

## BAB II

### DASAR TEORI

#### 2.1. Notasi dan Pengertian Dasar

Suatu pembahasan yang memuaskan tentang konsep-konsep pokok dalam analisis seperti kekonvergenan, kekontinuan, pendiferensialan, dan pengintegralan haruslah didasari definisi yang cermat tentang konsep bilangan. Diantara sistem bilangan yang paling sederhana adalah bilangan asli. Jika kita gabungkan negatifnya dan nol kita peroleh bilangan-bilangan bulat. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat disajikan sebagai  $\frac{a}{b}$  dengan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat dan  $b \neq 0$ . Sekumpulan bilangan rasional dan irrasional bersama-sama dengan negatifnya dan nol kita namakan bilangan real. Untuk mengenali kelas-kelas bilangan yang sejauh ini telah dibahas terdapat lambang-lambang baku yaitu  $N$  untuk himpunan bilangan asli,  $Z$  untuk himpunan bilangan bulat,  $Q$  untuk himpunan bilangan rasional, dan  $R$  untuk himpunan bilangan real.

Penulisan tentang himpunan pada umumnya digunakan notasi  $A, B, \dots, Z$ . Jika  $A$  sebarang himpunan dan elemen  $x$  adalah suatu anggota  $A$ , maka akan dituliskan  $x \in A$ . Jika  $x$  bukan anggota  $A$  dituliskan  $x \notin A$ . Himpunan yang tidak memuat satu elemen pun disebut himpunan kosong dan dinotasikan  $\emptyset$ . Himpunan dalam tulisan ini selalu dimaksudkan sebagai himpunan bagian dari himpunan bilangan real. Untuk  $a$

dan  $b$  bilangan real dengan  $a < b$  didefinisikan interval pada  $\mathbb{R}$  sebagai berikut  
 $[a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ ,  $[a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ ,  $(a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ ,  
 $(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ .

Himpunan  $E$  dikatakan mempunyai **supremum** jika terdapat suatu elemen  $b \in \mathbb{R}$ , sehingga untuk setiap  $x \in E$  berlaku  $x \leq b$  dan untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $x \in E$  sedemikian sehingga  $b - \varepsilon \leq x$ ,  $a \in \mathbb{R}$  disebut **infimum** dari himpunan  $E$  jika  $a \leq x$  dan untuk setiap  $\varepsilon > 0$  dan terdapat  $x \in E$  sedemikian sehingga  $x \leq a + \varepsilon$ . Himpunan  $E$  dikatakan terbatas jika terdapat bilangan  $M > 0$  sedemikian sehingga  $|x| \leq M$  untuk setiap  $x \in E$ .

Suatu fungsi  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan terbatas pada  $[a,b]$  jika ada suatu konstanta  $M$  sedemikian sehingga  $|f(x)| < M$  untuk semua  $x \in [a,b]$ .

## 2.2. Kekonvergenan Barisan Fungsi

Diberikan barisan fungsi  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  yang didefinisikan pada  $[a,b]$ ,  $f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  untuk setiap  $n$ . Barisan fungsi  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  dikatakan **konvergen** ke fungsi  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  pada  $[a,b]$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  dan setiap  $x \in [a,b]$  terdapat bilangan asli  $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$  sehingga  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  untuk setiap  $n \geq n_0$ . Barisan fungsi  $f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  yang konvergen ke fungsi  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  pada  $[a,b]$  dinyatakan dengan  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

Konvergensi ini dinamakan **konvergensi titik demi titik** pada  $[a,b]$ .

Barisan fungsi  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  dikatakan **konvergen seragam** ke  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pada  $[a, b]$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  sehingga  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  untuk setiap  $n \geq n_0$  dan setiap  $x \in [a, b]$ , ditulis dengan  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  seragam pada  $[a, b]$ .

### 2.3. Fungsi Kontinu

Diberikan  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $x_0 \in [a, b]$ . Fungsi  $f$  dikatakan **kontinu** di titik  $x_0$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap  $x \in [a, b]$  dan  $|x - x_0| < \delta$  berlaku  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

**Definisi 2.3.1.** (Bartle, 1982). *Diberikan  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , jika  $[c, d] \subseteq [a, b]$ , Fungsi  $f$  dikatakan kontinu pada  $[c, d]$  jika  $f$  kontinu di setiap titik pada  $[c, d]$ .*

**Teorema 2.3.2.** (Soemantri,R,1993). *Jika  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  barisan fungsi yang kontinu pada  $[a, b]$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  seragam pada  $[a, b]$  maka fungsi  $f$  kontinu pada  $[a, b]$ .*

Barisan fungsi  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  yang didefinisikan pada himpunan  $E$  dikatakan **ekuitkontinu** pada  $E$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga untuk  $|x - y| < \delta$  berlaku  $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$  untuk setiap  $n$ .

## 2.4. Derivatif

Diberikan  $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $x_0 \in [a,b]$ . Bilangan  $f'(x_0)$  disebut nilai derivatif dari  $f$  di  $x_0$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga untuk  $x \in [a,b]$  dan  $0 < |x - x_0| < \delta$  berlaku

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

**Teorema 2.4.1.**(Bartle,1982). *Jika  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  mempunyai derivatif di  $x_0 \in [a,b]$  maka  $f$  kontinu di  $x_0$ .*

**Teorema 2.4.2.**(Bartle,1982). *Diberikan  $f,g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi yang terdiferensial di  $x_0 \in [a,b]$ , maka*

a. *Jika  $\alpha \in \mathbb{R}$ , maka fungsi  $\alpha f$  terdiferensial di  $x_0$  dan*

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

b. *fungsi  $f+g$  terdiferensial di  $x_0$  dan*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

c. *fungsi  $fg$  terdiferensial di  $x_0$  dan*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

**Teorema 2.4.3.**(Bartle,1982). Diberikan  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , jika  $f'(x) \geq 0$  untuk setiap  $x \in [a,b]$  maka  $f$  naik monoton pada  $[a,b]$ .

**Teorema 2.4.4.**(Bartle,1982). Diberikan  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , jika  $f'(x)=0$  untuk setiap  $x \in [a,b]$  maka  $f$  adalah fungsi konstan.

## 2.5. Integral Riemann-Darboux

Pada pembicaraan mengenai integral Riemann fungsi-fungsi yang dimaksud adalah fungsi-fungsi yang terbatas pada  $[a,b]$ . Himpunan  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dikatakan partisi pada  $[a,b]$  jika  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Diberikan fungsi real dan terbatas yang didefinisikan pada selang tertutup  $[a,b]$ ,  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Untuk setiap partisi  $P$  pada  $[a,b]$  dibentuk jumlah atas

$$U = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

dan jumlah bawah

$$L = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

dengan  $M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$  dan  $m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$

Bilangan –bilangan

$$\int_a^b f(x) dx = \inf U(P,f) \text{ dan } \int_a^b f(x) dx = \sup L(P,f)$$

dengan infimum dan supremum diambil meliputi semua partisi  $P$  pada  $[a,b]$ , berturut-turut dinamakan integral atas Riemann dan integral bawah Riemann fungsi  $f$  pada  $[a,b]$ . Jika nilai integral atas dan integral bawah sama ,maka fungsi  $f$  dikatakan **terintegral Riemann pada  $[a,b]$** . Nilai yang sama ini dinamakan integral Riemann

fungsi  $f$  pada  $[a,b]$  dan ditulis  $R \int_a^b f(x)dx$ . Koleksi fungsi yang terintegral Riemann pada  $[a,b]$  ditulis dengan notasi  $R[a,b]$ .

$$\text{Jadi } \int_a^{-b} f(x)dx = \int_{-a}^b f(x)dx = R \int_a^b f(x)dx.$$

**Lemma 2.5.1.** (Bartle,1982). *Diberikan  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , jika  $f \in R[a,b]$  dan  $|f(x)| \leq K$  untuk setiap  $x \in [a,b]$ , maka*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq K(b-a).$$

**Teorema 2.5.2.** (Bartle,1982). *Jika  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  kontinu pada  $[a,b]$  maka  $f \in R[a,b]$ .*

**Teorema 2.5.3.**(Soemantri,R,1993). *Jika  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\} \in R[a,b]$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$*

*seragam pada  $[a,b]$  maka  $f \in R[a,b]$  dan  $R \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R \int_a^b f_n(x)dx$ .*