir $\hat{Z}_T$ dan γ untuk menaksir r_{T+m} dimana harga dari parameter α dan γ adalah:

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

Untuk memulai suatu peramalan perlu dilakukan beberapa langkah sebagai berikut:

- Tentukan permintaan bulanan rata-rata untuk setiap tahun selama i tahun.

$$\bar{Y}(1) = 1/12 \; (Y1 + Y2 + \ldots\ldots \; Y12)$$

$$\bar{Y}(2) = 1/12 \; (Y13 + Y14 + \ldots\ldots \; Y24)$$

$$\vdots$$

$$\bar{Y}(i) = 1/12 \; (Y_{T-11} + Y_{T-10} + \ldots\ldots \; Y_T)$$

- Hitung rasio musiman untuk bulan ke t dengan cara:

$$\tilde{r}_t = \begin{cases} \dfrac{Y_t}{\bar{Y}(1)} & \text{untuk } t=1,2,3,\ \ldots,12 \\ \dfrac{Y_t}{\bar{Y}(2)} & \text{untuk } t=13,14,\ \ldots,24 \\ \vdots & \\ \dfrac{Y_t}{\bar{Y}(i)} & \text{untuk } t=T-11,T-10,\ldots,\ T \end{cases}$$

- Rasio musiman untuk setiap 12 bulan kalender

$$\hat{r}_1 = 1/i \; (\tilde{r}_1 + \tilde{r}_{13} + \ldots + \tilde{r}_{T-11})$$
$$\hat{r}_2 = 1/i \; (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_{14} + \ldots + \tilde{r}_{T-10})$$
$$\vdots$$

$$\hat{r}_{12} = 1/i\ (\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{24} + \ldots + \tilde{r}_T)$$

- Andaikan $Z_0 = Y(1)$ dengan memulai $t = 1$ sampai $t = T$ kita terapkan relasi recursive dibawah ini:

$$\hat{Z}_t = \alpha \left[\frac{Y_t}{r_T} \right] + (1 - \alpha)\ \hat{Z}_{t-1}$$

$$\hat{r}_{t+12} = \gamma \left[\frac{Y_t}{Z_T} \right] + (1 - \gamma)\ \hat{r}_t$$

Rasio musiman yang terbaru ($\hat{r}_{T+1}, \ldots, \hat{r}_{T+12}$) sebanyak 12 buah, kemudian dinormalkan, sehingga rata-ratanya 1. Dalam hal ini harus dihitung terlebih dahulu nilai rasio musiman rata-rata.

$$\bar{r} = 1/12\ (\hat{r}_{T+1} + \hat{r}_{T+2} + \ldots, + \hat{r}_{T+12})$$

kemudian dihitung penyesuaian rasio.

$$r_{T+t} = \frac{\hat{r}_{T+t}}{\bar{r}} \quad \text{untuk } t = 1, 2, 3, \ldots, 12$$

Dengan demikian proses permulaan dari suatu peramalan sudah dapat dikatakan sempurna maka untuk ramalan pertama dapat dikembangkan. Kemudian dapat dihitung nilai ramalan untuk m periode kemasa mendatang dengan jalan:

$$\hat{Y}_{T+m}\ (T) = \hat{Z}_T\ r_{T+m}$$

Karena ada satu rasio musiman untuk setiap bulan kalender, maka ramalan akan berulang setelah T = 12 yaitu:

$$\hat{Y}_{T+13}\ (T) = \hat{Y}_{T+1}\ (T)$$

$$\hat{Y}_{T+14}\ (T) = \hat{Y}_{T+2}\ (T)$$

demikian seterusnya.

3.3.2. Metode Winter.

Metode Winter biasa disebut juga dengan model musiman dengan perkalian trend (multiplicative trend seasonal model). Model ini kita pakai jika didalam deret data kita jumpai pengaruh musiman dan trend bersama-sama, semakin tinggi tingkat trend yang ada maka akan semakin kuat pengaruh musiman yang terjadi. Permintaan yang diharapkan pada periode t+m adalah

$$Y_{t+m} = (\ a_t + b.m\ )\rho_{t+m}$$

dimana:

a_t = tingkat permintaan pada saat t.

b = lereng permintaan.

ρ_{t+m} = rasio musiman pada waktu t+m.

Model ini memerlukan juga permintaan historis untuk menaksir koeffisien:

$\hat{a}_T$ untuk menaksir a_T

$\hat{b}_T$ untuk menaksir b_T

r_{T+m} untuk menaksir ρ_{T+m} dengan m = 1, 2, ..., 12

Selain dari pada itu, untuk model ini juga diperlukan tiga smoothing parameter yaitu:

Parameter α adalah smothing parameter untuk $\hat{a}_T$

Parameter β adalah smothing parameter untuk $\hat{b}_T$

Parameter γ adalah smothing parameter untuk r_{T+m}

dengan nilai parameter yang terletak antara nol dan satu.

Untuk proses peramalan dengan model ini, harus dimulai dengan membuat taksiran yang tepat bagi a_T, b_T dan r_{T+m} (m = 1, 2, 3, ..., 12) dengan menaksir nilai koeffisien dari data permintaan masa lalu yang tersedia. Permintaan tersebut kemudian dikelompokkan menjadi i tahun. Sehingga kita dapatkan:

Permintaan tahun ke-1 : Y_1, Y_2, ..., Y_{12}

Permintaan tahun ke-2 : Y_{13}, Y_{14}, .., Y_{24}

.

.

.

Permintaan tahun ke-i: Y_{T-11}, Y_{T-10},.., Y_T

dimana $i = T/12$

Proses awal untuk memulai peramalan dengan model ini adalah sebagai berikut:

Menentukan besarnya permintaan pada saat t dengan:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{b}_0\ t$$

dimana

$\bar{a}_t$ besarnya permintaan pada saat t

$\bar{a}_0$ pengaruh musiman pada t = 0

$\bar{b}_0$ slope permintaan

$$\bar{a}_0 = \bar{Y}\ (1) - 6{,}5\ \bar{b}_0$$

dimana $\bar{b}_0 = \dfrac{\bar{Y}(i) - \bar{Y}(1)}{T-12}$

$$\bar{Y}(1) = 1/2 \; (Y1 + Y2 + \ldots\ldots + Y12)$$

$$\bar{Y}(i) = 1/2 \; (Y_{T-11} + Y_{T-10} + \ldots\ldots + Y_T)$$

Jika diketahui rasio bulanan untuk bulan ke t :

$$\tilde{r}_t = \frac{Y_t}{\bar{a}_t} \quad \text{dengan } t = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, T$$

maka dihitung rata-rata rasio musiman untuk bulan-bulan yang sama.

$$\bar{r}_1 = 1/i \; (\tilde{r}_1 + \tilde{r}_{13} + \ldots\ldots + \tilde{r}_{T-11})$$

$$\bar{r}_2 = 1/i \; (\tilde{r}_2 + \tilde{r}_{14} + \ldots\ldots + \tilde{r}_{T-10})$$

$$\vdots$$

$$\bar{r}_{12} = 1/i \; (\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{24} + \ldots\ldots + \tilde{r}_T)$$

dimana

$\tilde{r}_t$ = rasio bulanan unutk bulan ke t

$\bar{r}_t$ = rata-rata rasio musiman untuk bulan-bulan yang sama.

Nilai rata-rata rasio musiman kemudian

dinormalkan sehingga nilai rata-ratanya sama dengan 1.

$$\bar{r} = 1/12 \, (\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \dots\dots\dots + \bar{r}_{12})$$

$$\hat{r}_t = \bar{r}_t \, / \, \bar{r} \quad \text{untuk } t = 1, 2, \dots\dots, 12$$

Dari langkah-langkah tersebut maka kita dapat menentukan penaksir $\hat{a}_t$, $\hat{b}_t$ dan $\hat{r}_{t+12}$ mulai dari $t = 1$ sampai $t = T$.

$$\hat{a}_t = \alpha \left(\frac{Y_t}{\hat{r}_t} \right) + (1 - \alpha) (\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{T-1})$$

$$\hat{b}_t = \beta (\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1 - \beta) \hat{b}_{t-i}$$

$$\hat{r}_{t+12} = \gamma \left(\frac{Y_t}{\hat{a}_t} \right) + (1 - \gamma) r_t$$

Sekarang 12 buah penaksir rasio musiman yang paling baru dinormalkan sehingga rata-ratanya 1.

$$\bar{r} = 1/12 \, (\hat{r}_{T+1} + \hat{r}_{T+2} + \dots\dots + \hat{r}_{T+12})$$

$$r_{T+m} = \frac{1}{\bar{r}} \hat{r}_{T+m} \quad \text{untuk } t = 1, 2, 3, \dots, 12$$

Setelah proses awal dikerjakan maka penaksir itu dilanjutkan kemasa depan untuk $t = T$. Besarnya nilai ramalan untuk periode m kemasa depan adalah:

$$\hat{Y}_{T+m}(T) = (\hat{a}_T + \hat{b}_T \, . \, m) \, r_{T+m}$$

Sebuah rasio musiman ditaksir untuk setiap bulan dari 12 bulan kalender sehingga setelah m melampaui 12, rasio musiman akan berulang misal: $r_{T+13} = r_{T+1}$, $r_{T+14} = r_{T+2}$ dan seterusnya.

3.3.3. Model Adisi Antara Trend dan Musiman.

Untuk model ini bisa kita jumpai faktor musiman yang besarnya dari tahun ke tahun yang menhyebabkan terjadinya fluktuasi permintaan. Bentuk umum model yang dipakai adalah :

$$Y_{t+m} = a_t + b.m + d_{t+m}$$

dimana:

a_t	adalah tingkat permintaan pada saat t
b	adalah slope permintaan
d_{t+m}	adalah tambahan permintaan musiman pada t+m

Jika $d_{t+m} = 0$ maka pada saat t+m tidak terdapat pengaruh musiman.

Jika $d_{t+m} > 0$ berarti pada saat t+m, permintaan yang diharapkan lebih tinggi dari permintaan rata-rata. Apabila $d_{t+m}<0$ berarti permontaan yang diharapkan lebih kecil daripada permintaan rata-rata.

Karena tambahan permintaan musiman harus seimbang pada tahun kalender maka jumlahnya harus 0.

$$\sum_{m=1}^{12} d_{t+m} = 0$$

Seperti model-model lainnya untuk model ini terdapat beberapa koefisien yang harus ditaksir yaitu :

$\hat{a}_t$ untuk menaksir a_t

$\hat{b}_t$ untuk menaksir b_t

$\hat{d}_{t+m}$ untuk menaksir d_{t+m}, untuk

$m = 1, 2, 3, \ldots\ldots, 12$

Model ini membutuhkan tiga smoothing parameter yang nilainya terletak antara 0 dan satu yaitu :

$$1 \geq \alpha \geq 0$$
$$1 \geq \beta \geq 0$$
$$1 \geq \gamma \geq 0$$

Parameter α untuk mencari $\hat{a}_t$, β untuk mencari $\hat{b}_t$ dan γ untuk mencari $\hat{d}_{t+m}$. Untuk proses awal dari model peramalan ini peramal hendaknya mengelompokkan permintaan historis menjadi kelompok tahunan seperti berikut :

$$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots, Y_{12}$$
$$Y_{13}, Y_{14}, Y_{15}, \ldots\ldots, Y_{24}$$
$$\vdots$$
$$Y_{T-11}, Y_{T-10}, Y_{T-9}, \ldots\ldots, Y_T$$

Misalkan banyaknya tahun penuh dari permintaan adalah i sehingga i = T/12.

Untuk tingkat permintaan setiap bulan dari t = 1 sampai T dapat kita hitung sebagai berikut :

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{b}_0 . t \quad \text{dengan } t = 1, 2, \ldots, T$$

dimana:

$\bar{a}_t$ = tingkat permintaan pada saat t

$\bar{a}_0$ = permintaan pada t=0

$\bar{b}_0$ = slope permintaan

$$\bar{a}_0 = \bar{Y}(1) - 6{,}5\ \bar{b}_0$$

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{T-12} [\ \bar{Y}(i) - \bar{Y}(1)\ ]$$

$$\bar{Y}(1) = 1/12\ (\ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{12}\ )$$

$$\bar{Y}(i) = 1/12 \; (\; Y_{T-11} + Y_{T-10} + \ldots + Y_T \;)$$

$\bar{Y}(1)$ dan $\bar{Y}(i)$ adalah permintaan bulanan rata-rata pada tahun pertama dan tahun ke-i.

Tambahan permintaan bulanan untuk bulan t=1 sampai T dihitung dari :

$$d_t = Y_t - \bar{a}_t \text{ dengan } t = 1,2,3, \ldots, 12$$

dimana :

d_t = tambahan permintaan bulanan

Y_t = permintaan pada saat ke-t

$\bar{a}_t$ = tingkat permintaan pada saat t

Selanjutnya kita hitung rata-rata tambahan permintaan, untuk setiap bulan dari 12 bulan kalender :

$$\bar{d}_1 = 1/i \; (\; d_1 + d_{13} + \ldots + d_{T-11} \;)$$
$$\bar{d}_2 = 1/i \; (\; d_2 + d_{14} + \ldots + d_{T-10} \;)$$
$$\vdots$$
$$\bar{d}_{12} = 1/i \; (\; d_{12} + d_{24} + \ldots + d_T \;)$$

Dari 12 tambahan permintaan musiman, kemudian dinormalkan sehingga jumlahnya nol.

$$\bar{d} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} \bar{d}_t$$

$$\hat{d} = \bar{d}_t - \bar{d} \quad \text{untuk } t = 1,2,3, \ldots, 12$$

Dengan memakai $\hat{a}_0 = \bar{a}_0$ dan $\hat{b}_0 = \bar{b}_0$

Maka tiga penaksir dibawah ini harus dihitung pada setiap periode waktu dari t = 1 sampai T.

$$\hat{a}_t = \alpha (Y_t - \hat{d}_t) + (1-\alpha) (\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1})$$

$$\hat{b}_t = \beta (\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta) \hat{b}_{t-1}$$

$$\hat{d}_{t+12} = \gamma (Y_t - \hat{a}_t) + (1-\gamma) \hat{d}_t$$

12 buah penaksir tambahan permintaan musiman yang paling baru dinormalkan sehingga jumlahnya 0 :

$$\bar{d} = 1/12 (d_{T+1} + d_{T+2} + \ldots + d_{T+12})$$

$$d_{T+m} = \hat{d}_{T+m} - \bar{d} \quad \text{untuk } m = 1,2,3,\ldots,12$$

Sehingga untuk peramalan T periode kemasa depan, nilai ramalannya menjadi :

$$\hat{Y}_{T+m} (T) = \hat{a}_T + \hat{b}_T \cdot m + d_{T+m}$$

untuk $m > 12$ maka $d_{T+13} = d_{T+1}$,

$d_{T+14} = d_{T+2}$,

dan seterusnya.