BAB II

RANCANGAN PERCOBAAN FAKTORIAL 2^n

2.1 Konsep Dasar Statistik

Percobaan faktorial adalah percobaan yang semua taraf tiap faktor tertentu dikombinasikan atau disilangkan dengan semua taraf tiap faktor lainnya.

Beberapa keuntungan dari percobaan faktorial adalah: lebih efisien dalam menggunakan sumber-sumber yang ada, informasi yang diperoleh lebih komprehensip, karena mempelajari beberapa interaksi yang ada, dan hasil percobaan dapat diterapkan dalam suatu kondisi yang lebih luas, karena mempelajari kombinasi dari berbagai faktor.

2.2 Pengaruh Faktorial

Efek (pengaruh) sebuah faktor didefinisikan sebagai perubahan nilai variabel respon yang disebabkan oleh perubahan taraf faktor.

Macam-macam efek faktorial, yaitu:

a. Efek sederhana (simple effects).
   merupakan selisih respon dari suatu faktor terhadap taraf tertentu suatu faktor lainnya.

b. Efek utama (main effects).

merupakan rata-rata dari pengaruh sederhana.

c. Efek interaksi (interactions).

merupakan rata-rata dari selisih efek sederhana suatu faktor. Interaksi adalah kegagalan taraf suatu faktor untukberperilaku sama pada taraf atauperubahan taraf faktor lainnya.

2.3 Notasi dan Perhitungan Efek Faktorial

Rancangan faktorial 2^n atau rancangan 2^n adalah rancangan percobaan faktorial yang terdiri dari n faktor dan masing-masing faktor bertaraf 2. Banyaknya taraf yaitu 2 ditulis sebagai bilangan pokok dan banyaknya faktor yaitu n ditulis sebagai pangkat. Banyaknya kombinasi perlakuan yang dihasilkan yaitu 2^n, dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$

Faktor dinotasikan dengan huruf besar A,B,C,...dan seterusnya. Faktor A pada taraf $i = 0 \ , 1$ dinyatakan dengan A_i dan kombinasi perlakuannya dinotasikan dengan huruf kecil a,b,c,... sesuai dengan faktornya, dengan pangkat 0 dan 1. Jadi $a^o b^o = (1)$ (karena berpangkat 0 maka = 1 atau (1)) yang menyatakan kombinasi perlakuan pada taraf pertama faktor A dan faktor B, $a^o b^1 = b$ adalah kombinasi perlakuan pada taraf pertama faktor A dan taraf kedua faktor B, dan seterusnya.

2.3.1 Efek Faktorial pada Rancangan 2^2

Rancangan 2^2 adalah rancangan faktorial dengan 2 faktor yang masing-masing terdiri dari 2 taraf. Misal faktornya A dan B dan tarafnya 0 dan 1, maka kombinasi perlakuannya:

	B_0	B_1
A_0	(1)	b
A_1	a	ab

Berdasarkan pengertian macam-macam pengaruh faktorial pada bagian 2.2 didapat :

efek sederhana faktor A terhadap B_0 = a-(1)

efek sederhana faktor A terhadap B_1 = ab-b

efek sederhana faktor B terhadap A_0 = b-(1)

efek sederhana faktor B terhadap A_1 = ab-a

efek utama faktor A = 1/2 {-(1)+a-b+ab}

efek utama faktor B = 1/2 {-(1)-a+b+ab}

efek interaksi AB = 1/2 {(1)-a-b+ab}

Terlihat bahwa jumlah koefisien setiap efek = 0 , sehingga kita dapatkan kontras yang menyatakan hubungan efek dengan kombinasi perlakuan.

Bila disajikan dalam bentuk binom didapatkan :

$$2A = -(1)+a-b+ab = (a-1)(b+1)$$

$$2B = -(1)-a+b+ab = (a+1)(b-1)$$

$$2AB = (1)-a-b+ab = (a-1)(b-1)$$

Perhitungan efek tersebut dapat juga didapat dengan cara yang diberikan oleh Yates (metoda Yates) sebagai berikut :

respon	[1]	[2] = kontras
(1)	(1)+a	Tot.= +(1)+a+b+ab
a	b+ab	r2A = -(1)+a-b+ab
b	a-(1)	r2B = -(1)-a+b+ab
ab	ab-b	r2AB= +(1)-a-b+ab

Terlihat bahwa setengah bagian atas kolom [1] adalah jumlah dari pasangan berurutan bilangan pada kolom respon, dan setengah bagian bawahnya adalah selisih dari pasangan berurutan bilangan pada kolom respon, dimana respon adalah jumlah data tiap sel dengan replikasi r. Demikian juga setengah bagian atas kolom [2] adalah jumlah dari pasangan berurutan bilangan pada kolom [1], dan setengah bagian bawahnya adalah selisih dari pasangan berurutan bilangan pada kolom [1]. Untuk menghasilkan kontras diperlukan perhitungan seperti di atas sampai kolom [2] , yang sama dengan banyaknya faktor n = 2.

2.3.2 Efek Faktorial pada Rancangan 2^3

Rancangan 2^3 adalah rancangan faktorial dengan 3 faktor yang masing-masing bertaraf 2. Jika faktornya A,B, dan C , dan tarafnya 0 dan 1, maka dengan notasi pada bagian 2.3 didapatkan $2^3 = 8$ kombinasi perlakuan yaitu (1), a, b, ab, c, ac, bc, dan abc.

Perluasan dari cara di atas untuk rancangan 2^3 dengan metoda Yates didapatkan kontras sebagai berikut :

respon	[1]	[2]	[3] = kontras = $r2^2$(efek)
(1)	(1)+a	(1)+a+b+ab	+(1)+a+b+ab+c+ac+bc+abc
a	b+ab	c+ac+bc+abc	-(1)+a-b+ab-c+ac-bc+abc
b	c+ac	a-(1)+ab-b	-(1)-a+b+ab-c-ac+bc+abc
ab	bc+abc	ac-c+abc-bc	+(1)-a-b+ab+c-ac-bc+abc
c	a-(1)	b+ab-(1)-a	-(1)-a-b-ab+c+ac+bc+abc
ac	ab-b	bc+abc-c-ac	+(1)-a+b-ab-c+ac-bc+abc
bc	ac-c	ab-b-a+(1)	+(1)+a-b-ab-c-ac+bc+abc
abc	abc-bc	abc-bc-ac+c	-(1)+a+b-ab+c-ac-bc+abc

Atau dengan bentuk binom didapatkan :

$$\text{Tot.} = (a+1)(b+1)(c+1)$$

$$4rA = (a-1)(b+1)(c+1)$$

$$4rB = (a+1)(b-1)(c+1)$$

$$4rAB = (a-1)(b-1)(c+1)$$

$$4rC = (a+1)(b+1)(c-1)$$

$$4rAC = (a-1)(b+1)(c-1)$$

$$4rBC = (a+1)(b-1)(c-1)$$

$$4rABC = (a-1)(b-1)(c-1)$$

Dengan memperhatikan kontras pada rancangan 2^2 dan 2^3 didapatkan sifat kontras yang dihasilkan, yaitu:

a. Pada efek Y koefisien kontras yang tidak mengandung Y saja yang berharga negatif.

b. Koefisien kontras XY didapat dengan mengalikan koefisien kontras X dan Y. Jadi koefisien kontras ABC didapat dari perkalian koefisien kontras A,B, dan C.

c. Pada penulisan bentuk binom efek Y, faktor binom berbentuk (y-1) jika terdapat faktor Y dan (y+1) jika tidak terdapat faktor Y.

Sedangkan sifat kontras yang dihasilkan dengan perhitungan secara kolom per kolom yaitu :
setengah bagian atas kolom [n+1] didapatkan dengan menjumlahkan pasangan berurutan bilangan kolom [n] dan setengahnya lagi adalah selisihnya. Banyaknya kolom perhitungan tersebut sama dengan banyaknya faktor. Kolom terakhir yang dihasilkan merupakan kolom kontras yang menyatakan total efek faktorial.

2.3.3 Efek Faktorial pada Rancangan 2^n

Uraian untuk rancangan 2^2 dan 2^3 diatas dapat diperluas untuk rancangan 2^n yaitu rancangan dengan n faktor yang masing-masing bertaraf 2. Jika pada n = 2 dan 3 maka masing-masing didapatkan 4 dan 8 kombinasi perlakuan, dan untuk n = 4 dan 5 masing-masing didapat 16 dan 32 kombinasi perlakuan dan seterusnya. Sehingga makin besar harga n makin banyak kombinasi perlakuannya. Hal ini menyebabkan makin panjang analisisnya sehingga makin panjang pula susunan kontrasnya.

Jika tiap sel kombinasi perlakuan dilakukan replikasi sebanyak r maka secara umum hubungan seperti di atas dapat ditulis :

$$r2^{n-1}A = (a-1)(b+1)(c+1)(d+1)\ldots$$

$$r2^{n-1}B = (a+1)(b-1)(c+1)(d+1)\ldots$$

$$r2^{n-1}C = (a+1)(b+1)(c-1)(d+1)\ldots$$

$$\vdots$$

$$r2^{n-1}AB = (a-1)(b-1)(c+1)(d+1)\ldots$$

$$r2^{n-1}AC = (a-1)(b+1)(c-1)(d+1)\ldots$$

$$\vdots$$

$$r2^{n-1}ABC = (a-1)(b-1)(c-1)(d+1)\ldots$$

$$\vdots$$

dan seterusnya.

atau :

$$r2^{n-1}(\text{efek}) = \text{kontras},$$

dengan n adalah banyaknya faktor dan kontras menyatakan total efek.

Jumlah kuadrat (JK) efek dihitung menurut definisi kontras.

Kontras dari parameter a adalah fungsi linier dari a_i,

$$C = \sum c_i a_i, \ i = 1,2,3,...$$

dengan jumlah koefisien kontras $\sum c_i = 0$

dan jumlah kuadratnya :

$$JK = (\sum c_i a_i)^2 / \sum r_i c_i^2 ,$$

dengan r adalah banyaknya replikasi pada sel ke-i.

Karena pada pembahasan ini replikasi tiap sel sama dan

$$\sum c_i = \text{banyaknya kombinasi perlakuan} = 2^n ,$$

maka :

$$JK\ (\text{efek}) = (\text{kontras})^2/(r2^n).$$

Pada perhitungan kontras diperlukan urutan kombinasi perlakuan yang standart (sistematis), yaitu : (1) a b ab c ac bc abc d ad bd abd cd acd bcd abcd... Untuk menentukan urutan faktor utama dan interaksi bisa juga melalui operasi crossing (|) yang didefinisikan sebagai perluasan sisi kanan. Misal pada dua faktor : A|B = A+B+AB, tiga faktor A|B|C = (A|B)|C = A+B+AB+C+(A+B+AB)C = A+B+AB+C+AC+BC+ABC, dan seterusnya.

2.3.4 Metoda Yates Klasik pada Rancangan 2^n

Berdasarkan sifat kontras yang dihasilkan pada perhitungan efek faktorial, Yates memberikan suatu cara praktis untuk menghitung kontras dan jumlah kuadrat efek. Cara tersebut dinamakan metoda Yates klasik.

Langkah-langkah perhitungan efek faktorial dengan metoda Yates klasik yaitu :

1 Kombinasi perlakuan ditulis secara sistematis dan diberi nomor urut dimulai dari 1. Kolom tot. treat. yang berisi nilai respon dari masing-masing kombinasi perlakuan adalah total treatment dari masing-masing sel.

2. Setengah bagian atas dari kolom berikutnya yaitu kolom [1] dihitung dari penjumlahan berurutan pasangan bilangan pada kolom tot. treat. dan setengah bagian bawahnya adalah selisih dari pasangan bilangan tersebut yang bernomor urut ganjil terhadap yang genap. Langkah tersebut dilakukan sampai dengan kolom [n] dimana n = banyaknya faktor, yang merupakan kolom kontras. Dengan kata lain setengah bagian atas dari kolom [n] dihitung dari penjumlahan berurutan pasangan bilangan pada kolom [n-1] dan setengah bagian bawahnya adalah selisih dari pasangan bilangan tersebut yang bernomor urut ganjil terhadap yang genap.

3. Jumlah kuadrat efek JK (efek) = $(\text{kontras})^2/(2^n r)$

Sebagai ilustasi diberikan kasus (contoh 2.1) pada rancangan 2^4 .

contoh 2.1 :

Percobaan terhadap hasil panen tanaman gula (ton per hektar) dengan empat faktor (pupuk) yaitu m = pupuk kandang, n = nitrogen, p = phosporus, dan K = potassium, masing-masing faktor dilakukan pada dua taraf yaitu sebelum dan sesudah dipupuk.

Data percobaannya :

Treat.	rep.1	rep.2	rep.3	rep.4	Tot.treat.
(1)	32	43	27	19	121
m	47	41	48	45	181
n	26	36	24	18	104
mn	61	76	56	64	257
p	29	39	27	28	123
mp	51	34	40	48	173
np	36	31	32	30	129
mnp	76	65	70	63	274
k	35	42	56	35	168
mk	63	41	60	53	217
nk	80	68	75	67	290
mnk	100	68	87	66	321
pk	40	44	53	36	173
mpk	64	39	75	72	250
npk	105	99	74	73	351
mnpk	90	82	89	101	362
Tot.	935	848	893	818	3494

Langkah-langkah perhitungan efek untuk contoh 2.1 dengan metoda Yates klasik adalah :

1. Kolom kombinasi perlakuan disusun secara sistematis yaitu (1) m n mn ... mnpk dengan no. urut mulai dari 1. Total treatment adalah total treatment pada tabel 2.1.

no.	treat.	Tot.Treat.
1.	(1)	121
2.	m	181
3.	n	104
4.	mn	257
5.	p	123
6.	mp	173
7.	np	129
8.	mnp	274
9.	k	168
10.	mk	217
11.	nk	290
12.	mnk	321
13.	pk	173
14.	mpk	250
15.	npk	351
16.	mnpk	362

2. Setengah bagian kolom [1] adalah penjumlahan pasangan bilangan berurutan pada kolom tot.treat. dan setengah bagian bawahnya adalah selisih dari pasangan bilangan tersebut yang bernomor urut ganjil terhadap yang genap.

no.	Tot.Treat.	[1]
1	121	121+181=302
2	181	104+257=361
3	104	123+173=296
4	257	129+274=403
5	123	168+217=385
6	173	290+321=611
7	129	173+250=423
8	274	351+362=713
9	168	181-121=60
10	217	257-104=153
11	290	173-123=50
12	321	274-129=145
13	173	217-168=49
14	250	321-290=31
15	351	250-173=77
16	362	362-351=11

Analog untuk menghitung kolom berikutnya yaitu kolom [2] ditentukan dari kolom [1], kolom [3] ditentukan dari kolom [2], dan kolom [4] ditentukan dari kolom [3]. Kolom [4] merupakan kolom kontras yang menyatakan total efek. Hasil selengkapnya yaitu :

Hasil perhitungan contoh 2.1 dengan metoda Yates klasik.

No.	Treat.	Tot. treat.	[1]	[2]	[3]	[4] kontras
1.	(1)	121	302	663	1362	3494
2.	m	181	361	699	2132	576
3.	n	104	296	996	408	682
4.	mn	257	403	1136	168	104
5.	p	123	385	213	166	176
6.	mp	173	611	195	516	-10
7.	np	129	423	80	188	112
8.	mnp	274	713	88	-84	-46
9.	k	168	60	59	36	770
10.	mk	217	153	107	140	-204
11.	nk	290	50	226	-18	350
12.	mnk	321	145	290	8	-272
13.	pk	173	49	93	48	104
14.	mpk	250	31	95	64	26
15.	npk	351	77	-18	2	16
16.	mnpk	362	11	-66	-48	-50

3. Untuk analisa varian diperlukan jumlah kuadrat (JK) :

$$JK\ (efek) = (kontras)^2/2^4\ 4.$$

$$JK\ (M) = 576^2/64 = 5184$$

$$JK\ (N) = 682^2/64 = 7267,56$$

$$JK\ (MN) = 104^2/64 = 169$$

.

.

.

$$JK\ (MNPK) = (-50)^2/64 = 39,06$$

Σ JK (efek) = 26791,94

= JK treatment

= JK treatment (dengan cara biasa pada analisa varian) yaitu :

$$\text{JK treat.} = \Sigma\,(T_i^2/r) - K$$

dengan : T_i = total treatment pada sel ke-i

K = faktor koreksi

K = (tot.)^2/t , t = jumlah data koreksi = $2^n r$ = 2^4 4

= (3494)^2/64 = 190750,5625

Jadi :

JK treat. = (121^2+181^2+ 104^2 +...+ 362^2)/4 - 190750,5625

= 217542,5-190750,5625 = 26791,9325

Untuk mendapatkan analisa varian selengkapnya masih diperlukan perhitungan sebagai berikut :

$$\text{JK replikasi} = \Sigma\,(R_i^2/t) - K$$

dengan : R_i = jumlah data tiap sel pada replikasi ke-i.

t replikasi = 2^n = 2^4 = 16

Jadi :

JK replikasi = (935^2+848^2+893^2+818^2)/16 - 190750,5625

= 191243,875 - 190750,5625

= 493,3125

$$\text{JK total} = \Sigma\,Y^2 - K$$

dengan : Y = data percobaan pada setiap replikasi

Jadi :

JK total = $32^2+43^2+27^2+\ldots+101^2$ - 190750,5625

= 222110 - 190750,5625

= 31359,4375

dan :

JK error = JK total - JK replikasi - JK treatment

= 31359,4375 - 493,3125 - 26791,9375

= 4074,1875

Kemudian :

JKR = jumlah kuadrat rata-rata = JK/dk

dengan :

dk replikasi = r-1 = 4-1 = 3

dk treatment = banyaknya perlakuan - 1

= $2^4 - 1 = 15$

dk faktor utama = banyak taraf - 1 = 2-1 = 1

dk faktor interaksi = perkalian dari dk faktor faktor yang saling berinteraksi = 1

dk error = $(r-1)(2^n-1) = 3 \cdot 15 = 45$

dk total = banyaknya data - 1

= $2^n r-1 = 2^4 4-1 = 63$

Misal model yang diambil adalah model tetap rancangan acak lengkap, maka F = JKR (faktor)/JKR error

TABEL 2.1 Analisa Varian untuk contoh 2.1

Sumber Varian	dk	JK	JKR	F
Replikasi	3	493,31	164,44	
Treatment	15	26.791,94	1.786,13	
M	1	5.184,00	5.184,00	57,26*#
N	1	7.267,56	7.267,56	80,27*#
MN	1	169,00	169,00	1,87
P	1	484,00	484,00	5,35 #
MP	1	1,56	1,56	0,02
NP	1	196,00	196,00	2,16
MNP	1	33,06	33,06	0,37
K	1	9.264,06	9.264,06	102,32*#
MK	1	900,00	900,00	9,94*#
NK	1	1.914,06	1.914,06	21,14*#
MNK	1	1.156,00	1.156,00	12,77*#
PK	1	169,00	169,00	1,87
MPK	1	10,56	10,56	0,12
NPK	1	4,00	4,00	0,04
MNPK	1	39,06	39,06	0,43
Error	45	4.074,19	90,54	
Total	63	31.359,44		

Rata-rata hitung	54,59
Banyaknya observasi	64

* signifikan pada taraf kepercayaan α=1%

\# signifikan pada taraf kepercayaan α=5%

Faktor signifikan jika $F_{\alpha,1,45} < F$ sehingga semua faktor utama dan interaksi MK, NK, MNK mempunyai efek yang berarti terhadap hasil panen.