# BAB II

# PEMETAAN DAN RUANG METRIK

## 2.1 PEMETAAN (FUNGSI)

Diketahui X dan Y adalah himpunan-himpunan dan A merupakan himpunan bagian X ($A \subset X$)

Definisi 1

Suatu pemetaan (fungsi) $\mathcal{T}$ dari A into Y adalah suatu aturan yang pada setiap anggota dari A menentukan dengan tunggal satu anggota dalam Y.

Himpunan A dinamakan daerah sumber (domain) disajikan dengan $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ dan Y disebut daerah kawan (co-domain).

$$\mathcal{T} : A \longrightarrow Y$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) \longrightarrow Y$$

Apabila $x \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, maka kawannya (tunggal) $y \in Y$ disajikan dengan $\mathcal{T}x$ (ditulis $y = \mathcal{T}x$) dikatakan bahwa x dibawa ke $\mathcal{T}x$

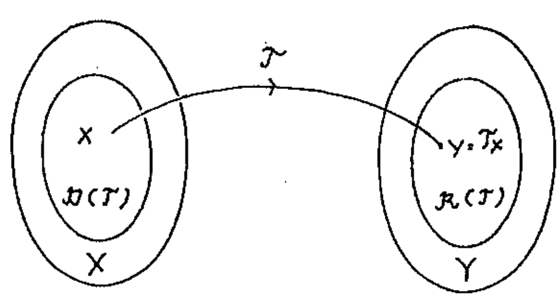
$$\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow \mathcal{T}x$$

Dan himpunan anggota-anggota dari Y yang mempunyai kawan dalam $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ disebut daerah hasil (range), disajikan dengan $\mathcal{R}(\mathcal{T})$.

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \{y \in Y \mid y = \mathcal{T}x \text{ untuk setiap } x \in \mathcal{D}(\mathcal{T})\}$$

Gambar / fig 1



Definisi 2

Jika setiap $y \in Y$ mempunyai kawan di dalam $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ atau dengan kata lain jika setiap $y \in Y$ berasal dari sesuatu $x \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ maka fungsi ini disebut fungsi A onto Y ( $A = \mathcal{D}(\mathcal{T})$ )

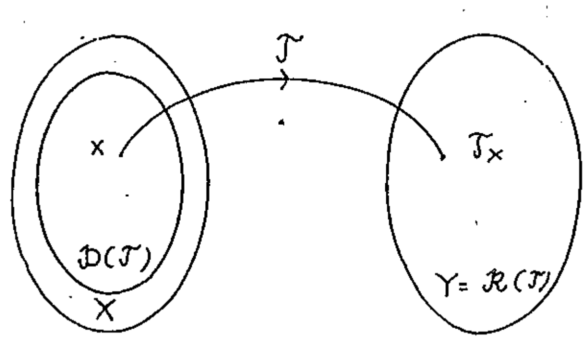
Sehingga berlaku $Y = \mathcal{R}(\mathcal{T})$ ( Daerah hasil (range) berhimpit dengan daerah kawan (co-domain))

Definisi 3

a. Pemetaan (fungsi) yang onto disebut juga pemetaan surjektif

$$\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{T})$$
$$x \longrightarrow \mathcal{T}x$$

Gambar / fig 2



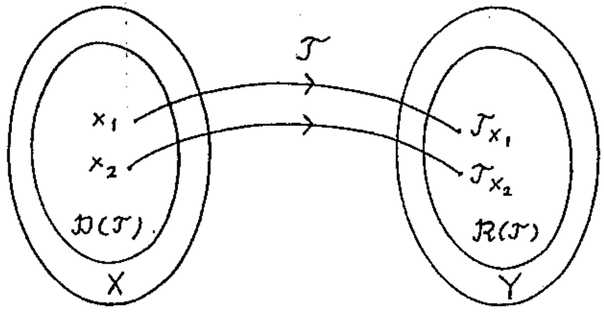

b. Pada pemetaan dengan sifat bahwa $y \in Y$ hanya mempunyai satu kawan saja dalam $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ disebut fungsi injektif.

Sehingga pada suatu fungsi injektif untuk setiap pasangan $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ berlaku :

$\mathcal{T}x_1 = \mathcal{T}x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$, dengan kontraposisi

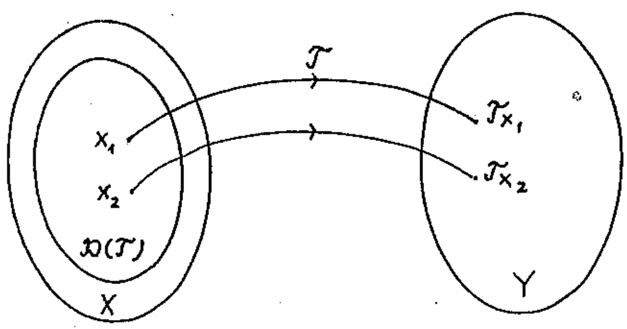
$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \mathcal{T}x_1 \neq \mathcal{T}x_2$

Gambar / fig 3




c. Apabila setiap anggota dari $\mathcal{D}$ ($\mathcal{T}$) menentukan dengan tunggal satu anggota dari Y dan sebaliknya atau dapat dikatakan bahwa pemetaan ini merupakan pemetaan (fungsi) injektif sekaligus surjektif disebut dengan pemetaan bijektif.

Gambar / fig 4




2.1.1 PEMETAAN (FUNGSI) INVERS

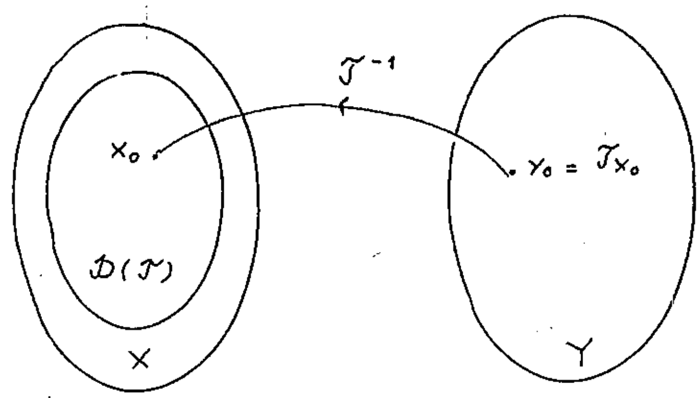
Definisi 4

Fungsi invers ( $\mathcal{T}^{-1}$) dan suatu $y_o \in Y$ adalah himpunan dari semua $x \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{T}$) sedemikian sehingga $\mathcal{T}x = y_o$

Definisi 5

$\mathcal{T}$ adalah bijektif maka fungsi invers ($\mathcal{T}^{-1}$) dari $\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \longrightarrow Y$ merupakan fungsi $\mathcal{T}^{-1} : Y \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{T})$ didefinisikan dengan $\mathcal{T}x_o \longrightarrow x_o$ menunjukkan bahwa $\mathcal{T}^{-1}$ adalah perkawanan setiap $y_o \in Y$ dengan $x_o \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ yang mana $\mathcal{T}x_o = y_o$

Gambar / fig 5




2.1.2 PEMETAAN (FUNGSI) KHUSUS

Definisi 6

Suatu fungsi bijektif $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ yang membawa setiap $x \in X$ ke dirinya sendiri disebut fungsi identitas.

$x \longrightarrow \mathcal{T}x = x$

Definisi 6a

Kernel (ruang nol) dari $\mathcal{T}$ adalah himpunan dari semua $x \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ sedemikian sehingga $x \longrightarrow \mathcal{T}x = 0$.

Definisi 7

Hasil ganda Cartesius (Cartesian product) $X \times Y$ dari dua himpunan X dan Y adalah himpunan semua pasangan-pasangan berurutan $(x,y)$ dengan x diambil dari X dan y diambil dari Y.

Jika setiap $(x,y) \in X \times Y$ dikawankan dengan $x \in X$ maka perkawanan ini memenuhi syarat-syarat suatu fungsi ( $X \times Y$ dihabiskan dan harga-harga fungsi (hasil) tunggal)

Fungsi atau pemetaan ini disebut proyeksi.

(Proyeksi adalah pemetaan (fungsi) surjektif tapi tidak bijektif karena $(x,y_1)$ dan $(x,y_2)$ kedua-duanya dibawa ke x ).

## 2.2 RUANG METRIK

Definisi 8

Jika X suatu himpunan yang tidak kosong. Dibentuk fungsi $d = X \times X \longrightarrow R$ dengan sifat untuk sembarang $x,y,z \in X$ berlaku :

1. $d(x,y) \geq 0$

   $d(x,y) > 0$ untuk $x \neq y$

   $d(x,y) = 0$ untuk $x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

dengan d disebut fungsi jarak atau metrik dari X. Maka pasangan (X,d) disebut ruang metrik.

Contoh 1

a. (R,d) dengan R adalah sistem bilangan riil dan metrik d dinamakan metrik biasa yang didefinisikan sebagai :

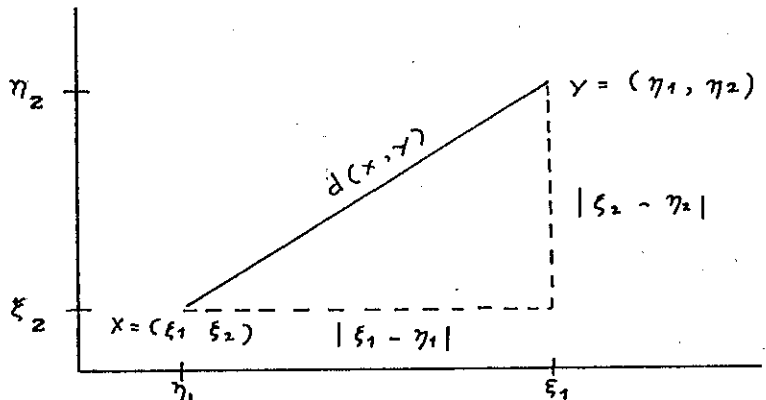
$$d(x,y) = |x-y| \qquad \forall\, x,y \in R$$

b. $(R^2,d)$ dengan $R^2$ dinamakan bidang Euclidean didapat jika kita mengambil pasangan-pasangan berurutan dari bilangan riil ditulis $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1 ; \eta_2)$, ...........

dan metrik Euclidean didefinisikan :

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}$$

Gambar / fig 6




c. sebagai perluasan contoh (b) dapat diambil metrik di ruang Euclidean dimensi k ( $R^k$) untuk :

$x = ( \xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n)$ dan $y = ( \eta_1, \eta_2, \ldots\ldots, \eta_n)$

dengan metrik d didefinisikan dengan :

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + \ldots\ldots\ldots + (\xi_n - \eta_n)^2}$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{n} ( \xi_i - \eta_i)^2 \right]^{1/2}$$

Sehingga ($R^k$, d) adalah ruang metrik.

d. Ruang fungsi C [a,b] = X = himpunan semua fungsi riil kontinue pada interval tertutup j = [a,b]

Metrik d didefinisikan $d(x,y) = \max_{t \in j} \{ |x(t)-y(t)| \}$

e. Ruang barisan s : ruang yang terdiri dari himpunan (terbatas atau tidak terbatas) barisan bilangan komplek.

Metrik d didefinisikan $d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|}$

dengan $x = (\xi_j)$ dan $y = (\eta_j)$

2.2.1 PERTIDAKSAMAAN SEGITIGA

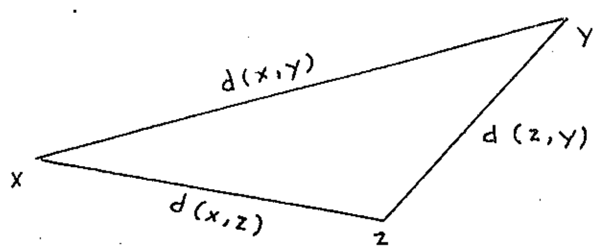
Definisi 9

(X,d) adalah ruang metrik , maka untuk sembarang $x,y,z \in X$ berlaku :

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

pertidaksamaan ini disebut dengan pertidaksamaan segitiga.

Gambar / fig 7




Dalam bentuk umum pertidaksamaan segitiga didefinisikan dengan :

$$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots\ldots + d(x_{n-1},x_n)$$

2.2.2 HIMPUNAN TERBUKA DAN TERTUTUP

Misal (X,d) suatu ruang metrik.

Definisi 10

Untuk sembarang $x \in X$ dan setiap $r > 0$ himpunan-himpunan :

a. $B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$ disebut bola terbuka.

b. $B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) \le r \}$ disebut bola tertutup.

Contoh 2

a. Diketahui ruang metrik ( R,d) dengan metrik

$$d(x,y) = |x-y|$$

$B(0,1) = \{ y \in R \mid -1 < y < 1 \}$ adalah bola terbuka dari titik 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik (R,d)

b. Diketahui ruang metrik (R,d) dengan metrik

$d(x,y) = |x-y|$

$B(0,1) = \{ y \in R \mid -1 \leq y \leq 1 \}$ adalah bola tertutup dari titik 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik (R,d)

c. Diketahui ruang metrik $(R^2,d)$ dengan metrik d didefinisikan $d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$ dan diketahui ada 2 titik pada ruang metrik tersebut

$B((x,y),r) = \{ (x,y) \mid d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} < r , (x,y) \in R^2 \}$

adalah bola terbuka dan suatu titik (x,y) dengan jari-jari r pada ruang metrik $(R^2,d)$

d. Dibentuk ruang metrik ( C [a,b],d) dengan :

C [a,b]= $\{ f \mid f = [a,b] \longrightarrow R$, f kontinue pada [a,b]} dan metriknya adalah :

$d(f,g) = \max \{ | f(x) - g(x) | \mid x \in [a,b] \}$

$B(f,\varepsilon) = \{ g \mid d(f,g) = \max\{ |f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b] < \varepsilon \}$

adalah bola terbuka dari fungsi f dengan jari-jari $\varepsilon$ pada ruang metrik ( C [a,b],d)

Definisi 11

A himpunan bagian dari ruang metrik (X,d).

Titik $x \in X$ disebut titik limit dari A jika setiap persekitaran dari x memuat suatu titik dari A yang berlainan dengan x atau :

titik $x \in X$ disebut titik limit dari A jika untuk setiap $r > 0$ , $B(x,r) \cap A - \{x\} \neq \phi$

Contoh 3

a. $A = \{ x \in R \mid 0 < x \leq 3 \}$, R himpunan bilangan riil maka :

titik 0 adalah titik limit dari A dan $0 \notin A$

titik 3 adalah titik limit dari A dan $3 \in A$

b. $A = \{ x \in N \mid 0 < x \leq 3 \}$ , N himpunan bilangan asli maka :

titik 0 adalah bukan titik limit

titik 1 adalah bukan titik limit

titik 3 adalah bukan titik limit

Himpunan semua titik limit dari A disebut Derived Set dari A dengan notasi $A^d$.

Definisi 12

Penutup dari himpunan A didefinisikan sebagai gabungan A dan $A^d$ dengan notasi $\bar{A}$ jadi $\bar{A} = A \cup A^d$

Contoh 4

Misal $d(x,y) = |x-y|$

a. $A = \{ x \in R \mid 0 < x < 3 \}$, jadi $\bar{A} = \{ x \in R \mid 0 \leq x \leq 3 \}$

b. Q = Himpunan bilangan rasional, jadi $\bar{Q} = R$.

Definisi 13

Himpunan A disebut tertutup jika setiap limit dari A adalah titik dari A.

Atau :

Himpunan A tertutup bila $A^d \subseteq A$

Contoh 5

Misal (R,d) ruang metrik dengan $d(x,y) = |x-y|$ dan R adalah sistem bilangan riil

a. $A = \{ x \in R \mid 0 \le x \le 3 \}$ adalah tertutup

b. $A = \{ \frac{1}{n} , n \in N \}$ adalah tidak tertutup dimana $N = 1,2,..........$

Theorema 1

Himpunan A tertutup jika hanya jika $\bar{A} = A$

Bukti :

( ========> )

Diketahui A tertutup

Dari definisi (13) $A^d \subseteq A$ berakibat $A^d \cup A \subseteq A \cup A$

Jadi $\bar{A} \subseteq A$, padahal $A \subseteq \bar{A}$ (definisi 12) maka $\bar{A} = A$

( <======== )

Diketahui $A = \bar{A}$, karena $\bar{A} = A \cup A^d$ (definisi 12) maka $A = A \cup A^d$ mengakibatkan $A^d \subseteq A$ maka menurut definisi (13) A tertutup.

### 2.2.3 KEKONVERGENAN DAN KELENGKAPAN

Definisi 14

a. Barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik (X,d) konvergen ke $x \in X$ ditulis $x_n \text{----}> x$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk $n > N$ , $d(x_n,x) < \varepsilon$ atau $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

b. Barisan $\{x_n\}$ adalah terbatas jika terdapat suatu bilangan riil $M > 0$, sedemikian sehingga $|x_n| \le M$, $\forall n \in M$

Catatan : Barisan $\{x_n\}$ yang tidak konvergen disebut divergen.

Contoh 6

a. $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ adalah barisan yang konvergen ke 0 dan terbatas karena $\forall \varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Maka jika $n > N$ didapat $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ sehingga $| x_n - 0 | < \varepsilon$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sembarang maka $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0$

b. $\{x_n\} = \left(\frac{1}{1 + na}\right)$ dengan $a > 0$, $a \in R$ adalah konvergen ke 0

Pandang $0 < \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na}$

Jika diberi $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga $\frac{1}{N} < a\varepsilon$

untuk $n > N$ didapat $0 < \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na} < \frac{1}{Na} < \varepsilon$

Sehingga $\left| \frac{1}{1 + na} - 0 \right| < \varepsilon$ untuk $n > N$

Jadi $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

c. Barisan $\{x_n\} = (-1)^n$ adalah barisan divergen dan terbatas.

d. Barisan $\{x_n\} = n$ adalah barisan yang tidak terbatas sehingga divergen ke $\infty$.

Theorema 2

Barisan konvergen di ruang metrik mempunyai limit tunggal.

Bukti :

Misal $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ dan $\lim_{n \to \infty} x_n = x_1$

Maka menurut definisi(14a)

jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang maka terdapatlah bilangan asli $N_1$ dan $N_2$ sedemikian sehingga :

untuk $n > N_1$ maka :

$$d(x_n,x) < \varepsilon/2$$

dan untuk $n > N_2$ maka :

$$d(x_n,x_1) < \varepsilon/2$$

Ambil $N = \max(N_1,N_2)$ maka untuk $n > N$ diperoleh

$d(x,x_1) \leq d(x_1,x_n) + d(x_n,x_1)$ (sesuai definisi 9)

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ sembarang maka diperoleh $d(x,x_1) = 0$ dan dari definisi (8) sifat 1

$$d(x,x_1) = 0 \Longrightarrow x = x_1$$

Jadi terbukti limit suatu barisan konvergen adalah tunggal.

Theorema 3

Bila $\{x_n\}$ barisan konvergen di ruang metrik maka barisan $\{x_n\}$ adalah terbatas.

Bukti :

$x_n \longrightarrow x$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapatlah bilanga asli N sehingga $d(x_n,x) < \varepsilon$ untuk $n > N$ (sesuai definisi 14a)

Ambil $\varepsilon = 1$ sehingga $d(x_n,x) < 1$

Misal $M = \max\{1,d(x_1,x),d(x_2,x),\ldots\ldots,d(x_n,x)\}$

maka jelas $d(x_n,x) < M$ untuk $n = 1,2,\ldots\ldots\ldots$

Jadi terbukti barisan $\{x_n\}$ terbatas (sesuai dengan definisi 14a)

Catatan :

Barisan yang terbatas belum tentu konvergen (lihat pada contoh 6b)

Theorema 4

$A$ himpunan bagian dari ruang metrik $(X,d)$ dan $\bar{A}$ adalah penutup dari himpunan $A$ maka :

a. $x \in \bar{A}$ jika hanya jika ada barisan $\{x_n\}$ di $A$ sedemikian hingga $x_n \text{-------->} x$

b. $A$ adalah himpunan tertutup jika hanya jika

$x_n \in A$.

$x_n \text{----------->} x \quad \text{======>} \quad x \in A$

Bukti :

a. ( ======> )

$x \in \bar{A}$ maka menurut theorema (1) $x \in A$

Jika $x \in A$ maka jelas ada barisan $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ di $A$ yang konvergen ke $x$.

Jika $x \notin A$ berarti $x$ adalah titik limit dari $A$, maka setiap bola terbuka $B(x, \frac{1}{n})$, $n=1,2,\ldots$ mengandung $x_n \in A$. Sehingga jelas $x_n \text{--->} x$ sebab $\frac{1}{n} \text{---->} 0$ untuk $n \to \infty$

( <====== )

Jika barisan $\{x_n\}$ di $A$ dan $x_n \text{----->} x$ maka menurut definisi (11) $x \in A$ atau setiap persekitaran dari $x$ mengandung $x_n \neq x$, jadi $x$ adalah titik limit dari $A$. Maka terbukti $x \in \bar{A}$ (sesuai definisi 12)

b. ( =======> )

Misal $A$ tertutup , $x_n \in A$ $(n=1,2,\ldots)$ dan $x_n \text{---->} x$ akan dibuktikan $x \in A$.

Jika $x_n = x$ untuk setiap $n$ yang cukup besar jelas

$x \in A$, jika $x_m \neq x_n \neq x$ untuk semua m,n cukup besar maka x adalah titik limit dari A dan karena A tertutup maka $x \in A$ ( sesuai definisi 13).

( <====== )

Misalkan $\{x_n\}$ barisan di A yang konvergen ke suatu titik $x \in A$ akan dibuktikan A tertutup.

Jika $x_m \neq x_n \neq x$ untuk semua m,n maka x adalah titik limit dari A. Jadi pernyataan tersebut berarti A mengandung setiap titik limitnya, yang berarti bahwa A tertutup.

Definisi 15

Barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik (X,d) disebut Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga :

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad , \text{ untuk } m,n > N$$

Contoh 7

a. Barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik (R,d) dengan $d(x_m,x_n) = |x_m - x_n|$ dan $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1,2,...$ adalah barisan Cauchy.

keterangan :

diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$ untuk $m,n > N$ dan untuk $n > N$ berlaku :

$$d(x_m,x_n) = |x_m - x_n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

b. Barisan $\{x_n\} = n^2, n = 1,2,....$ adalah bukan barisan Cauchy karena daerah jangkau (range) tidak terbatas dan tidak konvergen.

Theorema 5

Suatu barisan Cauchy $\{x_n\}$ di ruang metrik adalah terbatas.

Bukti :

Misal $\{x_n\}$ barisan Cauchy maka menurut definisi (15) untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ untuk $m,n > N$

ambil $\varepsilon = 1$ sehingga $d(x_m,x_n) < 1$

dan untuk $n \geq N$ maka :

$$d(x_m,x_n) = |x_m-x_n| \leq 1 \Longrightarrow |x_m| \leq |x_n| + 1$$

jika $M = \sup\{|x_1|,\ldots\ldots,|x_{n-1}|, |x_n| + 1\}$

maka $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$ maka menurut definisi (14b) terbukti barisan Cauchy adalah terbatas.

Theorema 6

Suatu barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik $(X,d)$ konvergen jika hanya jika barisan Cauchy.

Bukti :

( $\Longrightarrow$ )

Dibuktikan barisan $\{x_n\}$ konvergen di ruang metrik adalah barisan Cauchy.

Misal $x_n \longrightarrow x$ maka menurut definisi (14a) untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $d(x_n,x) < \varepsilon/2$ untuk $n > N$

Dengan pertidaksamaan segitiga (definisi 9) untuk $m,n > N$ didapat $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m)$

$$d(x_n,x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Jadi terbukti barisan $\{x_n\}$adalah barisan Cauchy (sesuai definisi 15)

( <====== )

Misal $\{x_n\}$ barisan Cauchy , ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah konvergen.

Dari theorema (5) dibuktikan bahwa barisan Cauchy adalah terbatas. Ambil sub barisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$ dan konvergen ke suatu titik $x^*$ maka kita tunjukkan $\{x_n\}$ konvergen ke $x^*$. Sejak $\{ x_n \}$ barisan Cauchy maka menurut definisi 15, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N, sedemikian sehingga untuk $m,n \geq N$ maka $d(x_n,x_m) < \varepsilon/2$.

Sejak $\{x_{n_k}\}$ konvergen ke $x^*$ maka menurut definisi (14a) untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk $k \geq N$, $d(x_k,x^*) < \varepsilon/2$.

Sejak $k \geq n$ dan dari $d(x_n,x_m) < \varepsilon/2$ dengan $m = k$ maka $d(x_m,x_k) < \varepsilon/2$ untuk $m \geq M$.

Jika $n \geq N$ dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga (definisi 9), maka

$$d(x_n,x^*) \leq d(x_n,x_k) + d(x_k,x^*)$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Jadi terbukti barisan $\{x_n\}$ adalah barisan konvergen, karena untuk $\varepsilon > 0$ sembarang maka $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ (sesuai definisi 14a).

Definisi 16

Ruang metrik $X = (X,d)$ disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen (mempunyai sebuah limit yang merupakan elemen dari X).

Contoh 8

a. Sistem bilangan riil dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$ adalah suatu metrik lengkap.

keterangan :

Misal $\{x_n\}$ dimana $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ dan $n=1,2,\ldots\ldots$ adalah barisan Cauchy. Maka menurut theorema (6), $\{x_n\}$ konvergen yaitu konvergen ke $1 \in R$, jadi terbukti $(R,d)$ adalah ruang metrik lengkap.

b. Ruang fungsi C [a,b] adalah lengkap, disini [a,b] adalah interval tertutup dalam R.

keterangan :

Misal $\{x_m\}$ adalah barisan Cauchy dalam C [a,b] makamenurut definisi(15) jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu N sedemikian sehingga untuk $m,n > N$, $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ dan menurut definisi (8) contoh (d), metrik d didefinisikan sebagai

$$d(x_m,x_n) = (\max_{t \in j} |x_m(t) - x_n(t)|) < \varepsilon \ldots\ldots\ldots(1)$$

dengan $j = [a,b]$

Dari sini untuk $t = t_o \in j$ maka :

$$|x_m(t_o) - x_n(t_o)| < \varepsilon$$

ini menunjukkan bahwa $(x_1(t_o), x_2(t_o), \ldots\ldots\ldots)$ adalah barisan Cauchy.

Sejak R lengkap maka $\{x_m\}$ konvergen, katakan

$$x_m(t_o) \longrightarrow x(t_o) \text{ untuk } m \to \infty$$

dengan jalan ini kita dapat mengkawankan $t \in j$ dengan suatu bilangan riil tunggal $x(t)$.

Dari persamaan (1)

$$d(x_m,x_n) = (\max_{t \in j} |x_m(t) - x_n(t)|) < \varepsilon \text{ dengan } n \to \infty$$

diperoleh

$$\max_{t \in j} |x_m(t)-x\ (t)| < \varepsilon, \text{ untuk } m > N$$

sehingga untuk setiap $t \in j$

$$|x_m(t)-x\ (t)| < \varepsilon \text{ untuk } m > N$$

maka menurut definisi (14a) menunjukkan bahwa

$x_m(t)$ ---------> $x(t)$,

Karena $\{x_m\}$ dalam C [a,b], dan C [a,b] himpunan semua fungsi riil koontinue (contoh 1d) maka $\{x_m\}$ kontinue. Sejak $\{x_m\}$ kontinue dalam j dan konvergen, fungsi limit x kontinue dalam j, sehingga $x \in C$ [a,b], juga $x_m$ ---------> x maka terbukti C [a,b] lengkap (sesuai definisi 16).

c. Sistem bilangan rasional Q dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$ merupakan ruang metrik tidak lengkap.

keterangan :

Ambil barisan Cauchy $\{x_n\}$ di Q dengan $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $n = 1,2,\ldots\ldots$, maka barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen ke $e \in Q$ (sesuai theorema 16) sebab :

$\lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ ( e = bilangan alam)

Jadi Q adalah ruang metrik tak lengkap.

Theorema 6a

Misalkan A adalah ruang bagian dari ruang metrik lengkap (X,d), maka A adalah lengkap jika dan hanya jika himpunan A adalah tertutup di X

Bukti

(=====>)

Misalkan A lengkap, maka menurut theorema (4a) untuk setiap $x \in \bar{A}$ terdapat barisan $\{x_n\}$ di A yang konvergen ke $x$. Sehingga menurut theorema (6) barisan $\{ x_n \}$ adalah cauchy dan karena A lengkap, barisan $\{ x_n \}$ konvergen di A, mempunyai limit tunggal (menurut theorema (2)). Jadi $x \in A$, maka terbukti A adalah tertutup.

(<=====)

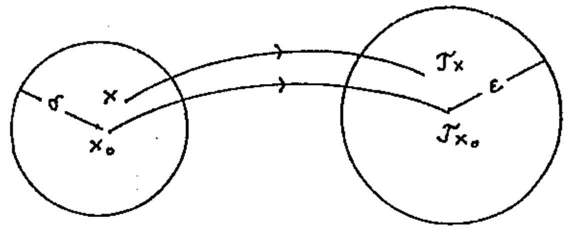
Misalkan A tertutup dan $\{ x_n \}$ barisan cauchy di A. Dan misalkan $x_n \longrightarrow x \in X$, menurut theorema (4a) maka $x \in \bar{A}$, dan karena A tertutup ( $\bar{A} \subseteq A$ ) jelas bahwa $x \in A$. Karena sembarang barisan cauchy $\{ x_n \}$ konvergen di A, maka terbukti bahwa A adalah tertutup.

2.2.4 PEMETAAN (FUNGSI) KONTINUE

Definisi 17

Suatu fungsi $\mathcal{T} : X \longrightarrow Y$ (dengan $X=(X,d)$ dan $Y=(Y,\tilde{d})$ adalah ruang metrik) dikatakan kontinue di titik $x_o \in X$, jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\tilde{d}(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x_o) < \varepsilon$ untuk semua $x$ memenuhi $d(x,x_o) < \delta$

Gambar / fig 8




Fungsi $\mathcal{T}$ dikatakan kontinue jika kontinue di titik $x_o \in X$.

Theorema 7

Suatu pemetaan $\mathcal{T} : X \longrightarrow Y$ dari suatu ruang metrik $(X,d)$ ke dalam ruang metrik $(Y,\bar{d})$ adalah kontinue pada setiap titik $x_o \in X$ jika hanya jika

$$x_n \longrightarrow x_o \text{ berarti } \mathcal{T}x_n \longrightarrow \mathcal{T}x_o$$

Bukti :

$(\Longrightarrow)$

Misal $\mathcal{T}$ kontinue di $x_o$ menurut definisi (17), jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$d(x,x_o) < \delta \text{ berarti } \bar{d}\ (\mathcal{T}x,\mathcal{T}x_o) < \varepsilon$$

Misal $x_n \longrightarrow x_o$ maka menurut definisi (14a) maka terdapat suatu N sedemikian sehingga untuk semua $n > N$ didapat $d\ (x_n,x_o) < \delta$

Dari sini untuk semua $n > N$ maka

$$\bar{d}\ (\mathcal{T}x_n,\mathcal{T}x_o) < \varepsilon$$

Ini menunjukkan bahwa $\mathcal{T}x_n \longrightarrow \mathcal{T}x_o$

$(\Longleftarrow)$

Diassumsikan bahwa

$$x_n \longrightarrow x_o \text{ berarti } \mathcal{T}x_n \longrightarrow \mathcal{T}x_o$$

dan dibuktikan bahwa $\mathcal{T}$ kontinue di $x_o$

Andaikan pernyataan ini salah maka terdapat suatu $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat suatu $x \neq x_o$ memenuhi

$$d(x,x_o) < \delta \quad \text{tetapi } \bar{d}(\mathcal{T}x_n,\mathcal{T}x_o) \geq \varepsilon.$$

Dalam kenyataan, untuk $\delta = 1/n$ terdapat suatu $x_n$ memenuhi $d(x_n, x_o) < 1/n$ tetapi $\bar{d}(\mathcal{T}x_n,\mathcal{T}x_o) \geq \varepsilon$, jelas $x_n \text{--------->} x_o$ tetapi $(\mathcal{T}x_n)$ tidak konvergen ke $\mathcal{T}x_o$. Terjadi kontradiksi, sehingga $\mathcal{T}x_n \text{--------->} \mathcal{T}x_o$.

(theorema terbukti).

### 2.2.4.1FUNGSIKONTINUEDALAMSUATUINTERVAL

Definisi 18

Jika $\mathcal{T}$ kontinue dan terbatas pada X berarti dapat diperoleh bilangan positif M sedemikian sehingga

$|\mathcal{T}x_o| \leq M$ untuk semua $x_o \in M$

Theorema 8

$J = [a,b]$ interval tertutup dan terbatas dan $\mathcal{T} : J \longrightarrow R$ adalah kontinue dalam J.

Maka $\mathcal{T}$ terbatas dalam J.

Bukti :

Andai $\mathcal{T}$ tidak terbatas dalam J maka untuk setiap $n \in N$ terdapat $\{x_n\} \in J$ sehingga :

$|\mathcal{T}x_n| > n$

Sejak J terbatas maka $\{x_n\}$ terbatas. Sehingga menurut theorema (6) sub barisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$ konvergen ke suatu titik x.

Dan sejak J tertutup dan elemen dari $\{x_{n_k}\}$ merupakan elemen J , maka $x \in J$

Dari sini terlihat bahwa $\mathcal{T}$ kontinue pada x sehingga

$(\mathcal{T}x_{n_k}) \text{------>} \mathcal{T}x$ (theorema 7)

sehingga $(\mathcal{T}x_{n_k})$ terbatas.

Tetapi terjadi kontradiksi sejak $|\mathcal{T}x_{n_k}| > n_k \geq k$

untuk $k > N$

Sehingga pengandaian salah maka $\mathcal{T}$ terbatas dalam J.