BAB II

TEORI PENUNJANG

Dalam pembahasan tentang Refleksi Householder, vektor dan matriks merupakan bagian penting yang tidak bisa dipisahkan. Pengertian-pengertian mendasar tentang vektor dan matriks adalah langkah penyederhanaan sebelum membahas Refleksi Householder. Vektor dan matriks sebenarnya merupakan kumpulan konstanta, dimana pada vektor terdiri dari n baris dan satu kolom sedangkan pada matriks terdiri dari n baris dan p kolom untuk matriks.

2.1. VEKTOR DAN MATRIKS

Definisi 2.1 :

n tupel bilangan (X_1, X_2, ..., Xn) yang ditulis dalam satu kolom dan n baris disebut ***Vektor.***

Contoh :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

X_i = elemen-elemen dari vektor X dimana i = 1,2,...n

Definisi 2.2 :

Suatu vektor Z dikatakan ***kombinasi linier*** dari vektor-vektor $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bila terdapat skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sedemikian sehingga :

$$Z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$$

Definisi 2.3 :

Himpunan n vektor $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ disebut ***bergantung linier (Dependent Linier)*** bila terdapat skalar-skalar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yang tidak semuanya nol sedemikian sehingga :

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0$$

Definisi 2.4 :

Himpunan n vektor $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ disebut ***bebas linier (Independent Linier)*** bila $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0$ dipenuhi oleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

Definisi 2.5 :

Suatu ***Matriks*** adalah rangkaian berbentuk persegi panjang dari bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom, himpunan elemen mendatar disebut baris dan elemen yang tegak disebut kolom. Matriks diberi nama dengan huruf besar dan dinotasikan [ ]. Secara lengkap ditulis matriks X_{nxp} = ($x_{ij)}$) artinya suatu matriks X yang elemen-elemennya x_{ij} dimana indeks i menyatakan baris ke –i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen. (nxp) disebut ukuran matriks sehingga i = 1,2,….n dan j = 1,2,….p.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2p} \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & x_{np} \end{bmatrix}$$ Atau $X = (x_{ij})$ $i = 1, 2, \ldots..n$

$j = 1, 2, \ldots..p$

Definisi 2.6 :

Suatu matriks X yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolom disebut ***Matriks Bujursangkar (Square Matrix)*** yang berukuran nxn. Barisan elemen X_{11}, X_{22}, ... disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar.

Definisi 2.7 :

Penjumlahan elemen-elemen pada diagonal utama matriks bujursangkar disebut ***Trace*** . Sehingga jika $X = (x_{ij})$ $i = j = 1,2,\ldots.n$, maka Tr (X) = $\sum_{i=1}^{p} x_{ij}$

Definisi 2.8 :

Suatu matriks bujursangkar dimana elemen-elemen pada diagonal utamanya sama dengan satu dan elemen-elemen lainnya adalah nol disebut dengan ***Matriks Identitas (Identity Matrix).***

Ditulis : $I_n = a_{ij}$ untuk $i = j$

$= 0$ untuk $i \neq j$

Definisi 2.9 :

Suatu matriks bujursangkar X disebut ***Matriks Ortogonal*** jika $XX' = X'X = I$ jadi $X' = X^{-1}$

Sifat-sifat matriks Ortogonal :

1. Invers dan transpose matriks ortogonal juga ortogonal.

   Misalkan X ortogonal maka $X' = X^{-1}$

   Sehingga $(X^{-1})' = (X')' = X = (X^{-1})^{-1}$

2. Hasilkali dua matriks ortogonal juga ortogonal.

   Misal $X' = X^{-1}$ dan $Y' = Y^{-1}$, maka

   $(XY)' = Y'X' = Y^{-1} X^{-1} = (XY)^{-1}$

3. Bila X matriks ortogonal maka X non singular.

   Karena X ortogonal maka $XX' = I$.

   Sedangkan $| XX' | = | X | | X' | = | I | = I$

   Andaikan $| X | = 0$ maka $| X' | = 0$.

   Kontradiksi dengan : $| X | | X' | = 1$

   Jadi $| X | \neq 0$.

   Contoh :

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

2.2 PROYEKSI MATRIKS

Suatu proyeksi matriks yang dinotasikan dengan P adalah transformasi matriks menjadi suatu matriks dalam bentuk lain, yaitu matriks idempoten nxn dengan rank $r \leq n$, dengan matriks idempoten P adalah matriks simetrik yang mempunyai sifat PP = P. Rank dari matriks idempoten diberikan dengan trace; yaitu,

$$\text{Rank (P)} = \text{trace (P)} = \sum_{i} P_{ii} = \text{r.}$$

Sifat-sifat Proyeksi Matriks :

1. Misal Q = I – P. Maka Q adalah proyeksi matriks dengan rank n-r.

   Simetri : $Q_{ij} = 1 - P_{ij} = 1 - P_{ji} = Q_{ji}$

   Idempoten : $QQ = (I - P)(I - P)$

   $= I - P - P + PP$

   $= I - P - P + P$

   $= I - P$

   $= Q$

   Rank : $\text{rank (Q)} = \text{trace (Q)} = \text{trace (I - P)} = \sum_{i}(1 - P_{ii}) = n - r.$

2. Misal $Q = I - P$. Maka $PQ = QP = 0$.

   P dan Q merupakan proyeksi ortogonal.

   $PQ = P(I - P) = P - PP = P - P = 0$

   $QP = (I - P)P = P - PP = P - P = 0$.

3. Jika X adalah matriks nxr, yang memuat r kolom bebas linier, maka proyeksi matriks X adalah :

   $$P_X = X(X'X)^{-1} X'$$

   Proyeksi dari matriks P_X pada X adalah :

   $$P_X X = X$$

4. Misal Y adalah suatu n-vektor dan didefinisikan F adalah proyeksi Y pada matriks X :

   $$F = P_X Y$$

   Misal B adalah garis tegak lurus dari Y ke F :

   $$B = Y - F$$

   B adalah komplemen dari proyeksi matriks X :

   $$B = Q_X Y$$

5. Komplemen proyeksi matriks X dinotasikan dengan Q_X adalah $Q_X = I - P_X$ merupakan komplemen ortogonal dari X, jika

   $$Q_X X = 0$$

6. Vektor $F = P_X Y = \hat{Y}$ dan $B = Q_X Y = E$ adalah ortogonal : yaitu,

$$F'B = \hat{Y}'E = 0.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa proyeksi matriks mempunyai sifat komutatif. Untuk membuktikan sifat komutatif tersebut terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai vektor inner produk dan panjang dari proyeksi vektor. Misalkan terdapat 2 n-vektor, yaitu U dan V, maka inner produk U'V adalah bilangan skalar yang nilainya

$$U'V = \sum_i u_i v_i$$

Panjang (atau norm) dari vektor U diberi notasi $\| U \|$ adalah akar kuadrat positif dari inner produk vektor dengan dirinya sendiri

$$U'U = \Sigma (u_i u_i) = \| U \|^2$$

Dimana $\| U \| = \sqrt{u'u}$.

Dapat diperlihatkan juga bahwa :

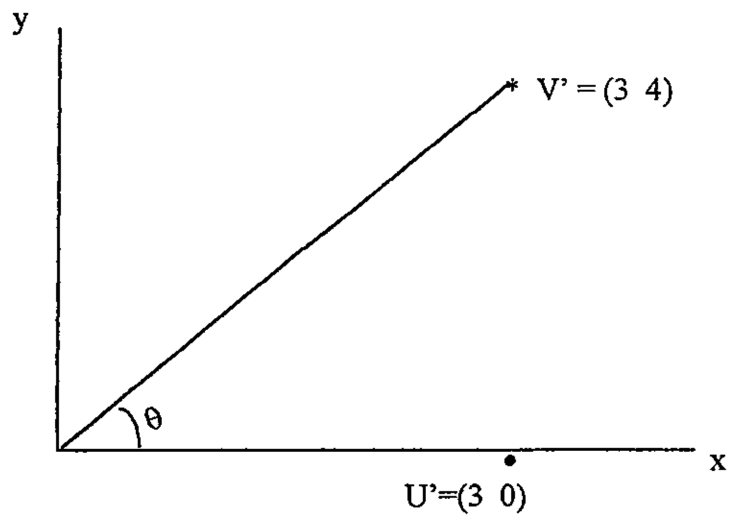
$$U'V = \| U \| \, \| V \| \cos \theta$$

Dimana θ adalah sudut antara dua vektor.

Untuk lebih jelasnya, diberikan ilustrasi (contoh 2.1) pada vektor U dan V.

Contoh 2.1

Vektor U' = (3 0) dan V' = (3 4) dapat digambarkan pada sumbu koordinat



Gambar 2.1 Dua vektor U dan V pada dimensi dua

Maka inner produk U'V = (3 0) (3 4)' = 3x3+0x4 = 9

Atau dengan cara lain :

$$\|U\|^2 = (3 \;\; 0)(3 \;\; 0)' = 3x3+0x0 = 9$$

$$\|V\|^2 = (3 \;\; 4)(3 \;\; 4)' = 3x3+4x4 = 25$$

dan

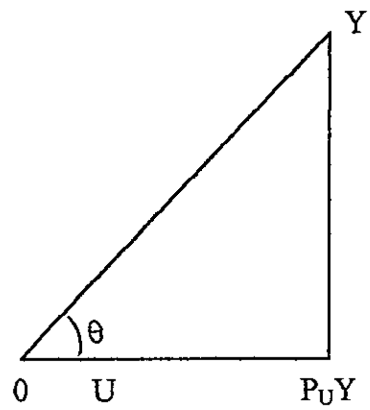
$$\cos\theta = 3/5$$

Sehingga $\|U\| \; \|V\| \quad \cos\theta = 3x5 \text{ x } 3/5 = 9 = U'V$.

Panjang dari proyeksi vektor Y pada vektor U (dimana $\| U \| = 1$ atau U mempunyai satu satuan panjang) yang dinotasikan $P_U Y$ adalah inner produk dari Y terhadap U

$$P_U Y = U(U'U)^{-1} U'Y$$

$$\begin{aligned} \| P_U Y \|^2 &= (P_U Y)'(P_U Y) \\ &= Y' P_U Y \\ &= Y' (U(U'U)^{-1} U')Y \\ &= (Y'U)(1)(U'Y) \\ &= (U'Y)^{-1} \end{aligned}$$



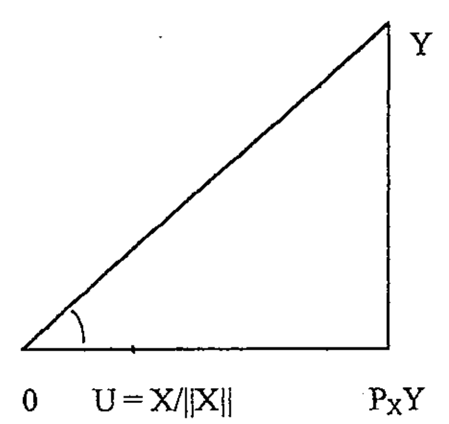
Gambar 2.2 Proyeksi pada vektor U dari satuan panjang

Pada umumnya Y tidak diproyeksikan pada satuan panjang vektor U tetapi pada vektor X dengan sebarang panjang $\| X \|$.(seperti pada gambar 2.3). Hasil proyeksi adalah sama dengan proyeksi pada vektor normal $U = X / \| X \|$

$$P_XY = X(X'X)^{-1}X'Y$$
$$= (\|X\|\,U)((\|X\|\,U)'(\|X\|\,U))^{-1}(\|X\|\,U)'Y$$
$$= (\|X\| / \|X\|)^2\,U\,(U'U)^{-1}\,U'Y$$
$$= U\,(U'U)^{-1}U'Y$$
$$= P_UY$$

Sedangkan panjang proyeksinya adalah inner produk Y dengan X dibagi panjang X, atau sama dengan inner produk Y dengan vektor normal $U = X/\|X\|$.

$$\|P_XY\| = \|P_UY\|$$
$$= U'Y$$
$$= (X/\|X\|)'Y$$
$$= (X'Y)/\|X\|$$



Gambar 2.3 Proyeksi pada sebarang vektor X

Untuk membuktikan sifat komutatif dari suatu proyeksi didefinisikan dengan komplemen dari pasangan vektor ortogonal.

Misalkan U dan V adalah vektor ortogonal dengan U'V = 0.

Sehingga sifat komutatif $Q_UQ_V = Q_VQ_U$ akan terbukti.

Dari $P_U = U\,(U'U)^{-1}U'$

$P_V = V(V'V)^{-1}V'$

Maka $P_UP_V = U(U'U)^{-1}U'V(V'V)^{-1}V'$

$= U(U'U)^{-1}(U'V)(V'V)^{-1}V'$

$= U(U'U)^{-1}\,0\,(V'V)^{-1}V'$

$= 0$

Sehingga $Q_UQ_V = (I - P_U)(I-P_V)$

$= I - P_U - P_V + P_UP_V$

$= I - P_U - P_V + 0$

$= I - P_U - P_V$

$= I - P_V - P_U$

$= Q_VQ_U$