BAB II

TEORI DASAR

2.1. TEORI DASAR PADA PENDEFFERENSIALAN.

DEFINISI 1.

Turunan suatu fungsi y=f(x) terhadap x didefinisikan sebagai :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

catatan :

limit ini disebut dengan laju perubahan sesaat atau laju perubahan y terhadap x.

DEFINISI 2.

Jika y=f(u) dan u=g(x) maka y = f(g(x)) juga fungsi dari x, jika y adalah fungsi dari u yang dapat didefferensialkan dan u adalah fungsi dari x yang dapat didefferensialkan juga maka y = f(g(x)) adalah fungsi dari x yang dapat didefferensialkan, maka turunan dari y terhadap x diperoleh dengan aturan rantai, yaitu :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

DEFINISI 3.

Jika x = f(u) dan y = f(u) dan jika x dan y adalah fungsi u yang dapat didefferensialkan terhadap u maka turunan y terhadap x dapat diperoleh dengan cara :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \Big/ \frac{du}{du}$$

DEFINISI 4.

Jika $z = f(x,y)$ adalah fungsi variabel bebas x dan y yang dapat didefferensialkan, maka dimungkinkan :

1. x yang berubah-ubah, sementara y dianggap tetap, maka z adalah fungsi x yang turunannya ke x adalah :

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x + \Delta x\ ,\ y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

disebut turunan (pertama) parsiil dari $z = f(x,y)$ ke x yang sering dinyatakan dengan notasi :

$$d_x\ z = f_x\ (x,y)\ dx = \frac{\partial z}{\partial x}\ dx$$

1. y yang berubah-ubah, sementara x dianggap tetap, maka z adalah fungsi y yang turunannya ke y adalah :

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f(x\ ,\ y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

disebut turunan (pertama) parsiil dari $z = f(x,y)$ ke y yang sering dinyatakan dengan notasi :

$$d_y\ z = f_y\ (x,y)\ dy = \frac{\partial z}{\partial y}\ dy$$

3. Jika keduanya berubah bersama-sama dinamakan defferensial total dz yang didefinisikan sebagai jumlahan defferensial parsiilnya yaitu :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\ dx + \frac{\partial z}{\partial y}\ dy$$

DEFINISI 5.

Secara umum untuk fungsi $w = f(x,y,z,\ldots,t)$ maka total dw didefinisikan sebagai :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \ldots\ldots + \frac{\partial w}{\partial t}\,dt$$

TEOREMA 1.

Deret taylor dari fungsi f(x) dimana $f : R \longrightarrow R$ mempunyai turunan dengan orde n+1 $f^{n+1}(x)$ diselang (a-r,a+r) dan misalkan ada konstanta m>0 demikian sehingga berlaku : $| f^{(n+1)}(x) | \le m$ untuk semua x diselang tersebut, maka untuk setiap x diselang tersebut daerahnya berbentuk :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots.$$

bukti :

$| f^{(n+1)}(x) | \le m$ kita tulis sebagai $-M \le f^{n+1}(x) \le M$

kemudian jika semua rusa diintegrasikan dari a sampai x diperoleh :

$-M(x-a) \le f^n(x) - f^n(a) \le M(x-a)$, andaikan $x > a$ jika hasil di atas diintegrasikan lagi dari a sampai x didapat

$$-M\frac{(x-a)^2}{2!} \le f^{n-1}(x) - f^{n-1}(a) - f^n(a)(x-a) \le M\frac{(x-a)^2}{2!}$$

jika prose integrasi ini diulang (n-1) kali lagi maka hasilnya adalah sebagai berikut :

$$-M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le f(x) - f(a) - f(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} - \ldots\ldots$$

$$- f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

jika ruas tengah $f(x) - f(a) - f(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} - \ldots\ldots$

$- f^n\frac{(a)(x-a)^n}{n!}$ dimisalkan Rn maka diperoleh :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + f^n\frac{(a)(x-a)^n}{n!} + Rn$$

dengan $| Rn | \leq \frac{M\ (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

misalkan selanjutnya bahwa untuk n tambah besar $| f^{(n+1)}(x) |$ tidak melebihi M, maka dapat dibuktikan bahwa :

$\lim_{n\to\sim} \frac{M\ |x-a|^{n+1}}{(\ n+1\ )\ !} = 0$ dan dengan demikian $\lim_{n\to\sim}$ Rn juga sama denan nol. sebagai bukti dimisalkan $|x-a| = P$ maka :

$$\frac{M\ P^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{P}{1}\ ,\ \frac{P}{2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{P}{N}\ ,\ \frac{P}{N+1},\ \ldots\ ,\ \frac{P}{n+1}$$

jika diambil N begitu besar sehingga $\frac{P}{N} < \frac{1}{2}$, maka $\frac{P}{N+1}\ ,\ \frac{P}{N+2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{P}{n+1}$ juga semua lebih kecil dari $\frac{1}{2}$

jadi $\frac{M\ P^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{M\ P^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}$

oleh karena $\lim_{n\to\sim} \left(\frac{1}{2} \right)^{m-N} = 0$ maka $\lim_{n\to\sim} \frac{M\ P^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

terlihat bahwa fungsi f(x) dan suku banyak

$$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ mempunyai selisih Rn yang untuk $n > |x-a|$ mempunyai nilai makin kecil untuk n makin besar, maka jika n diambil tak terhingga maka suku banyak menjadi daret taylor yang berbentuk :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

terbukti.

2.2. TEOREMA DASAR PADA PENGINTEGRALAN.

DEFINISI 6.

Jika $f(x)$ adalah sebuah fungsi dari turunan $F(x)$ atau $f(x) = F'(x)$ pada selang tertentu dari sumbu x maka $F(x)$ disebut integral tak tentu dari $f(x)$ yang dinotasikan

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

DEFINISI 7.

Misalkan $a \le x \le b$ adalah selang dimana fungsi $f(x)$ adalah kontinue maka integral tertentu dari $f(x)$ terhadap x pada interval tersebut adalah :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta_k x$$

dimana :

$\Delta_k x$ adalah panjang sub selang.

x_k adalah titik-titik dalam sub selang yang dipilih

$f(x_k)$ adalah nilai fungsi di titik yang dipilih

catatan :

Simbol $\int_a^b f(x)\, dx$ dibaca " Integral tertentu dari $f(x)$ terhadap x, dari $x=a$ samapi $x=b$ " di mana a dan b sering disebut dengan batas atas dan batas bawah integrasi.

DEFINISI 8.

Jika fungsi $z=f(x,y)$ kontinue dalam daerah tertentu

R pada bidang XOY dengan batas interval $a < x < b$ dan $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, kemudianR dibagi menjadi n sub daerah R_1, R_2, ..., R_n dengan luas Δ_1 A, Δ_2 A, ... , Δ_n Amaka integral rangkap dua dari f(x,y) dalam daerah R didefinisikan sebagai :

$$\lim_{\Delta kA \to o} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)_k \Delta A$$

karena $\Delta A = \Delta x . \Delta y$ maka :

$$\lim_{\substack{\Delta kx \to o \\ \Delta ky \to o}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta_k x \Delta_k y = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, dy \, dx$$

dimana : $\Delta_k A$ adalah sub daerah yang dipilih dan $f(x_k,y_k)$ adalah nilai fungsi dari sub daerag yang dipilih.

2.3. TEORI DASAR PADA HIDROLIKA SALURAN TERBUKA.

2.3.1. Penggolongan aliran saluran terbuka.

Aliran saluran terbuka dapat digolongkan menjadi :

a. Aliran tetap (steady)

meliputi :

1. Aliran seragam.
2. Aliran berubah yang meliputi :
   - 2.a. Aliran berubah lambat laun.
   - 2.b. Aliran berubah tiba-tiba.

b. Aliran tak tetap (an-steady)

meliputi :

1. Aliran seragam tak tetap.
2. Aliran tak tetap (aliran berubah tak tetap)
   - 2.a. Aliran tak tetap berubah lambat laun.
   - 2.b. Aliran tak tetap berubah tiba-tiba.

keterangan :

*) Aliran dikatakan tetap jika kedalaman aliran tidak berubah atau dianggap konstan selama suatu selang waktu tertentu.

*) Aliran dikatakan tak tetap jika kedalaman berubah sesuai dengan waktu.

*) Aliran dikatakan seragam bila kedalaman aliran sama pada setiap penampang saluran. Aliran seragam bisa bersifat tetap dan tak tetap namun karena aliran seragam yang tak tetap jarang terjadi maka untuk selanjutnya istilah aliran seragam dipakai utnuk menyatakan aliran seragam yang tetap.

*) Aliran dikatakan berubah bila kedalaman aliran berubah disepanjang saluran, aliran berubah bisa bersifat tetap dan tak tetap. Karena aliran seragam yang tak tetap jarang terjadi maka aliran tak tetap selanjutnya khusus dipakai untuk aliran tak tetap yang berubah. Aliran berubah dibagi lagi menjadi berubah lambat laun dan berubah tiba-tiba.

*) Aliran dikatakan berubah tiba-tiba bila kedalamannya mendadak berubah pada jarak yang cukup pendek dan jika berlaku sebaliknya dikatakan aliran berubah lambat laun.

Untuk keperluan analisa sering digunakan penggolongan aliran yaitu :

1. Aliran tiga dimensional.

Adalah suatu aliran dimana kecepatannya tergantung pada letak menurut aliran air dan juga jarak titik itu dari dasar dan sisi.

2. Aliran dua dimensional.

Suatu saluran yang sangat lebar dalam hubungannya dengan kedalaman, kecepatan pada setiap ketinggian dalam penampang konstan dengan kata lain kecepatan akan terpisah dari jarak sisi dinding terkecuali jaraknya dekat dengan dinding dimana pengaruh kekentalan adalah sangat penting disebut aliran dua dimensional.

3. Aliran satu dimensional.

Aliran dimana perbedaan kecepatannya pada penampang diabaikan dan mengerjakannya degan kecepatan rata-rata, atau dapat diartikan pula bahwa pada aliran ini mengasumsikan bahwa kecepatannya sepanjang penampang adalah sama.

2.3.2. Jenis saluran terbuka.

Jenis saluran terbuka dibedakan menjadi 2 yaitu :

1. Saluran alam (natural)

   contoh :Selokan dipegunungan, kali, sungai kecil, sunagi besar, aliran bawah tanah dsb.

2. Saluran buatan (artificial)

   contoh : Saluran pembangkit listrik, saluran irigasi, talang, selokan dsb.

2.3.3. Bentuk geometris saluran.

Bentuk geometris saluran dibedakan menjadi :

1. Saluran prismatik yaitu saluran yang penampang

melintangnya dibuat tidak berubah-ubah dan kemiringan dasarnya tetap.

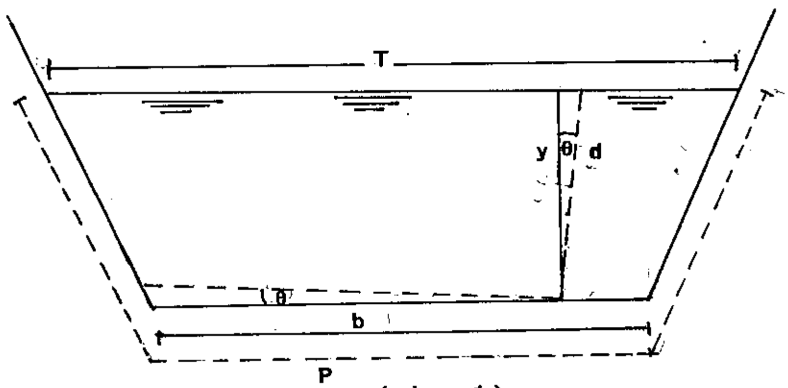
2. Saluran non prismatik, bila berlaku sebaliknya.

Dalam tabel Apendik A addalah contoh bentuk penampang saluran yang biasanya dibuat atau dirancang berdasarkan bentuk geometris yang umum.

2.3.4. Unsur geometris penampang saluran.

Unsur geometris penampang saluran adalah sifat-sifat suatu penampang satuan yang dapat diuraikan seluruhnya berdasarkan bentuk geometris penampang saluran dan kedalaman aliran.

Misal dari penampang saluran yang berbentuk prismatis seperti pada gambar (1)



(gb. 1)

DEFINISI 9.

Kedalaman aliran y adalah jarak vertikal titik terendah pada suatu penampang saluran sampai ke permukaan bebas.

DEFINISI 10.

Kedalaman penampang aliran d adalah kedalaman penampang aliran tegak lurus arah aliran atau tinggi penampang saluran yang diliputi aliran.

DEFINISI 11.

Untuk saluran dengan sudut kemiringan θ (seperti dalam gambar 1) maka kedalaman aliran sama dengan kedalaman penampang aliran dibagi dengan cos θ atau $y = \frac{d}{\cos\theta}$ atau $d = y \cos\theta$.

DEFINISI 12.

Lebar puncak T adalah lebar penampang saluran pada permukaan bebas.

DEFINISI 13.

Luas basah A adalah luas penampang melintang saluran yang tegak lurus arah aliran.

DEFINISI 14.

Keliling basah P adalah panjang garis perpotongan dari permukaan bebas saluran dengan bidang penampang melintang yang tegak lurus arah aliran.

DEFINISI 15.

Jari-jari hidrolis R didefinisikan sebagai Rasio luas basah dengan keliling basah atau $R = A/P$.

DEFINISI 16.

Kedalaman hidrolik D didefinisikan sebagai Rasio luas basah dengan lebar puncak atau $D = A/T$.

DEFINISI 17.

Lebar dasar saluran didefinisikan dengan b.

DEFINISI 18.

Kecepatan v didefinisikan sebagai perubahan jarak (x) terhadap perubahan waktu (t), dan untuk perubahan waktu yang kecil sekali diperoleh :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

akibat definisi 18

dari definisi $v = \frac{dx}{dt}$ atau $dx = v.dt$

Jika kecepatan v sepanjang jarak (x) konstan maka

$$\int dx = \int v.dt$$

$$x = v.t \text{ atau } v = \frac{x}{t}$$

DEFINISI 19.

Percepatan (a) didefinisikan sebagai perubahan kecepatan (v) terhadap perubahan waktu (t) dan untuk perubahan waktu yang kecil sekali diperoleh

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

akibat definisi 19

dari definisi $a = \frac{dv}{dt}$ atau $dv = a.dt$

Jika percepatan a konstan maka dengan mengintegralkan diperoleh

$$\int dv = \int a.dt$$

$$v = a.t \text{ atau } a = \frac{v}{t}$$

DEFINISI 20.

Volume (V) didefinisikan sebagai luas penampang (A) dikalikan dengan panjangnya (x) dengan notasi $V = A.x$

DEFINISI 21.

Debet (Q) didefinisikan sebagai perubahan Volume (V) yang melewati penampang tiap satuan waktu, untuk perubahan waktu yang kecil sekali diperoleh

$$Q = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

Akibat definisi 21

1. dari definisi $Q = \frac{dV}{dt}$ atau $dV = Q\ dt$

   jika debet yang melewati penampang konstan maka dengan mengintegralkan bentuk di atas diperoleh :

   $\int dV = \int Q\ dt$

   $V = Q.t$ atau $Q = \frac{V}{t}$ ....(1)

2. jika $Q = \frac{dV}{dt}$ dan dari definisi (20) dimana Volume $V = A.\ x$ maka dengan mensubstitusikannya diperoleh :

   $Q = \frac{dV}{dt} = \frac{d(A.x)}{dt}$ jika luas penampang (A) dianggap konstan maka bisa ditulis ;

   $Q = A \frac{dx}{dt} = A\ .\ v$ (dari definisi 18) ......(2)

DEFINISI 22.

Gaya F yang bekerja pada suatu benda didefinisikan sebagai massa benda (m) dikalikan dengan percepatannya (a), dinotasikan $F = m\ .\ a$

Catatan :

persamaan ini yang disebut dengan Hukum Newton II tentang gerak.

Akibat definisi 22

Jika gaya yang bekerja pada suatu benda lebih dari satu gaya maka hukum newton II menjadi : $\Sigma F = m\ .\ a$ di mana ΣF = Resultan semua gaya luar yang bekerja pada benda tersebut.

DEFINISI 23.

Kerapatan jenis suatu zat (ρ) didefinnisikan sebagai massa zat (m) per Volumenya (V). dinotasikan $\rho = \frac{m}{V}$

DEFINISI 24.

Berat benda (w) didefinisikan sebagai massa (m) dikalikan dengan percepatan gravitasinya (g) dinotasikan

$$w = m \cdot g$$

DEFINISI 25.

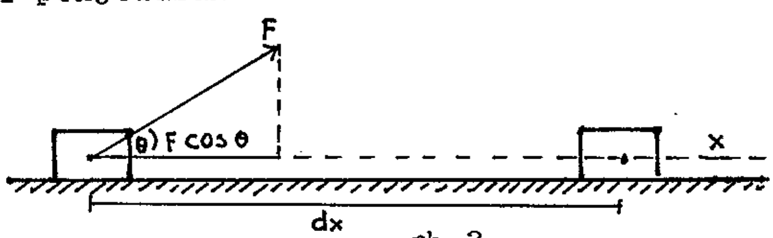
Tekanan normal (P) didefinisikan sebagai perbandingan antara gaya (F) yang bekerja pada bidang seluas A. dinotasikan

$$P = \frac{F}{A} \quad \text{atau} \quad F = P \cdot A$$

DEFINISI 26.

Usaha yang disebabkan oleh adanya gaya F yang bekerja yang membuat sudut θ dengan arah gerak, sehingga menyebabkan benda mengalami perpindahan sejauh perpindahan jarak yang kecil sekali (dx) didefinisikan sebagai hasil perkalian antara perpindahan dengan komponen gaya dalam arah perpindahan.

Sebagai penjelasan terlihat dalam gambar (2)



gb.2

jadi :

$$dW = F \cos \theta \, dx$$

akibat definisi 26

1. Jumlah usaha total yang dilakukan dalam perpindahan dari x_1 sampai x_2. dimana gaya F maupun sudut θ diantara gaya dengan perpindahanadalah konstan. adalah

$$W = \int dW = \int_{x_1}^{x_2} F \cos \theta \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

2. Jika gaya yang bekerja berlawanan arah dengan perpindahan benda maka usaha didefinisikan sebagai usaha negatif

$$dW = - F \cos \theta \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

DEFINISI 27.

Tenaga kinetik atau energi kinetik adalah usaha yang dilakukan oleh sebab adanya gaya dari luar, dimana benda digerakkan di atas permukaan mendatar tanpa gesekan dan selama perpindahan tidak ada usaha lain kecuali untuk menambah kecepatan.

TEOREMA 2.

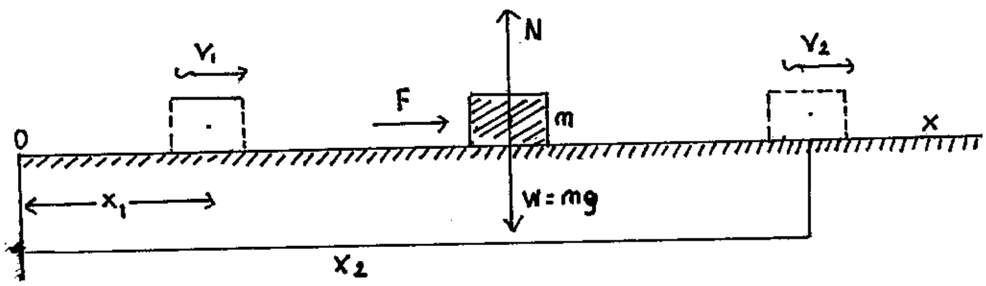
Besarnya tenaga kinetik (K) adalah perkalian antara massa benda dengan kwadrat kecepatan atau

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

dimana m = massa benda dan v = kecepatan benda

Bukti :

Dipandang gaya mendatar F yang tiada diimbangi gaya lain menimbulkan percepatan a pada benda dengan massa m seperti dalam gambar (3) benda bergerak di atas permukaan tanpa geseran.



gb. 3

Andaikan kecepatan benda bertambah, dari posisi satu kecepatan $v_1$dan menjadi $v_2$diposisi dua, benda bergerak mendatar maka cos θ = 1, maka usahanya adalah

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \cos\theta \, dx$$, dari definisl 26,maka

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

dari definisi (19)

$a = \frac{dv}{dt}$ jika dikalikan dengan $\frac{dx}{dx}$ diperoleh :

$a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx}$ atau $a = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dv}{dx}$ dimana $\frac{dx}{dt} = v$

maka $a = v \cdot \frac{dv}{dx}$-dan dari dafeinisi (22) F = m .a kemudian disubstitusikan ke persamaan (5) diproleh

$$W = \int_{x_1}^{x_2} m \cdot a \; dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx} \, dx = \int_{x_1}^{x_2} m \cdot v \; dv$$

$$= \left(\frac{1}{2} m.v^2\right)_{x2} - \left(\frac{1}{2} m.v^2\right)_{x1}$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

dari hasil di atas usaha yang dilakukan gaya F tadi hanya untuk menambah kebesaran $\frac{1}{2}m \cdot v^2$, yaitu dari harga awal $\frac{1}{2}m \cdot v_1^2$ menjadi $\frac{1}{2}m \cdot v_2^2$, dan kebesaran inilah yang disebut dengan tenaga kinetik (K) yang besarnya adalah hasil perkalian antara massa benda dengan kwadrat kecepatannya, jadi diperoleh $K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ terbukti.

DEFINISI 28.

Perubahan tenaga potensial adalah setara dengan usaha yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah benda dengan gerak beraturan sepanjang sebarang lintasan tanpa gesekan dari titik pertama ke titik kedua, dan tidak dilakukan usaha lain terkecuali untuk menaikkan letak pusat berat benda.

TEOREMA 3.

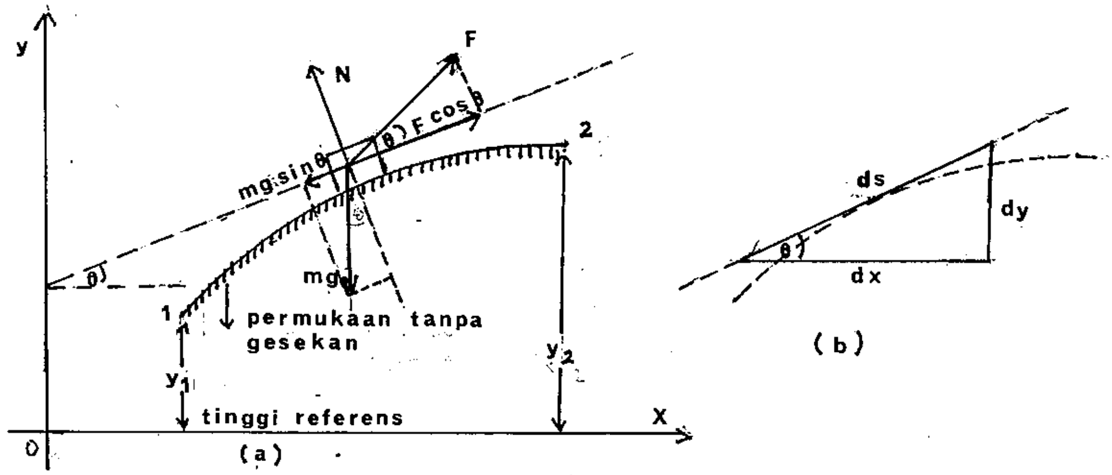
Besarnya tenaga potensial adalah hasil perkalian antara berat benda (mg) dengan tinggi (y) dari pusat berat benda di atas tinggi referensi tertentu atau $E_p = m.g.y = W.\ y$ dimana m = massa benda

g = percepatan gravitasi

y = tinggi benda.

Bukti :

Sebuah benda digerakkan di atas sebarang lintasan tanpa gesekan seperti ditunjukkan oleh garis lengkung yang menghubungkan titik satu dan dua seperti pada gambar (4). Selama perpindahan sebarang ds yang kecil tidak terhingga sepanjang garis lengkung itu, maka pada benda terjadi tiga gaya yaitu, berat benda mg menuju ke bawah, gaya normal N tegak lurus garis lengkung dan gaya F , Oleh sebab gaya luar yang membuat sudut θ dengan garis singgungpada garis lengkung.



gb. 4

Andaikan benda pada garis lengkung digerakkan sedemikian hingga pada tiap-tiap saat benda dalam keadaan setimbang maka jumlah gaya dalam arah garis singgung pada garis lengkung harus sama dengan nol, jadi

$$\Sigma F_{(singgung)} = F \cos \theta - mg \sin \theta = 0$$

$$F \cos \theta = mg. \sin \theta$$

Usaha yang dilakukan oleh sebab gaya luar yang menggerakkan benda dari titik satu ke titik dua adalah

$$W = \int_1^2 F \cos \theta \, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

akan tetapi karena $F \cos \theta = mg. \sin \theta$ maka persamaan (7) menjadi $W = \int_1^2 mg. \sin \theta \, ds$ ....(8)

dari diagaram kecil gambar (4.b) menunjukkan hubungan antara perpindahan ds dengan komponen vertikal dy dan komponen mendatar dx, dimana

$$dy = ds \sin \theta$$

dengan memasukkan hubungan ini ke dalam persamaan (8) diperoleh

$$W = \int_{y_1}^{y_2} mg\, dy$$

$$W = mg\, y_2 - mg\, y_1 \qquad \text{.........................(9)}$$

dari hasil diatas usaha yang dilakukan oleh gaya tadi adalah untuk menambah kwantitas mg.y yaitu dari harga awal $mg.y_1$menjadi harga terakhir $mg.y_2$. Penambahan kwantitas inilah yang disebut Tenaga Potensial yaitu perkalian antara berat benda mg denga tingginya y dari pusat berat benda di atas tinggi referensi tertentu, jadi

$$E_p = mg.y$$

terbukti.

TEOREMA 4.

Tekanan yang bekerja pada zat cair dalam keadaan diam yang kemudian disebut dengan Tekanan Hidrostatik adalah sebesar $P = P_a + \rho\, gh$

dimana P = tekanan zat cair pada titik dengan ketinggian h

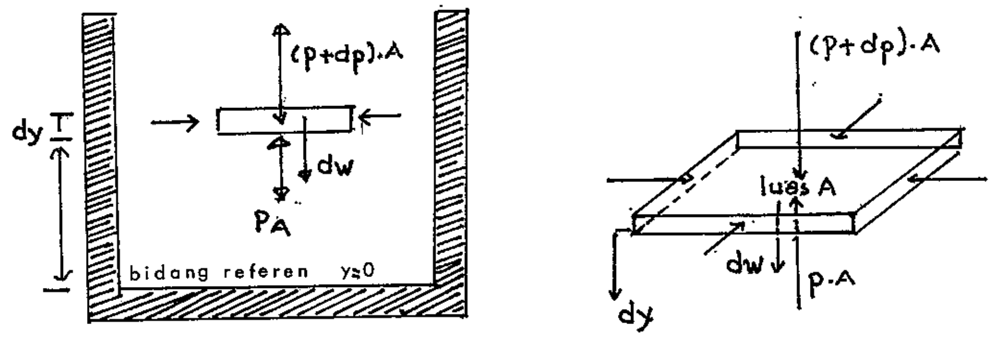
P_a= tekan udara

ρ = kerapatan

g = percepatan gravitasi

Bukti :

Akan dicari hubungan umum antara tekanan P pada sebarang titik dalam zat cair dengan tinggi letak y. Jika zat cair dalam keadaan kesetimbangan, maka tiap volume keunsuran juga dalam keadaan kesetimbangan. Jika dipandang suatu unsur berbentuk lempeng tipis yang tebalnya dy dan luas permukaannya A, seperti terlihat dalam gambar (5)



gb.5

maka Volume lempeng V = A dy. Jika rapat massa zat cair ρ maka menurut definisi (23) m = ρ V, karena Volume lempeng V = A dy maka massa m = ρ A dy (massa lempeng tipis).

dari definisi (24) berat benda w = mg maka perubahan berat lempeng tipis yang kecil sekali bisa ditulis

$$dw = \rho\ A\ dy\ g = \rho\ g\ A\ dy$$

gaya-gaya yang bekerja pada lempeng tipis tadi oleh zat alir disekelilingnya dimanapun selalu tegak lurus pada permukaannya, berdasarkan bentuk simetris (seperti pada gambar). Resultan gaya mendatar pada sisi tepi lempeng sama dengan nol, gaya ke atas oleh zat cair pada permukaan sebelah bawah adalah P.A , sedang gaya kebawah pada permukaannya disebabkan oleh tekanan zat cair dan penambahan tekanan yang kecil pada titik yang di tinjau yaitu (P + dp).A. Selain itu gaya ke bawah disebabkan oleh gaya berat dari lempeng itu sendiri yaitu dw. Karena benda dalam keadaan kesetimbangan maka resultan gaya-gaya pada arah vertikal adalah

$$P.A = (\ P + dp\ )\ A + dw \text{ atau}$$

$$P.A - (\ P + dp\ )\ A - dw = 0$$

Jika dw = ρ A g dy maka persamaam menjadi

$$P.A - (\ P + dp\ )\ A - \rho\ g\ A\ dy = 0$$

$$- A\,dp = \rho\, g\, A\, dy$$

$$dp = - \rho\, g\, dy$$

$$\frac{dp}{dy} = - \rho\, g \quad \text{......................... (10)}$$

di sini ρg adalah besaran positip, dy juga positip (penambahan tinggi) dan dp adalah negatif (pengurangan tekanan).

Jika P_1 dan P_2 adalah tekanan pada ketinggian y_1 dan y_2 di atas suatu bidang referensi, maka dengan mengintegralkan persamaan (10) dengan ρ dan g konstan menghasilkan :

$$\int dp = \int -\rho g\, dy$$

$$P_2 - P_1 = - \rho g\, (y_2 - y_1) \quad \text{................ (11)}$$

Jika persamaan (11) ini digunakan pada zat cair dengan permuakaan bebas, dengan mengambil titik satu disebarang bidang dengan tekanan P dan titik Dua pada permukaan bebas dengan tekanannya adalah tekanan udara P_a maka persamaan (11) menjadi

$$P_a - P = -\rho g\, (y_2 - y_1)$$

$$P = P_a + \rho g\, (y_2 - y_1)$$

Jika $y_2 - y_1 = h$ maka

$$P = P_a + \rho g h$$

terbukti.

Akibat teorema 4.

Jika tekanan udara diabaikan maka besarnya tekanan hidrostatik adalah $P = \rho\, g\, h$ .... (12)

TEOREMA 5.

Persamaan untuk zat alir yang bergerak dinyatakan dalam hubungan antara tekanan, kecepatan dan ketinggian tempat sepanjang garis arus yang berbentuk

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + y_2$$

dimana :

P = Tekanan

v = kecepatan

y = tinggi tempat sepanjang garis arus

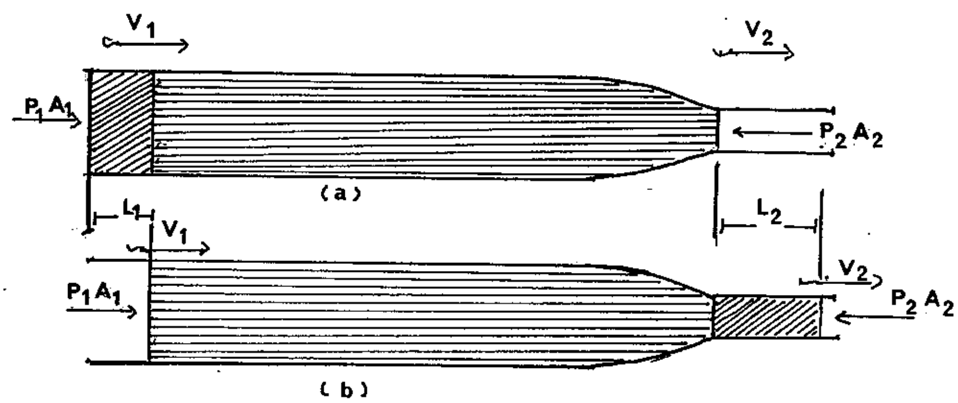
ρ = kerapatan zat cair

g = percepatan gravitasi

Indek $_1$ dan $_2$ = menyatakan dua titik sembarang yang terletak sepanjang pipa.

Bukti :

Pada gambar (6) melukiskan bagian pipa yang dilalui zat alir yang tidak termampatkan (encompressible), tanpa kekentalan dan arusnya laminer.



gb. 6

Bagian kiri pipa luas penampangnya A_1, Tekanannya P_1 dan kecepatannya v_1, bagian kanan pipa yang lebih sempit luas penampang A_2, tekanannya P_2 dan kecepatannta v_2, pada ujung kiri sistem maju sejauh l_1 sejajar dengan gaya dari luar sebesar P_1 A_1 maka usaha yang dilakukan terhadap sistem = P_1 A_1 l_1 .Ujung kanan sistem maju sejauh l_2, sedangkan disitu ada gaya kekiri sebesar P_2 A_2 maka usaha yang dilakukan oleh sistem = P_2 A_2 l_2. Usaha bersih yang disebabkan oleh adanya gaya luas yang menggerakkan sistem dari posisi (a) ke posisi (b) sebesar

usaha bersih = P_1 A_1 l_1 - P_2 A_2 l_2

A_1 l_1 adalah volume dari sistem yang besarnya adalah sama dengan A_2 l_2 karena zat alir m dengan kerapatan ρ maka berlaku $A_1\ l_1 = A_2\ l_2 = \frac{m}{\rho}$ dan akhirnya

usaha bersih = $(P_1 - P_2) \frac{m}{\rho}$

Tenaga kinetik yang bekerja pada sistem tidak berubah pada waktu bergerak dari (a) ke (b) sehingga

Perubahan tenaga kinetik bersih = $\frac{1}{2}\ m\ v_2^2 - \frac{1}{2}\ m\ v_1^2$

untuk aliran dengan kecepatan yang berubah-ubah digunakan koefisien Energi α. Untuk mengoreksi perubahannya tersebut, sehingga

Perubahan kinetik bersih = $\frac{1}{2}\ \alpha m\ v_2^2 - \frac{1}{2}\ \alpha m\ v_1^2$

Tenaga potensial pada sistem tidak berubah karena pipa mendatar namun karena pada sistem tinggi bagian kiri tidak sama dengan bagian kanan maka

Perubahan tenaga potensial bersih = $m\ g\ y_2 - m\ g\ y_1$

di mana y_1 dan y_2 berturut-turut tinggi di atas bidang referensi pada arus yang mengalir lewat pipa senantiasa terdapat tahanan karena gesekan, jika pipanya halus maka tahanan gesernya bisa diabaikan karena kecilnya. Dan di sini tahanan gesernya diabaikan maka Usaha bersih yang diberikan terhadap sistem disamakan dengan tambahan tenaga kinetik dan tenaga potensial sistem sehingga menghasilkan

$$(P_1 - P_2) \frac{m}{\rho} = (\frac{1}{2} \alpha m v_2^2 - \frac{1}{2} \alpha m v_1^2) +$$

$$(m g y_2 - m g y_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Jika persamaan (13) dibagi dengan mg maka diperoleh :

$$\frac{(P_1 - P_2)}{\rho g} = \frac{1}{2} \alpha \frac{v_2^2}{g} - \frac{1}{2} \alpha \frac{v_1^2}{g} + y_2 - y_1$$

jika disempurnakan diperoleh

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha \frac{v_2^2}{2g} + y_2$$

terbukti.

Persamaan ini disebut dengan persamaan Bernoully yang dipakai untuk aliran tanpa gesekan.

Akibat teorema 5.

Jika tekanan yang bekerja pada sistem adalah hidrostatik maka menurut teorema (4) besarnya tekanan hidrostatik jika tekanan udara diabaikan adalah sebesar $P = \rho g z$ dimana z = kedalaman aliran pada sistem, maka dengan mensubstitusikan besaran tekan hidrostatik ini pada persamaam Bernoully pada teorema (5) diperoleh

$$\frac{\rho g z_1}{\rho g} + \alpha \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = \frac{\rho g z_2}{\rho g} + \alpha \frac{v_2^2}{2g} + y_2$$

atau jika disempurnakan

$$z_1 + \alpha \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = z_2 + \alpha \frac{v_2^2}{2g} + y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

DEFINISI 29.

Momentum (M) didefinisikan sebagai perkalian massa (m) dengan kecepatannya (v) dinotasikan

$$M = m \cdot v$$

DEFINISI 30.

Perubahan Impuls gaya adalah senilai dengan perkalian antara gaya yang bekerja (F) dengan perubahan waktu selama gaya tersebut bekerja atau dinotasikan

$$\Delta M f = F.\Delta t \text{ atau } F = \frac{\Delta Mf}{\Delta t}$$

Untuk perubahan waktu yang kecil sekali maka diperoleh

$$F = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta Mf}{\Delta t} = \frac{dMf}{dt} \text{ atau}$$

$$dMf = F\, dt$$