BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Matrik

Definisi 2.1

Sebuah matrik adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen dalam matrik.

Jika **A** adalah sebuah matrik, maka akan digunakan a_{ij} untuk menyatakan elemen yang terdapat pada baris i dan kolom j. Jadi sebuah matrik orde mxn secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2

Jika **A** adalah matrik mxn maka transpos **A** dinyatakan oleh $\mathbf{A}^t$ dan didefinisikan dengan matrik nxm, yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari **A**, kolom kedua adalah baris kedua dari **A**, dan seterusnya.

Transpos matrik **A** ($\mathbf{A}^t$) dapat ditulis sebagai:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \text{maka } A^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \\ -2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3

Jika **A** dan **B** adalah dua matrik sebarang yang ukurannya sama, maka jumlah **A** + **B** adalah matrik yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama elemen yang bersesuaian dalam kedua matrik tersebut. Matrik yang ukurannya berbeda tidak dapat dijumlahkan.

Contoh 2.2

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4

Jika **A** adalah matrik mxr dan **B** adalah matrik rxn, maka hasil kali **AB** adalah matrik mxn yang elemen-elemennya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari elemen baris i dan kolom j dari **AB**, pilihlah baris i dari matrik **A** dan kolom j dari matrik **B**. Kalikanlah elemen-elemen yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama kemudian tambahkan hasil kali yang dihasilkan.

Contoh 2.3

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Maka $AB = \begin{bmatrix} 3(4)+2(1)+1(3) & 3(2)+2(2)+1(5) \\ 4(4)+5(1)+6(3) & 4(2)+5(2)+6(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 39 & 48 \end{bmatrix}$

Theorema 2.1

Misalkan bahwa **A** = a_{ij} dan **B** = b_{ij} keduanya matrik mxn, dan **C** = c_{ij} adalah matrik nxr, maka (**A** + **B**)**C** = **AC** + **BC**.

Bukti:

Misaalkan **D** = d_{ij} = (**A**+**B**)**C** dan **E** = e_{ij} = **AC** + **BC**

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} \text{ dan } e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}$$

sehingga $d_{ij} = c_{ij}$, maka (**A**+**B**)**C** = **AC** + **BC**.

Definisi 2.5

Matrik satuan (identity matrix) adalah matrik **I** = (δ_{ij}) berorde nxn dimana:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

Seperti halnya dengan bilangan 1 bertindak sebagai satuan untuk perkalian bilangan real, maka terdapat matrik khusus **I** yang bertindak sebagai satuan untuk perkalian matrik, yaitu: **IA** = **AI** = **A** untuk sebarang matrik **A** berorde nxn.

Secara umum matrik identitas **I** dapat ditulis sebagai:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6

Suatu matrik **A** berorde nxn dikatakan invertible (dapat dibalik) jika terdapat matrik **B** sehingga **AB = BA = I**. Matrik **B** disebut sebagai invers perkalian dari **A**.

Contoh 2.4

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

maka **A** adalah invers dari **B** dan **B** adalah invers dari **A**.

Invers dari suatu matrik bujursangkar **A** dapat dicari dengan menggunakan operasi baris atau kolom elementer. Caranya dengan mentransformasi **A** menjadi matrik identitas **I** melalui operasi baris atau kolom elementer, selanjutnya dengan urutan operasi baris yang sama, matrik **I** diubah menjadi $\mathbf{A}^{-1}$.

Untuk memudahkan, matrik **A** dan **I** dibuat dalam satu matrik [**A** | **I**]:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

sedangkan matrik hasil transformasinya adalah [**I** | $\mathbf{A}^{-1}$]:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{array}\right]$$

Contoh 2.5

Misalkan: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan matrik identitas $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Akan dicari invers dari matrik **A** dengan transformasi elementer baris.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{21}^{(-4)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[H_2^{(2)}]{H_1^{(5)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{H_{12}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -10 & -8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[H_{21}^{(-1/10)}]{H_1^{(1/5)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \end{array}\right]$$

Jadi invers dari **A** adalah matrik yang terletak disebelah kanan tanda pemisah:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

2.2. Vektor

Vektor adalah suatu potongan (ruang, segmen) garis yang mempunyai arah. Suatu vektor dapat digambarkan dengan memberi tanda panah pada titik ujung suatu potongan garis itu. Notasi dari vektor dapat dituliskan dengan memberi tanda panah atau garis diatas suatu huruf atau dengan huruf tebal, yaitu: $\vec{A}, \vec{a}, \bar{A}, \bar{a}$, **A**, dan **a**. Selain itu penulisan vektor dapat juga dipakai titik awal dan

titik ujung, misalnya $\overline{OB}$ adalah vektor yang mempunyai titik awal O dan titik ujung B.

Definisi 2.7

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah sebuah vektor di R^n, maka hasil kali dalam (inner product) **u.v** didefinisikan:

$\mathbf{u.v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$

dan panjang/norma dari vektor **u** didefinisikan:

$$\|u\| = (u.u)^{1/2} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \ldots + u_n^{\,2}}$$

Ruang Vektor

Definisi 2.8

Misalkan V sebarang himpunan yang tak kosong yang dua operasinya didefinisikan, yaitu penambahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riil), maka V disebut ruang vektor jika memenuhi aturan berikut:

1. Untuk setiap vektor $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ dan k adalah skalar, maka $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$ dan $k\mathbf{u} \in V$
2. Untuk setiap $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ barlaku $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
3. Terdapat $\mathbf{0} \in V$, disebut vektor nol, sedemikian sehingga untuk setiap $\mathbf{u} \in V$ berlaku $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$
4. Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$, terdapat $-\mathbf{u} \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=-\mathbf{u}+\mathbf{u}=0$
5. Untuk setiap $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
6. Jika adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$, maka $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
7. Untuk setiap skalar k,m dan $\mathbf{u} \in V$ berlaku $(k+m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$

8. Untuk setiap $\mathbf{u} \in V$ berlaku $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Definisi 2.9

Jika S adalah himpunan tak kosong dari suatu ruang vektor V, dan S memenuhi syarat-syarat berikut:

i. $k\mathbf{u} \in S$ jika $\mathbf{u} \in S$ untuk sebarang skalar k

ii. $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in S$ jika $\mathbf{u} \in S$ dan $\mathbf{v} \in S$

maka S disebut ruang bagian (subspace) dari V.

Definisi 2.10

Misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor V, jumlah vektor-vektor berbentuk $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_nv_n$, dimana $k_1,\ldots,k_n$ adalah skalar-skalar, disebut suatu kombinasi linier dari $v_1, v_2,\ldots,v_n$. Himpunan semua kombinasi linier dari $v_1, v_2,\ldots,v_n$ disebut Rentang (Span) dari $v_1, v_2,\ldots,v_n$. Rentang dari $v_1, v_2,\ldots,v_n$ akan dinyatakan dalam $\mathrm{Ren}(v_1, v_2,\ldots,v_n)$.

Definisi 2.11

Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ didalam R^n dikatakan orthogonal jika $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$.

Suatu himpunan vektor-vektor $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ didalam R^n dikatakan saling orthogonal jika vektor-vektor itu orthogonal sepasang-sepasang, dengan kata lain $\mathbf{u}_i.\mathbf{u}_j = 0$ jika $i \neq j$. Sedangkan jika vektor-vektor didalam himpunan S yang saling orthogonal itu semuanya vektor satuan, maka dinamakan himpunan itu ortonormal, dengan kata lain $\mathbf{u}_i.\mathbf{u}_j = 0$ jika $i \neq j$ dan $\mathbf{u}_i.\mathbf{u}_i = 1$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Himpunan ortonormal yang juga membentuk suatu basis bagi R^n dinamakan Basis Ortonormal bagi R^n.

2.3. Regresi Linier Berganda

Prosedur regresi linier digunakan untuk membuat hubungan antara sebuah variabel dependen (variabel terikat) dengan satu atau lebih variabel independen (variabel bebas). Jika variabel dependen dihubungkan dengan beberapa variabel independen, maka persamaan regresi yang dihasilkan adalah regresi linier berganda.

Model regresi linier berganda dapat disajikan dalam bentuk persamaan umum:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \ldots + \alpha_p X_{pt} + u_t \qquad (2.1a)$$

Dengan $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ adalah konstanta atau parameter yang nilainya harus diestimasi, dan u_t adalah kesalahan pengganggu.

Persamaan regresi berganda secara ringkas dapat ditulis dalam notasi matrik:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\alpha + \mathbf{U} \qquad (2.1b)$$

dan dalam bentuk matrik adalah:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad (2.1c)$$

nx1 nx(p+1) (p+1)x1 nx1

Pada umumnya, model regresi terdiri dari suatu himpunan asumsi-asumsi mengenai distribusi kesalahan pengganggu u_t, dan hubungan antara X dan Y. Diasumsikan bahwa u_t merupakan variabel bebas dengan nilai harapan sama dengan nol dan varians = σ_u^2, untuk semua nilai X. Selain itu X dianggap konstan dari sampel ke sampel, dan Y merupakan fungsi linier dari X.

Asumsi-asumsi ini secara ringkas dapat ditulis sebagai berikut:

$E(u_t) = 0$, untuk semua t, t = 1,2,...,n

$E(u_t^2) = Var(u_t) = \sigma_u^2$, untuk semua t

$E(u_t,u_j) = Cov(u_t,u_j) = 0$, untuk $t \neq j$

X_t konstan dan $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \ldots + \alpha_p X_{pt} + u_t$

Metode Kuadrat Terkecil

Metode kuadrat terkecil adalah suatu metode untuk menghitung $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_p$ sebagai estimasi $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sedemikian sehingga jumlah kuadrat error memiliki nilai terkecil, atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum u_t^2 = \sum \left[Y_t - \alpha_0 - \alpha_1 X_{1t} - \cdots - \alpha_p X_{pt}\right]^2 \qquad (2.2)$$

dimana $\sum u_t^2$ adalah jumlah kuadrat residual.

Dalam notasi matrik, meminimumkan $\sum u_t^2$ sama dengan meminimumkan $u'u$, karena:

$$u'u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \sum u_t^2$$

Untuk memperoleh taksiran/estimasi $\hat{\alpha}_0,\cdots,\hat{\alpha}_p$ dengan $\sum u_t^2$ sekecil mungkin, dilakukan dengan cara mendifferensialkan secara parsial persamaan (2.2) terhadap $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ dan menyamakan hasilnya dengan nol.

$$\frac{\partial \sum u_t^2}{\partial \alpha_0} = -2\sum\left(Y_t - \alpha_0 - \sum \alpha_j X_{tj}\right), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \sum u_t^2}{\partial \alpha_j} = -2\sum\left(Y_t - \alpha_0 - \sum \alpha_j X_{tj}\right)\left(X_{tj}\right), \tag{2.4}$$

dimana t = 1,2,..,n dan j = 1,2,...,p

Proses ini akan menghasilkan (p+1) persamaan normal dalam (p+1) variabel, yaitu:

$$n\alpha_0 + \alpha_1 \sum X_{1t} + \alpha_2 \sum X_{2t} + \cdots + \alpha_p \sum X_{pt} = \sum Y_t$$

$$\alpha_0 \sum X_{1t} + \alpha_1 \sum X_{1t}^2 + \alpha_2 \sum X_{1t}X_{2t} + \cdots + \alpha_p \sum X_{1t}X_{pt} = \sum X_{1t}Y_t$$

$$\alpha_0 \sum X_{2t} + \alpha_1 \sum X_{1t}X_{2t} + \alpha_2 \sum X_{2t}^2 + \cdots + \alpha_p \sum X_{2t}X_{pt} = \sum X_{2t}Y_t$$

$$\vdots$$

$$\alpha_0 \sum X_{pt} + \alpha_1 \sum X_{1t}X_{pt} + \alpha_2 \sum X_{2t}X_{pt} + \cdots + \alpha_p \sum X_{pt}^2 = \sum X_{pt}Y_t$$

Dengan menggunakan pendekatan matrik akan dicari vektor taksiran kuadrat terkecil untuk α yang meminimumkan jumlah kuadrat error, yaitu:

$$\sum u_t^2 = u'u$$

$$= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\alpha)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\alpha)$$

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \alpha'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\alpha + \alpha'\mathbf{X}'\mathbf{X}\alpha$$

karena $\alpha'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ adalah skalar, maka $(\alpha'\mathbf{X}'\mathbf{Y})' = \mathbf{Y}'\mathbf{X}\alpha$, sehingga didapat:

$$\sum u_t^2 = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\alpha'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \alpha'\mathbf{X}'\mathbf{X}\alpha \qquad (2.5)$$

dengan meminimumkan $\sum u_t^2$ terhadap elemen-elemen α:

$$\frac{\partial \sum u_t^2}{\partial \alpha} = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\alpha = 0$$

sehingga didapat: $\alpha = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ (2.6)

2.4 Analisis Runtun Waktu

2.4.1 Fungsi Autokovarian

Fungsi autokovarian menyatakan tingkat ketergantungan antara pengamatan pada waktu ke-t dengan pengamatan pada waktu sebelum t.

Definisi 2.12

Fungsi autokovarian proses stokastik $\{u_t, t \in T\}$ adalah:

$$\gamma_{u_t, u_{t+k}} = \mathrm{Cov}(u_t, u_{t+k})$$

$$= E(u_t u_{t+k})$$

Untuk proses stokastik stasioner, fungsi autokovarian hanya bergantung pada selang waktu antara t_1 dan t_2. Misal untuk proses stasioner, selang waktu dinyatakan dalam k, maka fungsi autokovarian menjadi:

$$\gamma_{t,t+k} = \mathrm{Cov}(u_t, u_{t+k})$$

$$= E(u_t u_{t+k}) \qquad (2.7)$$

dimana fungsi autokovarian γ_k memiliki syarat-syarat sebagai berikut:

1. $\gamma_0 = var(u_t)$
2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$

Definisi 2.13

White Noise adalah barisan variabel acak ε_t, ε_{t-1}, ... yang masing-masing tidak berkorelasi, dimana $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Fungsi autokovarian lag k white noise adalah:

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = E[(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))(\varepsilon_{t+k} - E(\varepsilon_{t+k}))]$

Karena $E(\varepsilon_t) = 0$, sehingga:

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k})$

Untuk k=0 $\longrightarrow$ $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k})$

$= E(\varepsilon_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ (2.8a)

Untuk k≠0 $\longrightarrow$ $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+k}) = 0$ (2.8b)

2.4.2 Proses Autoregresif (AR)

Bentuk umum suatu proses Autoregresif tingkat p atau AR(p) adalah:

$$u_t = \varphi_1 u_{t-1} + \varphi_2 u_{t-2} + \ldots + \varphi_p u_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (2.9)$$

yaitu nilai sekarang suatu proses dinyatakan sebagai jumlah tertimbang nilai-nilai yang lalu ditambah satu sesatan/goncangan random sekarang. Jadi dapat dipandang u_t diregresikan pada p nilai u yang lalu, sehingga parameter-parameter $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ dapat diestimasi dengan metode kuadrat terkecil seperti halnya pada regresi linier, yaitu:

$$\hat{\varphi} = (\mathbf{U'U})^{-1}\mathbf{U'Y} \qquad (2.10)$$

dimana:

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_p & u_{p-1} & \cdots & u_1 \\ u_{p+1} & u_p & & u_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-2} & & u_{N-p} \end{bmatrix} \text{dan } Y = \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

dengan p adalah orde dari proses AR dan N adalah banyaknya pengamatan.

Untuk menentukan fungsi autokovarian dari proses AR(p) yaitu dengan mengalikan persamaan (2.9) dengan u_{t-k} dan mengambil ekspektasinya:

$$E(u_{t-k}u_t) = \varphi_1 E(u_{t-k}u_{t-1}) + \ldots + \varphi_p E(u_{t-k}u_{t-p}) + E(u_{t-k}\varepsilon_t)$$

sehingga diperoleh:

$$\gamma_k = \varphi_1\gamma_{k-1} + \varphi_2\gamma_{k-2} \ldots + \varphi_p\gamma_{k-p} \quad \text{untuk } k > 0. \qquad (2.11)$$

2.4.3 Proses Rata-rata Bergerak atau MA

Proses Moving Average tingkat q atau MA(q) didefinisikan sebagai:

$$u_t = \varepsilon_t + \lambda_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \lambda_q\varepsilon_{t-q} \qquad (2.12)$$

dimana ε_t adalah variabel random dari sesatan/goncangan random yang independen dan berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan varians konstan.

Untuk menentukan fungsi autokovarian dari proses MA(q), persamaan (2.12) dikalikan dengan u_{t-k} dan mengambil ekspektasinya sehingga diperoleh:

$$E(u_t u_{t-k}) = E[(\varepsilon_t + \lambda_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \lambda_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-k} + \lambda_1\varepsilon_{t-k-1} + \ldots + \lambda_q\varepsilon_{t-k-q})]$$

Untuk k=0:

$$\gamma_0 = (1+\lambda_1^2+\ldots+\lambda_q^2) \qquad (2.13a)$$

untuk k>0:

$$\gamma_k = \begin{cases} \left(-\lambda_k + \lambda_1\lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_{q-k}\lambda_q\right), & k = 1,2,\ldots,q \\ 0 \quad , & k > q \end{cases} \qquad (2.13b)$$

2.5 Matrik Transformasi P

Jika residual-residual dalam sebuah model regresi linier sederhana berkorelasi, sehingga model regresi yang diperoleh tidak memenuhi asumsi non-autokorelasi, maka akan ditentukan matrik transformasi **P** sedemikian sehingga didapatkan persamaan regresi tertransformasi yang tidak berautokorelasi.

Fungsi autokovarian dari himpunan variabel stokastik $u_1, u_2, \ldots, u_n$ yang berdistribusi normal dengan $Eu_t = 0$ dan $Eu_tu_j = \sigma^2\gamma_{tj}$ jika ditulis dalam bentuk matrik adalah sebagai berikut:

$$\tau = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \cdots & \gamma_{n,n} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari matrik **P** sedemikian sehingga $\mathbf{P}\tau\mathbf{P}' = \mathbf{I}_n$ sebagai berikut:

Ditentukan suatu himpunan bagian dari S yaitu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan matrik **P** dengan elemen $p_{t,j}$ yang memenuhi batasan-batasan sebagai berikut:

$$(v_t.v_j) \quad = E(v_tv_j) = 1 \qquad t = j \qquad (2.14)$$

$$(v_t.v_j) \quad = E(v_tv_j) = 0 \qquad t \neq j \qquad (2.15)$$

$$v_t \quad = \sum_{j=1}^{n} p_{t,j}u_j \qquad t = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.16)$$

$E(v_tv_j)$ didefinisikan sebagai perkalian dalam (inner product) dari dua elemen v_t dan v_j dalam S atau $(v_t.v_j) = E(v_tv_j)$.

Dari ketiga persamaan tersebut terlihat adanya proses ortonormalisasi yang dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai $\mathbf{v} = \mathbf{Pu}$ dan $E\mathbf{vv}' = I_n$, dimana **u** dan **v** adalah vektor (nx1) dengan elemen-elemen u_t dan v_t . Atau dari $\mathbf{v} = \mathbf{Pu}$ dan $E\mathbf{vv}' = \mathbf{I}_n$, maka:

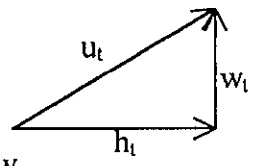
$$E(\mathbf{Pu})(\mathbf{Pu})' = E(\mathbf{Pu})(\mathbf{u}'\mathbf{P}') = \mathbf{P}E(\mathbf{uu}')\mathbf{P}' = \mathbf{P}\tau\mathbf{P}' = \mathbf{I}_n$$

Dengan menggunakan teori aljabar linier secara lengkap matrik **P** dapat diselesaikan sebagai berikut:

Didefinisikan h_t sebagai proyeksi u_t atas ruang bagian S_{t-1} yang direntang oleh u_1, $u_2, \ldots, u_{t-1}$ ($t = 2,3,..,n$), maka S_{t-1} terdiri dari segala kemungkinan kombinasi linier dari $u_1, u_2, \ldots, u_{t-1}$ dengan $t = 2,3,\ldots,n$. Didefinisikan w_t sebagai elemen orthogonal (tegak lurus) terhadap h_t dalam ruang bagian S_{t-1} jika $t \geq 2$.

$$w_1 = u_1 \tag{2.17}$$

$$w_t = u_t - h_t \qquad t \geq 2 \tag{2.18}$$



dan $$v_t = \frac{w_t}{\|w_t\|}, \qquad t = 1, 2, \ldots, n \tag{2.19}$$

maka jika diambil $\sigma_t = \|w_t\|$, dari persamaan (2.17) didapat:

$$\sigma_1 = (\gamma_{1,1})^{1/2} \tag{2.20}$$

sehingga dengan menggunakan persamaan (2.16) dapat diketahui matrik **P** dengan elemen-elemen $p_{t,j}$ sebagai berikut:

Misalkan akan dicari elemen baris pertama kolom pertama dari matrik **P** (p_{11}).

Dari persamaan (2.19) dan persamaan (2.16) didapat:

$$p_{11} = \frac{1}{\sigma_1} = (\gamma_{1,1})^{-1/2} \tag{2.21}$$

Selanjutnya diasumsikan bahwa $v_1, v_2, \ldots, v_t$ adalah suatu basis orthonormal pada ruang bagian S_t yang direntang oleh $u_1, u_2, \ldots, u_t$ dan v_k ditulis:

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} p_{k,j} u_j, \quad 1 \le k \le t \tag{2.22}$$

Untuk mencari elemen-elemen $p_{t+1,j}$ dari baris ke-t+1 pada (nxn) matrik **P** adalah sebagai berikut:

Ditulis h_{t+1} yang merupakan proyeksi dari u_{t+1} pada ruang bagian S_t sebagai :

$$h_{t+1} = \sum_{k=1}^{t} d_{t+1,k} v_k \tag{2.23}$$

dan jika didefinisikan w_{t+1} sesuai dengan persamaan (2.18), maka dihasilkan:

$$w_{t+1} = u_{t+1} - h_{t+1} \tag{2.24}$$

karena $v_1, v_2, \ldots, v_t$ adalah orthonormal maka didapatkan:

$$d_{t+1,k} = Eu_{t+1}v_k \tag{2.25}$$

persamaan diatas dapat ditunjukkan seperti dibawah ini:

$$h_{t+1} = \sum_{k=1}^{t} d_{t+1,k} v_k$$

$$= d_{t+1,1}v_1 + d_{t+1,2}v_2 + \ldots + d_{t+1,t}v_t$$

$$= [v_1, v_2, \ldots\ldots, v_t] \begin{bmatrix} d_{t+1,1} \\ d_{t+1,2} \\ \vdots \\ d_{t+1,t} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (2.24) dapat ditulis:

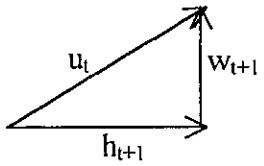
$$u_{t+1} = w_{t+1} + h_{t+1}$$

$$u_{t+1} = [v_1, v_2, \ldots, v_t] \begin{bmatrix} d_{t+1,1} \\ d_{t+1,2} \\ \vdots \\ d_{t+1,t} \end{bmatrix} + w_{t+1}$$

selanjutnya persamaan diatas dikalikan $[v_1, v_2, \ldots, v_n]'$ dan mengambil ekspektasinya, didapat:

$$\begin{bmatrix} d_{t+1,1} \\ d_{t+1,2} \\ \vdots \\ d_{t+1,t} \end{bmatrix} = \left[E \begin{bmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & \cdots & v_1v_t \\ v_2v_1 & v_2v_2 & \cdots & v_2v_t \\ \vdots & & & \vdots \\ v_tv_1 & v_tv_2 & \cdots & v_tv_t \end{bmatrix} \right]^{-1} E \begin{bmatrix} v_1u_{t+1} \\ v_2u_{t+1} \\ \vdots \\ v_tu_{t+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

karena w_{t+1} dan v_j orthogonal jika $j < t+1$



$$h_{t+1} = \sum_{k=1}^{t} d_{t+1,k} v_k$$

$w_{t+1} \perp h_{t+1}$ maka $w_{t+1} \perp v_j$ jika $j < t+1$

karena $E(v_tv_j) = 1$ untuk $t = j$ dan $E(v_tv_j) = 0$ untuk $t \neq j$ maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} d_{t+1,1} \\ d_{t+1,2} \\ \vdots \\ d_{t+1,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1u_{t+1} \\ v_2u_{t+1} \\ \vdots \\ v_tu_{t+1} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} v_1u_{t+1} \\ v_2u_{t+1} \\ \vdots \\ v_tu_{t+1} \end{bmatrix}$$

$d_{t+1,k} = Eu_{t+1}v_k$ dengan $k = 1, 2, \ldots, t$.

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.22) ke persamaan (2.25) didapat:

$$d_{t+1,k} = \sum_{j=1}^{k} p_{k,j}\gamma_{t+1,j} \qquad (2.26)$$

dari Phytagoras didapat:

$$\|w_{t+1}\|^2 + \|h_{t+1}\|^2 = \|u_{t+1}\|^2$$

$$\|w_{t+1}\|^2 = \|u_{t+1}\|^2 - \|h_{t+1}\|^2$$

$$= \gamma_{t+1,t+1} - E(\sum_{k=1}^{t} d_{t+1,k} v_k)^2$$

dikarenakan $v_1, v_2, \ldots, v_t$ adalah orthonormal maka:

$$\|w_{t+1}\| = (\gamma_{t+1,t+1} - \sum_{k=1}^{t} (d_{t+1,k})^2)^{1/2}$$

$$\|w_{t+1}\| = \sigma_{t+1} = (\gamma_{t+1,t+1} - \sum_{k=1}^{t} (d_{t+1,k})^2)^{1/2} \qquad (2.27)$$

Jika didefinisikan:

$$v_{t+1} = \frac{w_{t+1}}{\sigma_{t+1}} \qquad (2.28)$$

maka dengan persamaan (2.18), (2.22), (2.27) dan (2.28), nilai dari v_{t+1} dapat ditulis sebagai berikut:

$$v_{t+1} = \frac{1}{\sigma_t}\left(u_{t+1} - \sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{k=j}^{t} d_{t+1,k} p_{k,j}\right) u_j\right) \qquad (2.29)$$

sehingga dari persamaan terakhir ini dapat ditentukan nilai $p_{t+1,j}$ yaitu:

$$p_{t+1,j} = \frac{1}{\sigma_{t+1}} \text{ jika } j = t+1 \qquad (2.30)$$

$$p_{t+1,j} = -\frac{1}{\sigma_{t+1}} \sum_{k=j}^{t} d_{t+1,k} p_{k,j} \text{ , jika } j < t+1 \qquad (2.31)$$

dengan menetapkan p_{11} sebagai nilai awal, maka untuk mencari nilai $p_{t,j}$ yang lainnya dapat menggunakan persamaan diatas.