BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. HIMPUNAN

a). <u>Pengertian Himpunan</u>

Himpunan adalah sekelompok obyek-obyek yang berada dalam satu kesatuan. Obyek - obyek ini disebut elemen-elemen atau anggota - anggota dari himpunan.

Notasii : Suatu himpunan dilambangkan dengan huruf besar, misalnya : A, B, C,....

b). <u>Himpunan Semesta</u>

Himpunan semesta adalah suatu himpunan dari mana himpunan lainnya dibentuk.

Notasi : Himpunan Semesta dilambangkan dengan huruf besar. Biasanya memakai huruf S atau X.

c). <u>Himpunan Bagian</u>

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika setiap unsur himpunan A juga merupakan unsur himpunan B.

Notasi : $A \subset B$ ⟶ dibaca A himpunan bagian B

$A \not\subset B$ ⟶ dibaca A bukan himpunan bagian B.

Secara matematis ditulis :

Jika $A \subset B$, maka untuk setiap $x \in A$ berlaku

$x \in B$. Sebaliknya jika $x \in B$ belum tentu berlaku $x \in A$.

d). Himpunan Kosong

Himpunan kosong himpunan yang tidak mempunyai unsur sama sekali, diberi notasin: $\emptyset$

e). Irisan (Interseksi)

Irisan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang unsur-unsurnya terdiri dari unsur-unsur himpunan A yang sekaligus merupakan unsur-unsur dari himpunan B.

Dinyatakan dengan notasi : $A \cap B$

Secara matematis ditulis :

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$$

f). Gabungan (union)

Gabungan himpunan A dengan himpunan B adalah himpunan yang unsur-unsurnya terdiri dari semua unsur himpunan A saja atau unsur himpunan B saja atau semua unsur di himpunan A dan B, diberi notasi : $A \cup B$

Secara matematis ditulis :

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$

g). Himpunan Komplemen

Jika A suatu himpunan dan X adalah himpunan semestanya, maka himpunan komplemen A adalah himpunan yang unsur-unsurnya merupakan himpunan X tetapi bukan merupakan unsur himpunan A, diberi notasi : A^c

Secara matematis ditulis :

$A^c = \{ x \mid x \in X , x \notin A \}$

h). Selisih

Selisih himpunan A dengan himpunan B adalah himpunan yang unsur - unsurnya adalah himpunan A dan bukan unsur-unsur himpunan B.

Notasi : A - B ⟶ dibaca himpunan A kurang himpunan B . Secara matematis ditulis :

$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \}$

i). Himpunan Terpisah (saling asing)

Himpunan A dan himpunan B dikatakan saling asing jika hanya jika irisan himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan kosong.

Secara matematik ditulis :

Himpunan A dan himpunan B dikatakan saling asing jika dan hanya jika $A \cap B = \emptyset$.

j). Hukum-hukum

1). Jika diketahui X suatu himpunan semesta X dan $A \subset X$, maka :

a). $X - A = A^c$

b). $A \cap A^c = \emptyset$

c). $A \cup A^c = X$

2). Jika A dan B adalah himpunan bagian dari semesta X a). $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

b). $B^c \subseteq A^c \Rightarrow A \subseteq B$

c). $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ & $B \subseteq A$

k). <u>Himpunan Kuasa</u>

Diberikan suatu himpunan X, maka himpunan kuasa (power set) dari X adalah suatu keluarga yang elemen-elemennya berupa semua himpunan bagian dari X. Biasanya diberi notasi dengan 2^X

Contoh : X = { a,b,c }. Maka

$2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\{,b,c\}, X\}$.

Catatan 1

a). Apabila himpunan index I adalah kosong yaitu $I = \emptyset$, maka $\cap_i X_i = X$ dimana X = Semesta.

Bukti :

Diberikan $x \in \cap_i X_i$ dengan $i \in I = \{1,2...\}$ yang berarti bahwa $x \in (X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap ...)$.

Selanjutnya $x \in \cap_i X_i$ bhb $(\forall_i \in I)$. $x \in X_i$

bhb $(\forall_i \in I)$. $i \in I \Longrightarrow x \in X_i$

Ambil x sebarang, i sebarang, $I = \emptyset$

$x \in \cap_i X_i$ bhb $\underbrace{i \in I = \emptyset}_{\text{bernilai benar}} \longrightarrow x \in X_i$

Pernyataan tersebut bernilai benar untuk setiap x dari semesta X karena antesedennya adalah salah. ($\emptyset$ tidak punya anggota).

Sehingga untuk setiap x berlakulah $x \in \cap_i X_i$

yaitu $\cap_i X_i = X$.

Jadi $\cap_i X_i = X$ jika $i \in I = \emptyset$.

b). Demikian juga apabila himpunan index I adalah kosong yaitu $I = \emptyset$ maka $U_i X_i = \emptyset$

Bukti :

Diberikan $x \in U_i X_i$ dengan $i \in I = \{1,2,3...\}$ yang berarti bahwa $x \in (X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup ...\}$ selanjutnya $x \in U_i X_i$ bhb $(\exists_i)$. $i \in I$ & $x \in X_i$. Ambil x sebarang.

Suatu $i \in I = \emptyset$.

$$x \in U_i X_i \quad \text{bhb} \quad \underbrace{(\exists_i).\ i \in \emptyset \ \&\ x \in X_i}_{\text{berarti salah}}$$

Pernyataan tersebut bernilai salah karena $\emptyset$ tidak mempunyai anggota sehingga setiap x berlakulah $x \notin U_i X_i$ yaitu $U_i X_i = \emptyset$.

Jadi $U_i X_i = \emptyset$ jika $i \in I = \emptyset$.

2.1. RUANG TOPOLOGI

2.2.1. Definisi Ruang Topologi

Ditentukan X himpunan sebarang dan $X \neq \emptyset$, terdiri atas elemen-elemen yang tidak didefinisikan (undefined elements). Selanjutnya suatu kelas $\mathcal{T}$ yang anggota-anggotanya merupakan himpunan-himpunan bagian dari X ($\mathcal{T} \subseteq 2^X$ dimana 2^X adalah keluarga dari semua himpunan bagian dari X) disebut TOPOLOGI jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut :

1). $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

2). Apabila $G_i \in \mathcal{T}$ untuk setiap $i \in I$ dimana I suatu himpunan index yang berhingga atau tak berhingga, maka $\cup_i G_i \in \mathcal{T}$
Dengan kata lain,
Setiap gabungan (finite atau unfinite) dari anggota $\mathcal{T}$ menghasilkan anggota $\mathcal{T}$.

3). Apabila $G_i \in \mathcal{T}$ untuk setiap $i \in I$ dimana I suatu himpunan index yang disyaratkan berhingga, maka $\cap_i G_i \in \mathcal{T}$
Dengan kata lain,
Setiap irisan (disyaratkan finite) dari anggota $\mathcal{T}$ menghasilkan anggota $\mathcal{T}$.

Anggota - anggota dari X disebut titik sedangkan anggota dari $\mathcal{T}$ disebut himpunan terbuka (open set). Pasangan ($X,\mathcal{T}$) disebut Ruang Topologi. Juga dikatakan bahwa X dilengkapi dengan topologi $\mathcal{T}$.

Contoh 2.2.1.1.

Misalkan X = { a,b,c} maka

$2^X = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\}, \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X \}$

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset,\{b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

$\mathcal{T}_2 = \{ \emptyset , \{a,b,c\} \}$

$\mathcal{T}_3 = 2^X$

Adalah suatu topologi untuk X, sebab semua aksioma-aksioma dari topologi telah dipenuhi.

Contoh 2.2.1.2.

Misalkan X = {a,b,c} maka

$\mathcal{T}_1 = \{ \{a\},\{a,b\},X \}$ bukan topoloi pada X, sebab $\emptyset \notin \mathcal{T}$

$\mathcal{T}_2 = \{ \emptyset, \{a\},\{c\},\{a,b\},X \}$ bukan topologi pada X, sebab gabungan dari dua anggota $\mathcal{T}_2$ yaitu $\{a\} \cup \{c\} = \{a,c\}$ bukan anggota $\mathcal{T}_2$ sehingga aksioma 2) tidak dipenuhi.

$\mathcal{T}_3 = \{ \emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X \}$ bukan topologi pada X, sebab irisan dari dua anggota $\mathcal{T}_3$ yaitu $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$ bukan anggota $\mathcal{T}_3$ sehingga aksioma 3) tidak dipenuhi.

Contoh 2.2.1.3.

Jika X suatu himpunan sebarang yang tidak kosong sedangkan $\mathcal{T} = \{ \emptyset,X\}$. Klas $\mathcal{T} = \{\emptyset,X\}$ hanya memuat Ø dan X, maka aksioma 1),2),3) dipenuhi sehingga merupakan topologi pada X. Topologi ini disebut topologi Indiskrit dan disebut juga topologi terkecil. Pasangan $(X,\mathcal{T})$ disebut Ruang topologi Indiskrit atau Ruang Indiskrit.

Pada contoh 2.2.1.1. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a,b,c\}\}$ adalah topologi Indiskrit pada X.

Contoh 2.2.1.4.

Jika $\mathcal{D}$ menunjukkan klas dari semua himpunan-himpunan bagian dari X yang tidak kosong. Maka $\mathcal{D}$ memenuhi aksioma-aksioma untuk topologi pada X. topologi ini disebut topologi diskrit dan pasangan $(X,\mathcal{D})$ disebut Ruang Topologi Diskrit atau Ruang Diskrit.

Pada contoh 2.2.1.1. $\mathcal{T}_3 = 2^X$ adalah topologi Diskrit pada X.

Contoh 2.2.1.5.

Diambil X = R himpunan bilangan Riil. Sedangkan $\mathcal{U}$ didefinisikan demikian.

Himpunan G adalah terbuka (yaitu $G \in \mathcal{U}$) jika hanya jika $G = \emptyset$ atau apabila $x \in G$ maka ada suatu interval terbuka yang memuat x dan termuat dalam G.

Jelas bahwa semua aksioma terpenuhi. Himpunan terbuka dalam topologi ini adalah interval terbuka dan gabungan dari interval terbuka. Umpama,

$G_1 = \{x \mid a < x < b\}$;

$G_2 = \{x \mid a < x < b\} \cup \{x \mid c < x < d\}$;

$G_3 = \{x \mid x < a\}$; $G_4 = \{x \mid x > b\}$;dan sebagainya.

Sebaliknya $\{x \mid a \leq x < b\}$ dan $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ maupun Singleton {a}, {b} dan sebagainya bukan himpunan terbuka. $\mathcal{U}$ adalah suatu topologi pada dan disebut topologi usual atau topologi biasa pada R. Sedangkan pasangan $(R,\mathcal{U})$ disebut Ruang topologi usual (biasa) atau Ruang usual (biasa).

Contoh 2.2.1.6.

Diambil X himpunan sebarang, sedangkan

$\mathcal{T} = \{G \subseteq X \mid G = \emptyset \ .\vee.\ G^c \text{ finite}\}$

$\mathcal{T}$ adalah topologi pada X dan disebut topologi Cofinite. Sedangkan pasangan $(X,\mathcal{T})$ disebut Ruang topologi cofinite atau Ruang Cofinite.

2.2.2. HIMPUNAN TERTUTUP (CLOSED SET)

Definisi 1.

Misal $(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang topologi.

Maka suatu himpunan $F \subseteq X$ dikatakan tertutup jika dan hanya jika dapat ditemukan himpunan terbuka G sedemikian sehingga $F = G^c$.

Contoh 2.2.2.1.

Misal $X = \{a,b,c\}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$

$\mathcal{T}$ adalah topologi pada X, maka himpunan $\emptyset$, {a},{b}, {a,b}, X adalah himpunan terbuka dalam

$(X,\mathcal{T})$. Maka himpunan tertutup ditentukan dengan mengambil komplemennya himpunan terbuka yaitu $X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}, \emptyset$.

Contoh 2.2.2.2.

Dalam topologi diskrit $\mathcal{D} = 2^X$ setiap himpunan $A \subseteq X$ adalah sekaligus terbuka dan tertutup.

Contoh 2.2.2.3.

Dalam topologi Indiskrit $\mathcal{T} = \{ \emptyset, X \}$ maka himpunan $A \subset X$ dengan $A \neq \emptyset$ dan $A \neq X$ adalah himpunan yang tidak terbuka dan tidak tertutup.

Contoh 2.2.2.4.

Pada topologi Usual dari bilangan Riil Himpunan $\{ x | x < a \}$ dan $\{x | x > b \}$ adalah terbuka. Sedangkan komplemen - komplemennya yaitu $\{ x|x \geq a \}$ dan $\{ x | x \leq b \}$ adalah tertutup. Begitu pula suatu singleton umpama $\{c\}$ adalah himpunan tertutup karena merupakan irisan dari himpunan tertutup $\{ x | x \leq c \}$ dan $\{ x | x \geq c \}$

2.2.3. PENUTUP HIMPUNAN (CLOSURE)

Definisi 2.

Misalkan $(X,\mathcal{T})$ adalah Ruang Topologi dan $A \subset X$. Maka penutup A yang diberi notasi " $\overline{A}$ " adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A.

Dengan simbolis ditulis ,

$\overline{A} = \cap \{ F \subseteq X \mid A \subseteq F$ dan F tertutup $\}$

Contoh 2.2.3.1.

Diambil $X = \{ a,b,c\}$

$\mathcal{T} = \{ \emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X \}$

(i) Misal $A = \{a\}$, tentukan $\overline{A}$

Penyelesaian

Untuk mencari penutup A atau $\overline{A}$ terlebih dulu ditentukan himpunan tertutup dari topologi di atas .

Himpunan tertutupnya adalah X, {b,c},{a,c} {c},∅

Maka $\overline{A} = X \cap \{a,c\}$

$= \{a,c\}$

(ii) Misal $B = \{b,c\}$. maka

$\overline{B} = X \cap \{b,c\}$

$= \{b,c\}$

(iii) Misal $C = \{a,b\}$, maka

$\overline{C} = X$

TEOREMA 1

Jika A dan B adalah sebarang dua himpunan bagian pada Ruang topologi ($X,\mathcal{T}$) maka berlaku :

a). $\overline{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A, $A \subseteq \overline{A}$

b). A tertutup $\Longleftrightarrow \overline{A} = A$

c). $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Bukti

a) Karena $\overline{A}$ adalah interseksi dari himpunan tertutup maka $\overline{A}$ adalah tertutup. Misal $\{ F_i\}_{i\in I}$ adalah koleksi semua himpunan tertutup pada X sehingga $F_i \supseteq A$ maka $\overline{A} = \bigcap_{i\in I} F_i$ karena $\overline{A}$ tertutup dan $\overline{A} \supseteq A$ maka terdapat index k. Sehingga $\overline{A} = F_k$. Misalkan F_k adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A maka $\overline{A} = \bigcap_{i\in I} F_i \subseteq F_k \ldots\oplus$ karena F_k adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A maka $F_k \subseteq F_i$, $\forall_i$ sehingga $F_k \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i = \overline{A} ..\oplus\oplus$ Sehingga menurut $\oplus$ dan $\oplus\oplus$ $F_k = \overline{A}$ Jadi $\overline{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A.

b). ($\Longrightarrow$)

Karena A tertutup maka himpunan tertutup terkecil yang memuat A adalah A sendiri. Sehingga $\overline{A} = A$.

($\Longleftarrow$)

Karena $\overline{A}$ tertutup maka A juga tertutup.

c) Ambil $\{ F_i\}_{i\in I}$ sebagai koleksi himpunan tertutup pada X. Sedemikian sehingga $F_i \supseteq A$ dan $A \subseteq B$. Karena $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$ dan $\overline{B}$ adalah tertutup maka $\overline{B} = F_k$ untuk suatu indek k. Oleh karena itu

$\overline{A} = \bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_k = \overline{B}$. Jadi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

TEOREMA 2

Titik x berada dalam closure A $\Longleftrightarrow$ setiap himpunan terbuka yang memuat x memotong A.

Dengan notasi simbolis :

$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow (\forall G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A \neq \emptyset$

Bukti :

$(\Longrightarrow)$

Jika $x \in \overline{A}$ akan dibuktikan

$(\forall G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A \neq \emptyset$.

Diambil $x \in \overline{A}$, ada dua kemungkinan :

(i). Jika $x \in A$ maka dengan sendirinya

$(\forall G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A \neq \emptyset$

(ii). Jika $x \notin A$.

Andaikan $(\exists G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A = \emptyset$ maka $A \subseteq (G_x)^c$ dan $(G_x)^c$ adalah tertutup. Bila dipandang $(G_x)^c \cap \overline{A} = F$. Maka F adalah himpunan tertutup yang memuat A, tetapi F tidak memuat x karena $(G_x)^c$ tidak memuat x. Karena $x \notin F$ tetapi $x \in \overline{A}$ maka $F \subset \overline{A}$. Sehingga dapat ditemukan himpunan tertutup F yang memuat A dan lebih kecil dari $\overline{A}$. Timbul kontradiksi karena $\overline{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A.

Pengandaian harus diingkar.

Jadi $x \in \overline{A} \Longrightarrow (\forall G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A \neq \emptyset$

$(\Longleftarrow)$

Akan ditunjukkan bahwa $(\forall G_x \in \mathcal{T}).$

$G_x \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow x \in \overline{A}$

Dibuktikan dengan kontraposisi, yaitu

$x \notin \overline{A} \Longrightarrow (\exists G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A = \emptyset$

Apabila $x \notin \overline{A}$ maka $x \in (\overline{A})^c$ sehingga dapat ditemukan himpunan terbuka yang memuat x yaitu $(\overline{A})^c$ dan $(\overline{A})^c \cap \overline{A} = \emptyset$. Karena $A \subseteq \overline{A}$ maka $(\overline{A})^c \cap A = \emptyset$.

Dengan demikian dapat ditemukan himpunan terbuka G_x yang memuat x sedemikian sehingga $G_x \cap A = \emptyset$.

Jadi $x \notin \overline{A} \Longrightarrow (\exists\, G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A = \emptyset$

Dengan demikian telah terbukti bahwa

$x \in \overline{A} \Longrightarrow (\forall\, G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A \neq \emptyset$

<u>Contoh 2.2.3.2.</u>

$(X, \mathcal{T})$ ruang topologi

Misal $X = \{a,b,c,d,e\}$

$\mathcal{T} = (\emptyset, \{a\}.\{c,d\}, \{a,c,d\},$
$\{b,c,d,e\}, X\}$

$A = \{b\}$

(i). Apakah $b \in \overline{A}$?

Penyelesaian :

Himpunan terbuka yang memuat b (diberi simbolG_b) ialah $\{b,c,d,e\}$, X, Kemudian

$G_b \cap A = \{b,c,d,e\} \cap \{b\} = \{b\} \neq \emptyset$

$G_b \cap A = X \cap \{b\} = \{b\} \neq \emptyset$

Jadi $b \in \overline{A}$

(ii). Apakah $a \in \overline{A}$?

Penyelesaian :

Himpunan terbuka yang memuat a (diberi simbol G_a) ialah {a},{a,c,d}, . Kemudian

$G_a \cap A = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

$G_a \cap A = \{a,c,d\} \cap \{b\} = \emptyset$

$G_a \cap A = X \cap \{b\} = \{b\} \neq \emptyset$

Karena $(\exists G \in \mathcal{T}).\ G_a \cap A = \emptyset$

maka $a \notin \overline{A}$

2.2.4. TITIK LIMIT (LIMIT POINT)

Definisi 3

Titik x disebut titik limit (limit point) dari himpunan A dari suatu ruang topologi ($X,\mathcal{T}$) jhj setiap himpunan terbuka yang memuat x memuat suatu titik dari A yang berlainan dengan x.

Dengan simbolis :

x titik limit dari

$A \Longleftrightarrow (\forall G_x \in \mathcal{T}).\ G_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ dimana G_x adalah himpunan terbuka yang memuat x

Himpunan dari semua titik limit A dinamakan derived set dari A yang diberi notasi "A^d".

Contoh 2.2.4.1.

Diberikan $X = \{ a,b,c,d,e \}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$

Misal $A = \{a,b\}$

Tentukan A^d

Penyelesaian

Untuk titik a

G_a : $\{a\}$, $\{a,c,d\}$, X

Maka $G_a \cap A - \{a\} = \{a\} \cap \{a,b\} - \{a\} = \emptyset$

$G_a \cap A - \{a\} = \{a,c,d\} \cap \{a,b\} - \{a\} = \emptyset$

$G_a \cap A - \{a\} = X \cap \{a,b\} - \{a\} = \{b\} \neq \emptyset$

Karena $(\exists\, G_a \in \mathcal{T}).\ G_a \cap A - \{a\} = \emptyset$ maka a bukan titik limit dari A

Misal $B = \{a,c,d\}$

Untuk titik c

G_c : $\{c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d,e\}$, X

Maka

$G_c \cap B - \{c\} = \{c,d\} \cap \{a,c,d\} - \{c\} = \{d\} \neq \emptyset$

$G_c \cap B - \{c\} = \{a,c,d\}\cap\{a,c,d\} - \{c\} = \{a,d\} \neq \emptyset$

$G_c \cap B - \{c\} = \{b,c,d,e\}\cap\{a,c,d\} - \{c\} = \{d\} \neq \emptyset$

$G_c \cap B - \{c\} = X \cap \{a,c,d\} - \{c\} = \{a,d\} \neq \emptyset$

Karena $(\forall\, G_c \in \mathcal{T}).\ G_c \cap B - \{c\} \neq \emptyset$ maka c adalah titik limit dari B.

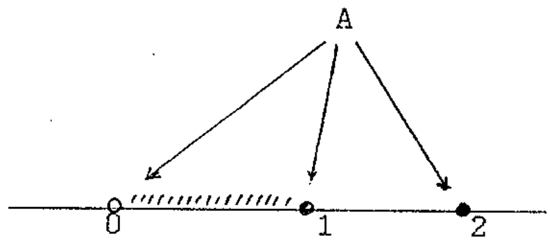
Contoh 2.2.4.2.

Pandang usual topologi dari bilangan riil dan himpunan $A = \{ 0 < x \leq 1 \} \cup \{2\}$

Tentukan A^d

Penyelesaian :

Bila digambar



Titik 0 adalah titik limit dari A yang terletak di luar A. Titik - titik di dalam interval $\{ x | 0 < x \leq 1 \}$ merupakan titik limit dari A. Sedangkan titik 2 bukan titik limit dari A karena $G_2 \cap A - \{2\} = \emptyset$

2.2.5. <u>PERSEKITARAN (NEIGBOURHOOD)</u>

<u>Definisi 4</u>

$(X,\mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

V suatu himpunan bagian dari X merupakan perkitaran dari titik $p \in X$ jika hanya jika terdapat suatu $G \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga

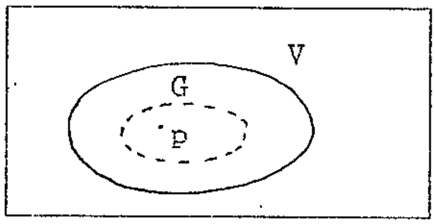
$p \in G \leq V$

di mana G adalah himpunan terbuka.

Selanjutnya kelas dari semua persekitaran dari $p \in X$ dinotasikan "$\mathcal{N}_{(p)}$ disebut system persekitaran .

Suatu persekitaran dari suatu titik tidak perlu himpunan terbuka. Tetapi setiap himpunan terbuka adalah persekitaran dari setiap titik-titiknya.

$(X,\mathcal{T})$

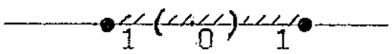


Contoh 2.2.5.1.

Misal ($R,\mathcal{U}$) adalahh Ruang topologi, maka

- Interval $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ merupakan persekitaran dari 0

  sebab :

  terdapat interval terbuka $\{ x \mid -1 < x < 1 \}$ sedemikian sehingga

  $0 \in \{ x \mid -1 < x < 1 \} \subset \{x \mid -1 \leq x \leq 1 \}$

- Interval $\{ x \mid 0 < x \leq 1 \}$ bukan persekitaran dari 0, sebab 0 tidak termuat dalam interval tersebut.

<u>Contoh 2.2.5.2.</u>

Ditentukan $\mathcal{T} = \{ \emptyset, X, \{a,b\}, \{a,c,d), \{a,b,c,d\},$
$\{a,b,e\}, \{a\}\}$

Merupakan topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$

Tentukan : (i) $\mathcal{N}(c)$

(ii) $\mathcal{N}(e)$

Penyelesaian.

(i) Himpunan terbuka yang memuat c

G_c : {a,c,d}, {a,b,c,d}, X

Himpunan bagian X yang memuat {a,c,d} ialah

{a,c,d}, {a,c,d,e},{a,b,c,d}, X

Himpunan bagian X yang memuat { a,b,c,d } ialah {a,b,c,d},X

Himpunan bagian X yang memuat X adalah X sendiri.Jadi

$\mathcal{N}_{(c)}$ = {{a,c,d},{a,b,c,d},{a,c,d,e}, X}

(ii) Himpunan terbuka yang memuat e.

G_e : {a,b,e}, X

Himpunan bagian X yang memuat {a,b,e} ialah {a,b,e}, {a,b,c,e}, {a,b,d,e}, X

Himpunan bagian X yang memuat X adalah X sendiri

Jadi $\mathcal{N}_{(e)}$= {{a,b,e},{a,b,c,e},{a,b,d,e}, X }

<u>TEOREMA 3</u>

$(X,\mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

Diambil $A \subseteq X$.

Suatu himpunan A adalah terbuka jika hanya jika A merupakan persekitaran dari setiap titik - titik di dalamnya. Dengan simbolis , A terbuka $\Longleftrightarrow (\forall\ x \in A)(\exists\ G_x \in \mathcal{T}).\ x \in G \subseteq A$

Bukti :

(⟹)

Jika A terbuka akan dibuktikan bahwa A merupakan persekitaran dari setiap titik di dalamnya.

Diambil A terbuka dan sebarang titik $x \in A$. Karena $A \subseteq A$ diambil himpunan terbuka $Gx = A$ sedemikian sehingga $x \in A \subseteq A$. Menurut definisi 4 maka A merupakan persekitaran dari sebarang titik x.

(⟸)

Jika A merupakan persekitaran dari setiap titik di dalamnya akan dibuktikan bahwa A terbuka.

Untuk setiap $x \in A$ terdapat persekitaran V sedemikian sehingga $V \subseteq A$. Menurut definisi 4 maka terdapat himpunan terbuka G_x sedemikian sehingga $x \in G_x \subseteq V$.

Diambil $G = \cup \{ G_x : x \in A \}$. Akan ditunjukkan bahwa $G = A$.

(i). Jika $x \in A$ maka terdapat himpunan terbuka $x \in G_x$ sehingga, $x \in \cup \{ G_x : x \in A \} = G$. Dari sini diperoleh $A \subseteq G$.

(ii). Jika $x \in G$ maka $x \in G_x$ untuk $x \in A$. Akan tetapi $x \in G_x \subseteq V \subseteq A$ sehingga $G \subseteq A$.

Karena (i) dan (ii) maka diperoleh $G = A$.

Karena union dari semua himpunan terbuka adalah terbuka maka G terbuka, akibatnya A juga terbuka.

2.2.6. BASIS DAN SUBBASIS

Definisi 5

Diberikan $(X,\mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

$\mathcal{B}$ adalah klas yang anggotanya himpunan bagian - himpunan bagian dari X. Suatu koleksi $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ disebut basis untuk topologi $\mathcal{T}$ jika dan hanya jika,

(i). Setiap himpunan terbuka $G \in \mathcal{T}$ merupakan gabungan (union) dari anggota-anggota $\mathcal{B}$. Atau $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$ jika dan hanya jika .

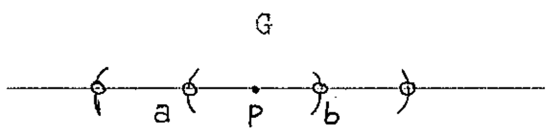
(ii). Untuk setiap titik $x \in G$ dimana $G \in \mathcal{T}$ terdapat $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga, $x \in B_x \in G$

Contoh 2.2.6.1.

$\mathcal{U}$ adalah usual topologi pada R.

Inteval terbuka-interval terbuka membentuk basis dari $\mathcal{U}$.

Bukti :



Untuk setiap $G \in \mathcal{U}$ dengan $p \in G$ tentu terdapat interval terbuka $(a,b) \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga

$p \in (a,b) \subset G$. Sehingga,

$\mathcal{B} = \{ \{a,b\} | a,b \in R,\ a < b\}$ adalah basis dari usual topologi $\mathcal{U}$.

Contoh 2.2.6.2.

Diberikan

$$X = \{ a,b,c,d \}$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}\}$$

$$\mathcal{B} = \{\{b\}, \{c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}\}$$

Apakah B merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$?

Penyelesaian :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ terpenuhi dengan sendirinya karena $\cup_i B_i = \emptyset$ untuk $i \in I = \emptyset$
- $\{b\} \cup \{c\} = \{b,c\} \in \mathcal{T}$
- $\{b\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\} \in \mathcal{T}$
- $\{c\} \cup \{b,c,d\} = \{b,c,d\} \in \mathcal{T}$

Maka $\mathcal{B}$ merupakan basis untuk topologi $\mathcal{T}$

Definisi 6

$(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

S adalah klas himpunan bagian-himpunan bagian dari X yang terbuka. $S \subset \mathcal{T}$ merupakan subbasis dari topologi pada X jika dan hanya jika untuk setiap anggota $\mathcal{T}$ adalahgabungan dari irisan berhingga dari anggota-anggota S dengan kata lain S merupakan subbasis untuk topologi $\mathcal{T}$ jika dan hanya jika irisan dari sejumlah berhingga anggota-anggota S merupakan basis dari $\mathcal{T}$.

Contoh 2.2.6.3.

Diberikan

$X = \{a,b,c,d,e\}$

$S = \{X,\{a,b,c,d\},\{a,c,d\},\{a,d\},\{d,e\},\{c\}\}$

Maka,

$\mathcal{B} = \{X,\{a,b,c,d\},\{a,c,d\},\{a,d\},\{d,e\},\{c\},\{d\},\emptyset \}$

Sehingga $\mathcal{T} = \{X,\{a,b,c,d\},\{a,c,d\},\{a,d\},\{d,e\},$
$\{c\}.\{d\},\emptyset \{a,c,d,e\},\{a,d,e\},\{c,d\},\{c,d,e\} \}$

2.2.7. SUBSPACE (RUANG BAGIAN)

Definisi 7

Diambil $(X,\mathcal{T})$ sebagai ruang topologi dan $\emptyset \neq A \subset X$, dibentuk $\mathcal{T}_A$ sebagai klas dari semua irisan (interseksi) A dengan himpunan bagian dari X yang terbuka atau :

$\mathcal{T}_A = \{ A \cap G \mid G \in \mathcal{T} \}$

Maka $\mathcal{T}_A$ merupakan topologi pada A.

$\mathcal{T}_A$ disebut relatif topologi pada A, dan $(A,\mathcal{T}_A)$ disebut subspace dari $(X,\mathcal{T})$. Atau dengan kata lain $H \subseteq A$.

H merupakan himpunan bagian terbuka pada $(A,\mathcal{T}_A)$ jika dan hanya jika ada himpunan terbuka $G \subseteq X$ pada $(X,\mathcal{T})$ sedemikian hingga $H = G \cap A$.

Contoh 2.2.7.1.

Ditentukan

$\mathcal{T} = \{ X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,,d,e\}\}$ suatu topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$

Ambil $A = \{b,c,d\} \subset X$

Maka untuk $G = X \Rightarrow X \cap \{b,c,d\} = \{b,c,d\}$

$G = \emptyset \Rightarrow \emptyset \cap \{b,c,d\} = \emptyset$

$G = \{c,d\} \Rightarrow \{c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\}$

$G = \{a,c,d\} \Rightarrow \{a,c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\}$

$G = \{b,c,d,e\} \Rightarrow \{b,c,d,e\} \cap \{b,c,d\}$

$= \{b,c,d\}$

$G = \{a\} \Rightarrow \{a\} \cap \{b,c,d\} = \emptyset$

Sehingga $\mathcal{T}_A = \{ \emptyset, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$ merupakan topologi pada A dan disebut relatif topologi pada A.

2.2.8 <u>PRODUCT SPACE (RUANG PERGANDAAN)</u>

1) PRODUCT CARTESIUS (PERGANDAAN KARTESIUS)

<u>DEFINISI 8</u>

Product (pergandaan) Kartesius dari himpunan X_1 dan X_2 ditulis $X_1 \times X_2$ adalah keluarga dari semua pasangan titik berurutan (x_1, x_2) dengan $x_1 \in X_1$ dan $x_2 \in X_2$.

<u>Contoh 2.2.8.1</u>

Diberikan $\mathcal{T}_1 = \{ \emptyset, X_1, \{a\}, \{b,c\}\}$ merupakan topologi pada $X_1 = \{a,b,c\}$ dan $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X_2, \{u\}\}$ adalah topologi pada $X_2 = \{u,v\}$.

Maka $X_1 \times X_2 = \{ (a,u), (a,v), (b,u), (b,v), (c,u), (c,v)\}$. Untuk mencari topologi penggandaan dari ruang topologi ($X_1, \mathcal{T}_1$) dan ruang topologi ($X_2, \mathcal{T}_2$) dijelaskan sebagai berikut :

2) PRODUCT SPACE (PERGANDAAN RUANG)

Diambil $\{X_i : i \in I)$ sebagai klas dari himpunan-himpunan. Diambil X sebagai pergandaan Kartesius dari himpunan-himpunan tersebut, yaitu $X = \prod_i X_i$. Selanjutnya X memuat semua titik $x = (x_i : i \in I)$ dimana $x_i \in X_i$. Untuk setiap $i \in I$ didefinisikan proyeksi yang diberi simbol " π_i "sebagai berikut :

$\pi_i : X \longrightarrow X_i$ dengan

$\pi_i (x) = x(i)$, $\forall x \in X$ dan $\forall i \in I$

Jika diberikan himpunan dari semua himpunan bagian dari X yang berbentuk $\pi_i (U_i)$ $\forall i \in I$ dan $U_i \in \mathcal{T}_i$

maka ; $\pi_i^{-1}(U_i) = \prod_{i \in I} A_i$

Dimana $A_i = U_i$ jika $i = k$

$A_i = X_i$ jika $i \neq k$

DEFINISI 9

($X_i, \mathcal{T}_i$) adalah ruang topologi $\forall i \in I$ dan $X = \prod_i X_i$, $\forall i \in I$.

Maka $S = \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i , \forall i \in I \}$ disebut subbasis untuk topologi $\mathcal{T}$ pada X.

Contoh 2.2.8.2.

Diberikan $\mathcal{T}_1 = \{ \emptyset, X_1, \{a\}, \{b,c\} \}$ merupakan topologi pada

$X_1 = \{a,b,c\}$ dan $\mathcal{T}_2 = \{\ \emptyset,\ X_2, \{u\}\ \}$ adalah topologi pada $X_2 = \{\ u,v\ \}$

Telah didapat $X = \prod_{i=1}^{2} X_i = \{(a,u),(a,v),(b,u),$
$(b,v),(c,u),(c,v)\}$

$S = \{\ \pi_1^{-1}\ (\emptyset),\ \pi_1^{-1}\ (X_1), \pi_1^{-1}\ (\{a\}), \pi_1^{-1}\ (\{b,c\}),$
$\pi_2^{-1}\ (\emptyset), \pi_2^{-1}\ (X_2),\ \pi_1^{-1}(\{u\})\}$

Dimana :

$\pi_1^{-1}\ (\emptyset) = \emptyset$

$\pi_1^{-1}\ (X_1) = X_1 \times X_2$

$\pi_1^{-1}\ (\{a\}) = \{(a,u),(a,v)\}$

$\pi_1^{-1}\ (\{b,c\}) = \{\ (b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\ \}$

$\pi_2^{-2}\ (\emptyset) = \emptyset$

$\pi_2^{-2}\ (\{u\}) = \{\ (a,u),(b,v),(c,u)\ \}$

$\pi_2^{-2}\ (X_2) = X_1 \times X_2$

Sehingga $S = \{\ \emptyset, X_1 \times X_2, \{(a,u),(a,v)\}, \{(b,u),$
$(b,v),(c,u),(c,v)\}, \{\ (a,u),(b,u),(c,u)\}\ \}$

Basis $\mathcal{B}$ untuk $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ ialah

$\{\ \emptyset,\ X_1 \times X_2,\ \{(a,u),(a,v)\}, \{(b,u),(b,v),(c,u),$
$(c,v)\}, \{(a,u),(b,u),(c,u)\}, \{(a,u)\}, \{(b,u),(c,u)\}\}.$

Jadi $\mathcal{T} = \{\ \emptyset,\ X_1 \times X_2,\ \{(a,u),\ (a,v)\}\ ,\ \{\ (b,u),$
$(b,v),(c,u),(c,v)\}, \{(a,u),(b,u),(c,u)\ \}, \{(a,u)\},$
$\{(b,u),(c,u)\ \}, \{(a,u),(a,v),(b,u),(c,u)\},$
$\{(a,u),(b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\}\ \}$

$\mathcal{T}$ disebut topologi pergandaan dari ruang topologi ($X_1, \mathcal{T}_1$) dan ruang topologi ($X_2, \mathcal{T}_2$).

2.3 AXIOMA SEPARASI (PEMISAHAN)

2.3.1 RUANG T_1

DEFINISI 10

Suatu ruang topologi ($X,\mathcal{T}$) dikatakan ruang T_1 jika hanya jika untuk setiap pasang titik $x,y \in X$ dengan $x \neq y$ terdapat himpunan terbuka G dan H sedemikian sehingga $x \in G$, $y \notin G$ dan $y \in H$, $x \notin H$.

Dengan notasi simbolik ditulis

($X,\mathcal{T}$) adalah ruang T1 $\Longleftrightarrow$

($\forall x,y \in X$, $x \neq y$) ($\exists G,H \in \mathcal{T}$). $x \in G$, $y \notin G$ dan $y \in H$, $x \notin H$.

Contoh 2.3.1.1

Diberikan topologi diskrit dengan $X = \{a,b,c\}$

Maka $\mathcal{D} = 2^X = \{ \emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\}, \{b,c\},X \}$

Akan diselidiki apakah ($X,\mathcal{D}$) merupakan ruang T_1.

(i) Diambil $a,b \in X$, maka

Himpunan terbuka yang memuat a

G_a : $\{a\},\{a,b\},\{a,c\}$, X

Himpunan terbuka yang memuat b

G_b : $\{b\},\{a,b\},\{b,c\}$, X

Untuk $G_a = \{a\}$ dan $G_b = \{b\}$ berlaku,

$a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$ dan $b \in \{b\}$, $a \notin \{b\}$

disini terlihat bahwa $G_a \cap G_b = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

(ii) Diambil $a, c \in X$

Himpunan terbuka yang memuat a

G_a : $\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X$

Himpunan terbuka yang memuat c

G_c : $\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X$

Untuk $G_a = \{a,b\}$ dan $G_c = \{b,c\}$ berlaku,

$a \in \{a,b\}$, $c \notin \{a,b\}$ dan $c \in \{b,c\}$, $a \notin \{b,c\}$

disini terlihat bahwa

$$\begin{aligned} G_a \cap G_c &= \{a,b\} \cap \{b,c\} \\ &= \{b\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

(iii) Diambil $b, c \in X$

Himpunan terbuka yang memuat b

G_b : $\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X$

Himpunan terbuka yang memuat c

G_c : $\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X$

Untuk $G_b = \{a,b\}$ dan $G_c = \{a,c\}$ berlaku,

$b \in \{a,b\}$, $c \notin \{a,b\}$ dan $c \in \{a,c\}$, $b \notin \{a,c\}$

Karena $(\forall x, y \in X, x \neq y)$ $(\exists G, H \in \mathcal{T})$

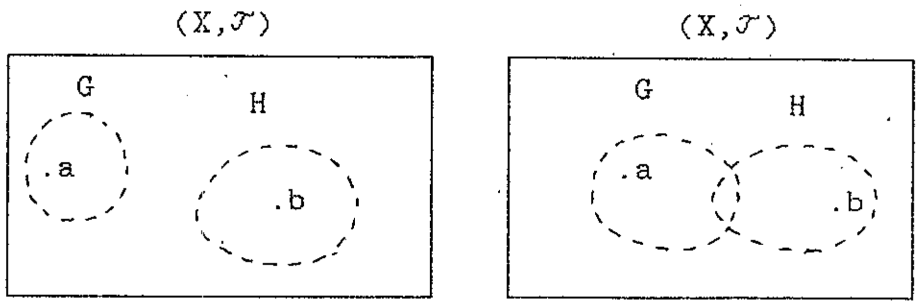
$x \in G$, $y \notin G$ dan $y \in H$, $x \notin H$

Maka $(X, \mathcal{D})$ adalah ruang T_1.

<u>CATATAN 2</u>

Dari contoh 2.3.1.1 di atas diperoleh kesimpulan bahwa himpunan terbuka G dan H tidak perlu saling asing.

Gambar :



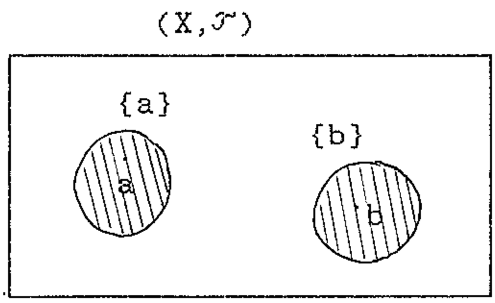
<u>TEOREMA 4</u>

(X,$\mathcal{T}$) ruang topologi

Dikatakan ruang T_1 jika dan hanya jika setiap singleton (himpunan dengan satu anggota) yang merupakan himpunan bagian dari X adalah himpunan tertutup. Dengan notasi simbolik ditulis :

(X,$\mathcal{T}$) ruang T_1 $\Longleftrightarrow$ {p} tertutup , $\forall P \in X$

Gambar :



Bukti :($\Longrightarrow$)

Diambil (X,$\mathcal{T}$) sebagai ruang T1, dan titik sebarang $a \in X$.

Menurut definisi dari ruang T_1, jika $b \in X$ dan $b \neq a$ maka terdapat himpunan terbuka Gb yang memuat b tetapi tidak memuat a atau : $b \in Gb$, $a \notin Gb$. Sehingga $b \in Gb \subseteq \{a\}^c$.

Akan tetapi $a^c = \cup \{ b : b \neq a \} \subseteq \cup \{Gb : b \neq a\} \subseteq \{a\}^c$. Sehingga $\{a\}^c$ merupakan union dari himpunan-himppunan terbuka. Dengan sendirinya $\{a\}^c$ himpunan terbuka. Dengan demikian $\{a\}$ adalah himpunan tertutup untuk setiap $a \in X$

(<==)

Diambil $a \in X$, $b \in X$ dengan $a \neq b$. Karena setiap singleton adalah tertutup, maka $\{a\}^c$ adalah suatu himpunan terbuka memuat b tetapi tidak memuat a atau $b \in \{a\}^c$, $a \notin \{a\}^c$. Dilain pihak, $\{b\}^c$ juga merupakan himpunan terbuka yang memuat a tetapi tidak memuat b atau $a \in \{b\}^c$ $b \notin \{b\}^c$. Karena memenuhi definisi ruang T_1, maka, $(X,\mathcal{T})$ merupakan ruang T_1.

<u>Contoh 2.3.1.2</u>

Diambil $X = \{a,b\}$ dan topologi

$$\mathcal{T} = \{ X , \emptyset , \{a\}\}$$

Akan diselidiki apakah $(X,\mathcal{T})$ merupakan ruang T_1 Dengan menggunakan teorema 4 kita cari himpunan tertutup dari topologi di atas, dengan cara mengkomplemenkam. Maka $\emptyset, X, \{b\}$ merupakan himpunan tertutup. Terlihat singleton $\{b\}$ tertutup, akan tetapi singleton $\{a\}$ terbuka .Karena ada singleton $\subset X$ yang tidak tertutup maka bukan ruang T_1.

Contoh 2.3.1.3

Diambil topologi diskrit dengan

$X = \{a,b,c\}$

$\mathcal{D} = \{ \emptyset, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X \}$

Dengan menggunakan teorema 4 kita cari himpunan tertutup dari topologi diskrit di atas.

Maka X, {b,c}, {a,c}, {a,b}, {c}, {b}, {a}, $\emptyset$ merupakan himpunan tertutup. Ternyata singleton {a} tertutup, singleton {b} tertutup dan singleton {c} juga tertutup . Karena untuk setiap singleton $\{a\} \subset X$, $\{b\} \subset X$ dan $\{c\} \subset X$ adalah tertutup, maka menurut teorema 4 ($X,\mathcal{D}$) merupakan ruang T_1.

TEOREMA 5.

Subspace dari ruang T_1 adalah ruang T_1.

Bukti :

Diambil ($X,\mathcal{T}$) sebagai ruang T_1 dan ($Y,\mathcal{T}_Y$) sebagai subspace dari ($X,\mathcal{T}$). Akan ditunjukkan bahwa setiap singleton $\{p\} \subseteq Y$ adalah himpunan tertutup dari $\mathcal{T}_Y$,atau $Y - \{p\}$adalah himpunan terbuka $\mathcal{T}_Y$. Karena ($X,\mathcal{T}$) adalah ruang T_1 menurut teorema 4, setiap singleton adalah tertutup, sehingga $X - \{p\}$ adalah terbuka terhadap $\mathcal{T}$.

Tetapi $p \in Y \subset X \Rightarrow Y \cap (X-\{p\}) = Y \cap X \cap \{p\}^c$

$= Y \cap \{p\}^c$

$= Y - \{p\}$

Menurut definisi subspace 7 karena setiap himpunan terbuka $\{p\}^c \subseteq X$ berinterseksi dengan Y maka $Y - \{p\}$ adalah himpunan terbuka terhadap $\mathcal{T}_Y$ Sehingga singleton $\{p\}$ adalah tertutup untuk setiap $p \in Y$ .Menurut teorema 4 maka (Y,T_Y) juga merupakan ruang T_1.

Contoh 2.3.1.4

Jika diberikan :

$X = \{a,b,c\}$

$\mathcal{D} = \{ \emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X \}$

Maka $(X,\mathcal{D})$ telah dibuktikan merupkan ruang T_1.

Jika $Y = \{a,b\} \subset X$. akan diselidiki apakah $(Y,\mathcal{D})$ juga merupakan ruang T_1.

- Sebelumnya dicari dulu $\mathcal{D}_Y$ yaitu klas dari semua interseksi Y dengan himpunan X yang terbuka.

$\emptyset \cap Y = \emptyset$

$\{a\} \cap Y = \{a\}$

$\{b\} \cap Y = \{b\}$

$\{c\} \cap Y = \emptyset$

$\{a,b\} \cap Y = \{a,b\}$ Jadi $\mathcal{D} = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\{a,c\} \cap Y = \{a\}$

$\{b,c\} \cap Y = \{b\}$

$X \cap Y = \{a,b\}$

- Himpunan tertutup terhadap topologi $\mathcal{D}_Y$ yaitu:
  X, {b},{a},∅

Ternyata {a} ⊂ Y merupakan singleton yang tertutup, begitu pula singleton {b} ⊂ Y juga tertutup. Menurut teorema 4. Karena setiap singleton ⊂ Y merupakan himpunan tertutup. Maka (Y,$\mathcal{D}$) juga merupakan ruang T_1.

2.3.2. RUANG T_2 (HAUSDORFF)

DEFINISI 11

Suatu ruang topologi (X,$\mathcal{T}$) disebut ruang Hausdorff jhj memenuhi axioma separasi Hausdorff yaitu :

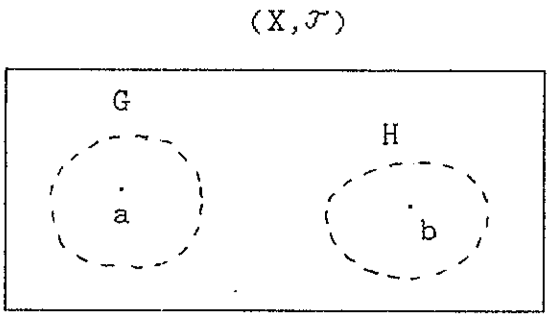
Setiap pasang titik yang berbeda x,y ∈ X dengan x ≠ y maka terdapat open set(himpunan terbuka) G dan H sedemikian sehingga x ∈ G , y ∈ H dan G ∩ H = ∅ .Dengan simbolis,

$$(X,\mathcal{T}) \text{ ruang Hausdorff} \Leftrightarrow$$

$$(\forall x,y \in X \;,\; x \neq y)(\exists G,H \in \mathcal{T})$$

$$x \in G \;,\; y \in H \;\&\; G \cap H = \emptyset$$

Gambar :



Contoh 2.3.2.1

Jika diambil (X,$\mathcal{D}$) sebagai ruang diskrit dengan : X = {a,b,c}, maka

$\mathcal{D} = 2^X = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X \}$

Akan diselidiki apakah (X,$\mathcal{D}$) merupakan ruang Hausdorff.

Penyelesaian :

(i) Untuk a,b $\in$ X

Himpunan terbuka yang memuat a

Ga : {a},{a,b},{a,c},X

Himpunan terbuka yang memuat b

Gb : {b},{a,b},{b,c},X

Jika diambil Ga = {a} dan Gb = {b} maka

$a \in \{a\}$, $b \in \{b\}$ sehingga $Ga \cap Gb = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

(ii) Untuk a,c $\in$ X

Himpunan terbuka yang memuat a

Ga : {a},{a,b},{a,c},X

Himpunan terbuka yang memuat c

Gc : {c},{a,c},{b,c},X

Jika diambil Ga = {a} dan Gc = {c} maka

$a \in \{a\}$, $c \in \{c\}$ sehingga $Ga \cap Gc = \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$

(iii) Untuk $b, c \in X$

Himpunan terbuka yang memuat b

Gb : {b},{a,b},{b,c},X

Himpunan terbuka yang memuat c

Gc : {c},{a,c},{b,c},X

Jika diambil Gc = {b} dan Gc = {c} maka

$b \in \{b\}$, $c \in \{c\}$ sehingga $Gb \cap Gc = \{b\} \cap \{c\} = \emptyset$

Karena $(\forall x, y \in X\ ,\ x \neq y)(\exists G, H \in \mathcal{D})$. $x \in G$, $y \in H$ dan $G \cap H = \emptyset$ maka ($X, \mathcal{D}$) merupakan ruang Hausdorff.

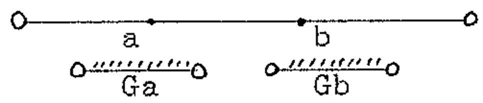
<u>Contoh 2.3.2.2</u>

Diambil X = R himpunan bilangan riil dan $\mathcal{U}$ sebagai topologi usual. Tunjukkan bahwa ($R, \mathcal{U}$) merupakan ruang Hausdorff.

Penyelesaian :

Menurut definisi dari usual topologi maka himpunan terbukanya berupa interval terbuka. Jika diambil sebarang $p \in R$ maka dapat ditemukan himpunan terbuka yang memuat p. Sehingga untuk setiap titik $a, b \in R$ dengan $a \neq b$ pasti dapat ditemukan interval terbuka Ga yang memuat a dan interval terbuka Gb yang memuat b sedemikian hingga $a \in Ga, b \in Gb$ dan $Ga \cap Gb = \emptyset$

Gambar :



Jadi (R,$\mathcal{U}$) merupakan ruang Hausdorff

<u>TEOREMA 6</u>

Setiap ruang T_2 (Hausdorff) adalah ruang T_1. Tetapi sebaliknya belum tentu.

Bukti :

Diambil sebarang (X,$\mathcal{T}$) ruang Hausdorff. Menurut definisi 11 maka untuk setiap a,b $\in$ X dengan a $\neq$ b terdapat G dan H dengan G $\cap$ H = $\emptyset$ sedemikian sehingga a $\in$ G dan b $\in$ H. Akibatnya untuk setiap a $\in$ G maka a $\notin$ H begitu juga untuk setiap b $\in$ H maka b $\notin$ G. Karena (X,$\mathcal{T}$) juga memenuhi definisi ruang T_1 maka terbukti bahwa (X,$\mathcal{T}$) adalah ruang T_1.

<u>Contoh 2.3.2.3</u>.

Berdasarkan contoh 2.3.1.1 dan contoh 2.3.2.1 menunjukkan bahwa karena topologi diskrit merupakan ruang Hausdorff maka terbukti merupakan ruang T_1.

<u>CATATAN 3</u>

Akibat teorema 6, maka setiap ingleton di dalam ruang T_2 (Hausdorff) adalah tertutup.

<u>Contoh 2.3.2.4</u>

Diambil X = R dan $\mathcal{T}$ sebagai topologi cofinite.

Akan diperlihatkan bahwa ($X,\mathcal{T}$) merupakan ruang T_1 tetapi bukan ruang Hausdorff.

Berdasarkan contoh 2.2.1.6 maka $\mathcal{T}$ terdiri dari himpunan kosong dan semua himpunan bagian dari R yang komplemennya adalah finite. Akan ditunjukkan bahwa ($R,\mathcal{T}$) merupakan ruang T_1. Untuk setiap $p \in R$ maka $X - \{p\} = \{p\}^c$ adalah infinite, karena $\{p\}$ adalah finite. Menurut definisi dari cofinite topologi maka $\{p\}^c$ terbuka. Sehingga $\{p\}$ tertutup $\forall p \in R$. Terbukti bahwa ($X,\mathcal{T}$) adalah ruang T_1.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ($R,\mathcal{T}$) bukan ruang Hausdorff. Diambil G dan H himpunan terbuka yang tak kosong. Menurut definisi dari cofinite topologi maka G^c dan H^c adalah finite. Sehingga G dan H adalah infinite. Diandaikan $G \cap H = \emptyset$ maka $G \subset \{H\}^c$ finite. Padahal diketahui G infinite. Terjadi kontradiksi. Sehingga Tak mungkin ditemukan himpunan terbuka G dan H yang saling asing. Jadi $G \cap H \neq \emptyset$. Sehingga ($X,\mathcal{T}$) bukan ruang Hausdorff.

<u>TEOREMA 7</u>

Subspace dari ruang Hausdorff (ruang T_2) adalah ruang Hausdorff (ruang T_2).

Bukti :

Diambil ($X,\mathcal{T}$) sebagai ruang Hausdorff dan

($Y,\mathcal{T}_Y$) sebagai subspace dari ($X,\mathcal{T}$). Selanjutnya ambil titik $a,b \in Y \subset X$ dengan $a \neq b$ Karena ($X,\mathcal{T}$) adalah ruang Hausdorff maka ($\exists G,H \in \mathcal{T}$). $a \in G$, $b \in H$ dan $G \cap H = \emptyset$ .Berdasarkan definisi dari subspace maka $Y \cap G$ dan $Y \cap H$. adalah himpunan terbuka $\mathcal{T}_Y$.

$a \in G$, $a \in Y \Rightarrow a \in Y \cap G$

$b \in H$, $b \in Y \Rightarrow b \in Y \cap H$

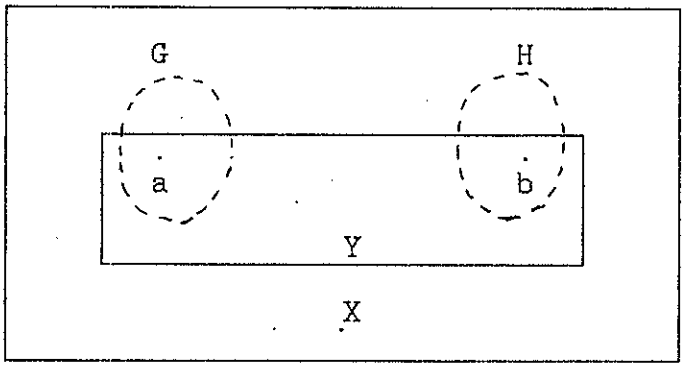
$G \cap H = \emptyset \Rightarrow (Y \cap G)(Y \cap H)$

$= Y \cap (G \cap H) = Y \cap \emptyset = \emptyset$

Karena ($Y \cap G$) dan ($Y \cap H$)adalah himpunan terbuka. $\mathcal{T}_Y$ yang saling asing maka ($Y,\mathcal{T}_Y$) adalah ruang Hausdorff

Gambar :

($X,\mathcal{T}$)



Contoh 2.3.2.5

Diberikan topologi diskrit dengan $X = \{a,b,c\}$ maka $\mathcal{D} = \{ \emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X \}$ Pada contoh 2.3.2.1 telah dibuktikan bahwa ($X,\mathcal{D}$) merupakan ruang Hausdorff.

Jika diambil $Y = \{b,c\} \subset X$

Akan diselidiki bahwa ($Y, \mathscr{D}_Y$) merupakan ruang Hausdorff.

Langkah-langkah

- Mencari $\mathscr{D}_Y$ dengan menginterseksikan Y dengan semua himpunan bagian dari X yang terbuka

$$\emptyset \cap \{b,c\} = \emptyset$$
$$\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$$
$$\{b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$$
$$\{c\} \cap \{b,c\} = \{c\}$$
$$\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$$
$$\{a,c\} \cap \{b,c\} = \{c\}$$
$$\{b,c\} \cap \{b,c\} = \{b,c\}$$
$$X \cap \{b,c\} = \{b,c\}$$

Jadi $\mathscr{D}_Y = \{ \emptyset, \{b\}, \{c\}, Y \}$

- Diambil titik $b, c \in Y$

Himpunan terbuka yang memuat b

G_b : $\{b\}, Y$

Himpunan terbuka yang memuat c

G_c : $\{c\}, Y$

Jika diambil $G_b = \{b\}$ dan $G_c = \{c\}$ maka berlaku

$b \in \{b\}$, $c \in \{c\}$

sehingga $G_b \cap G_c = \{b\} \cap \{c\}$

$= \emptyset$

Jadi ($Y, \mathscr{D}_Y$) merupakan ruang Hausdorff.

TEOREMA 8

Pergandaan dari ruang T_2 (Hausdorff) adalah Hausdorff.

Bukti :

Misal $\{ X_\alpha \}$ sebagai keluarga dari Ruang Hausdorff.

Kemudian diambil $a = (a_\alpha)$ dan $b = (b_\alpha)$ sebagai titik yang berbeda dari ruang pergandaan $\prod X_\alpha$.

Karena $a \neq b$ maka terdapat index β sedemikian sehingga $a_\beta \neq b_\beta$. Mengingat X_β adalah Hausdorff, terdapat himpunan terbuka G yang memuat a_β dan himpunan terbuka H yang memuat b_β sedemikian sehingga $G \cap H = \emptyset$.

Maka π^{-1}_β (G) adalah himpunan terbuka yang memuat a dan π^{-1}_β (H) adalah himpunan terbuka yang memuat b yang keduanya saling asing di $\prod X_\alpha$

Jadi $\prod X_\alpha$ merupakan ruang Hausdorff.

Contoh 2.3.1.6

Diberikan $X_1 = \{a\}$, $\mathcal{T}_1 = \{ \emptyset, X_1 \}$

$X_2 = \{a,b\}$, $\mathcal{T}_2 = \{ \emptyset,\{a\},\{b\}, X_2 \}$

(i) $(X_1,\mathcal{T}_1)$ dan $(X_2,\mathcal{T}_2)$ merupakan topologi diskrit.

Pada contoh 2.3.2.1 telah dibuktikan bahwa $(X_1,\mathcal{T}_1)$ dan $(X_2,\mathcal{T}_2)$ merupakan ruang T_2 (Hausdorff).

(ii) Akan ditunjukkan bahwa pergandaan dari ruang

Hausdorff ($X_1, \mathcal{T}_1$) dan ($X_2, \mathcal{T}_2$) merupakan ruang T_2 (Hausdorff).

* Mencari ($X, \mathcal{T}$)

- Mencari pergandaan Kartesius dari X_1 dan X_2.

$$X = \prod^{2} X_i$$

$$= \{(a,a),(a,b)\}$$

- Mencari subbasis S

$$S = \{ \pi_1^{-1}(\emptyset),\ \pi_1^{-1}(X_1),\ \pi_2^{-1}(\emptyset),\ \pi_2^{-1}(\{a\}),\ \pi_2^{-1}(\{b\}),\ \pi_2^{-1}(X_2)\}$$

Dimana :

$\pi_1^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$\pi_1^{-1}(X_1) = X_1 \times X_2$

$\pi_2^{-1}(\{a\}) = \{(a,a)\}$

$\pi_2^{-1}(\{b\}) = \{(a,b)\}$

$\pi_2^{-1}(X_2) = X_1 \times X_2$

Sehingga $S = \{\emptyset, \{(a,a)\},\{(a,b)\}, X_1 \times X_2 \}$

- Mencari $\mathcal{B}$

$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{(a,a)\},\{(a,b)\}, X_1 \times X_2 \}$

- Mencari $\mathcal{T}$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{(a,a)\},\{(a,b)\}, X_1 \times X_2 \}$

Membuktikan bahwa ($X, \mathcal{T}$) adalah Hausdorff

Diambil titik $(a,a) \in X$ dan $(a,b) \in X$

Himpunan terbuka yang memuat (a,a)

$G_{(a,a)}$: $\{(a,a)\}$, $X_1 \times X_2$

Himpunan terbuka yang memuat (a,b)

$G_{(a,b)}$: $\{(a,b)\}$, $X_1 \times X_2$

Jika diambil $G_{(a,a)} = \{(a,a)\}$ dan $G_{(a,b)} = \{(a,b)\}$

maka $(a,a) \in \{(a,a)\}$, $(a,b) \in \{(a,b)\}$

Sehingga $G_{(a,a)} \cap G_{(a,,b)} = \{(a,a)\} \cap \{(a,b)\}$

$$= \emptyset$$

Karena memenuhi definisi ruang Hausdorff maka (X ,$\mathcal{T}$) terbukti merupakan ruang Hausdorff.