BAB III

ANALISA VARIANSI FAKTOR MODEL I

3.1.Pengaruh Pemakaian Model I.

Kita akan mempertimbangkan dua pilihan model Analisa variansi yaitu Model I dan Model II.Model I kita pakai untuk masalah-masalah seperti membandingkan 5 iklan yang berbeda atau membandingkan 4 anti karat yang berbeda,dimana keputusan akan berhubungan dengan tingkat Faktor yang masuk dalam penyelidikan saja.

Model II yang akan kita bahas pada bab berikutnya,dipakai untuk jenis keadaan yang berbeda yaitu keputusan akan diperluas untuk suatu populasi tingkat Faktor yang mana penyelidikan hanya dikenakan pada beberapa tingkat Faktor saja sebagai sampel.Misal:suatu perkumpulan yang terdiri atas beberapa ratus toko eceran semuanya ada di desa.7 dari toko tersebut terpilih secara acak dengan sampel pekerja-pekerja dari masing-masing toko yang dipilih.Kemudian dilakukan interview secara rahasia untuk dinilai administrasi tokonya.Ketujuh toko dipenyelidikan ini merupakan 7 tingkat Faktor,yaitu toko eceran.Walaupun begitu,dalam masalah ini penilaian administrasi tidak hanya berpengaruh pada ketujuh toko yang diselidiki tetapi ingin menyamaratakan hasil penyelidikan untuk seluruh toko eceran yang masuk perkumpulan.Contoh lain penggunaan Model II,misalnya di dalam suatu pabrik jika 3 mesin dari 75 mesin yang ada di dalam pabrik terpilih secara acak dan daya produksi mereka diteliti untuk suatu periode selama 10 hari.Ketiga mesin di sini merupakan tiga tingkat Faktor dalam penyelidikan ini tetapi pengaruhnya tidak hanya pada ketiga mesin yang diselidiki tetapi untuk keseluruhan mesin yang ada di pabrik.

Jadi perbedaan penting diantara pemakaian Model I dan Model II adalah bahwa model I dipakai bilamana tingkat Faktor yang diseliki,hasilnya berlaku untuk seluruh tingkat Faktor yang diselidiki tersebut dan mereka tidak menimbang sebagai suatu sampel dari suatu populasi yang besar (misal:5 iklan yang berbeda).Model II dipakai apabila tingkat Faktor berlaku sebagai sampel dari suatu populasi yang besar (misal:3 mesin diambil dari 75 mesin) dan hasil yang didapat berlaku untuk populasi besar ini.

Assumsi Dasar pada Analisa Variansi Model I.

Assumsi dasar pada Analisa variansi Model I untuk suatu penyelidikan dengan Faktor Tunggal adalah sangat sederhana.Masing-masing tingkat Faktor sesuai dengan suatu distribusi probabilitas dari pengamatan,contoh:dalam suatu penelitian mengenai pengaruh dari empat tipe upah insentif terhadap daya produksi pekerja,di sini ada distribusi probabilitas dari daya produksi pekerja untuk setiap tipe upah insentif.

Analisa variansi Model I berassumsi bahwa:

1. Setiap distribusi probabilitas adalah Normal.
2. Setiap distribusi probabilitas mempunyai variansi yang sama.
3. Pengamatan untuk masing-masing tingkat Faktor adalah pengamatan acak dari distribusi probabilitas yang ada dan tidak tergantung pada pengamatan untuk sembarang tingkat Faktor yang lain.

Gambar 2.2 memperlihatkan kondisi ini,dengan catatan berdistribusi probabilitas Normal dan variansi konstan. Distribusi probabilitas hanya berbeda mengenai rata-rata mereka.Perbedaan pada rata-rata mencerminkan pengaruh penting dari tingkat Faktor dan karena alasan ini,Analisa variansi dipusatkan pada rata-rata pengamatan masing-masing tingkat Faktor.Oleh karena itu Analisa pada data sampel dari setiap distribusi probabilitas tingkat Faktor,bisa dimulai dengan dua tahap:

1. Menentukan apakah rata-rata tingkat Faktor sama atau tidak.
2. Jika rata-rata tingkat Faktor tidak sama,diselidiki bagaimana perbedaan mereka dan kesimpulan dari perbedaan tersebut.

Dalam bab ini,kita akan mengerjakan tahap 1,prosedur menguji untuk menentukan apakah rata-rata tingkat Faktor sama atau tidak.Dalam bab berikutnya,kita menganalisa pengaruh tingkat Faktor jika rata-rata tidak sama.

Rumus Model I.

Ada r tingkat Faktor yang diselidiki (contoh:4 tipe upah insentif) dan pengamatan dari mereka akan diberi notasi dengan indek j (j=1,2,3,.....,r).Banyaknya pengamatan untuk tingkat Faktor ke-j diberi notasi n_j,dan total banyaknya pengamatan dalam penyelidikan ini diberi notasi n_T dimana

(3.1) $$n_T=\sum_{j=1}^{r} n_j$$

Kita akan menggunakan indek i untuk mewakili sembarang pengamatan pada tingkat Faktor ke-j maka,i=1,2,3,....,n_j. Pengamatan ke-i pada tingkat Faktor ke-j diwakili oleh Y_{ij},misal:Y_{ij}adalah daya produksi dari pekerja ke-i pada pabrik ke-j.

Model I dapat ditulis

(3.2) $$Y_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij}$$

Y_{ij}adalah harga variabel **tak bebas di dalam pengamatan ke-i pada tingkat Faktor atau perlakuan ke-j.**

μ_j adalah parameter-parameter.

ε_{ij}adalah random yang independent dan berdistribusi Normal dengan mean o dan variansi σ^2 atau ditulis dengan $N(0,\sigma^2)$.

Model (3.2) dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Harga pengamatan dari Y dipercobaan ke-i pada tingkat

Faktor atau perlakuan ke-j merupakan jumlahan dua komponen:

(1) Suatu konstanta dengan simbol μ_j dan

(2) Suatu random error (dengan simbol ε_{ij}) yang independent dan berdistribusi Normal dengan mean 0 dan variansi σ^2.

2. Karena $E(\varepsilon_{ij})=0$ sehingga

(3.3) $$E(Y_{ij})=E(\mu_j+\varepsilon_{ij})$$
$$=E(\mu_j)+E(\varepsilon_{ij})=\mu_j$$

Jadi pengamatan pada tingkat Faktor ke-j mempunyai ekspektasi yang sama yaitu μ_j.

3. Karena μ_j konstanta,

(3.4) $$\sigma^2(Y_{ij})=E(Y_{ij}-E(Y_{ij}))^2=E(\mu_j+\varepsilon_{ij}-\mu_j)^2$$
$$=E(\varepsilon_{ij})^2=\sigma^2$$

Jadi seluruh pengamatan mempunyai variansi yang sama yaitu σ^2.

4. Karena masing-masing ε_{ij} berdistribusi Normal sehingga setiap Y_{ij} berdistribusi Normal pula sebab Y_{ij} merupakan fungsi linier dari ε_{ij}.

5. ε_{ij} diassumsikan independent sehingga untuk setiap i dan j yang manapun ε_{ij} tetap independent, demikian pula dengan pengamatan Y_{ij}.

6. Dari uraian di atas, model (3.2) dapat didefinisikan

$$Y_{ij} \text{ adalah Independent Normal } (\mu_j,\sigma^2).$$

Contoh: andaikan model Analisa variansi (3.2) dipakai untuk penyelidikan mengenai upah insentif yang illustrasinya dapat dilihat pada bagian awal dan harga parameter-parameternya adalah sebagai berikut:

$\mu_1=70, \mu_2=58, \mu_3=90, \mu_4=84$ dan $\sigma^2=4$.

Gambar 2.2 berisi gambaran dari model ini.Dengan catatan bahwa daya produksi pekerja untuk upah insentif tipe I sesuai dengan model ini,berdistribusi Normal dengan mean $\mu_1=70$ dan standart deviasi $\sigma=4$.Andaikan bahwa dalam percobaan ke-i pada upah insentif tipe I,pengamatan daya produksi adalah $Y_{i1}=78$,dengan error $\varepsilon_{i1}=8$ berasal dari $\varepsilon_{i1}=Y_{i1}-\mu_1=78-70=8$.

Gambar 2.2 menunjukkan pengamatan Y_{i1} ini.Dengan catatan bahwa selisih Y_{i1} terhadap rata-rata μ_1 diwakili oleh error dengan simbol ε_{i1},gambar ini juga memperlihatkan pengamatan $Y_{i2}=51$,dengan error $\varepsilon_{i2}=-7$.

Rata-rata Tingkat Faktor.

(i) Data survai.

Dalam suatu survai,rata-rata tingkat Faktor μ_j menunjukkan rata-rata populasi tingkat Faktor ke-j dimana j=1, 2,3,4,....,r.Artinya μ_1 menunjukkan rata-rata populasi tingkat Faktor ke-1,μ_2 menunjukkan rata-rata populasi tingkat Faktor ke-2,dan seterusnya.Contoh pada penyelidikan daya produksi pekerja dalam setiap shift (pergantian) kerja di dalam suatu pabrik,dimana ada 3 shift kerja.Populasi di sini terdiri atas daya produksi pekerja untuk setiap shift kerja.Rata-rata populasi μ_1 adalah rata-rata daya produksi pekerja dalam shift 1, μ_2 dan μ_3 demikian pula sebagai rata-rata daya produksi pekerja dalam shift 2 dan 3. Variansi σ^2 menunjukkan variability dari daya produksi pekerja dalam suatu shift.

(ii) Data eksperiment.

Dalam penyelidikan eksperiment, rata-rata tingkat Faktor μ_j berlaku sebagai rata-rata pengamatan pada tingkat Faktor ke-j, ini didapat jika perlakuan ke-j dipakai untuk seluruh unit di dalam populasi unit eksperiment yang akan diambil kesimpulan. Misal: dalam penyelidikan pada 3 progam pendidikan yang berbeda dimana ada 90 pekerja ikut serta, sepertiga dari pekerja tersebut kita ambil secara acak sebagai populasi unit eksperiment kemudian ketiga progam pendidikan diberikan kepada mereka. Rata-rata μ_1 di sini merupakan notasi dari rata-rata pengamatan pada "misal rata-rata keuntungan daya produksi", jika progam pendidikan 1 diberikan untuk setiap pekerja dalam populasi unit eksperiment (pada contoh ini 30 pekerja) demikian pula dengan rata-rata μ_2 di sini merupakan notasi dari rata-rata keuntungan daya produksi yang didapat untuk progam pendidikan 2, bila progam pendidikan 2 kita berikan pada ke 30 pekerja yang diambil sebagai populasi unit eksperiment. μ_3 mengikuti seperti di atas. Variansi σ^2 adalah notasi dari variability dari keuntungan daya produksi jika sembarang progam pendidikan diberikan untuk setiap pekerja di dalam populasi unit eksperiment.

Rumus lain dari Model I.

Untuk penyelidikan-penyelidikan dengan Faktor Tunggal, parameter yang ada dari Model I di (3.2) cukup lengkap. Sebaliknya pada eksperiment dengan Multi Faktor, parameter yang digunakan memiliki bentuk yang berbeda. Sekarang akan kami kembangkan parameter lain yang sederhana untuk melihat hubungan diantara keduanya di dalam masalah yang ada pada penyelidikan dengan Faktor Tunggal.

Parameter lain dari Model I tersebut disajikan sebagai berikut:

(3.6) $$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_j + \varepsilon_{ij}$$

dimana $\mu_{.}$ adalah suatu komponen yang konstan untuk seluruh pengamatan.

τ_j adalah pengaruh dari tingkat Faktor ke-j (suatu konstanta untuk tingkat Faktor ke-j).

ε_{ij} adalah Independent berdistribusi $N(0,\sigma^2)$.

$i=1,2,3,\ldots,n_j$.

$j=1,2,3,\ldots,r$.

Jika dibandingkan antara rumus yang ada pada (3.2) dan (3.6) ternyata hanya ada satu perbedaan diantara kedua model tersebut, yaitu pada rata-rata dari tingkat Faktor ke-j: μ_j di dalam (3.2) dipecah menjadi dua bagian di dalam (3.6) yakni: (3.7) $\mu_j = \mu_{.} + \tau_j$

Sehingga, τ_j yang disebut sebagai pengaruh dari tingkat Faktor ke-j, didefinisikan sebagai berikut:

(3.8) $$\tau_j = \mu_j - \mu_.$$

Definisi dari $\mu_.$.

Pemecahan dari rata-rata tingkat Faktor ke-j: μ_j kedalam dua komponen, konstanta $\mu_.$ dan τ_j, dapat kita kerjakan dengan berbagai jalan. Contoh, $\mu_.$ sering didefinisikan sebagai rata-rata dari seluruh rata-rata tingkat Faktor yang ada. Jadi:

(3.9) $$\mu_. = \sum_{j=1}^{r} \frac{\mu_j}{r}$$

Dari definisi ini berarti

(3.10) $$\sum_{j=1}^{r} \tau_j = 0$$

sebab menurut (3.8) $\sum_{j=1}^{r} \tau_j = \sum_{j=1}^{r} (\mu_j - \mu_.) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j - r\mu_.$

$$= r\sum_{j=1}^{r} \frac{\mu_j}{r} - r\mu_. = r\mu_. - r\mu_. = 0$$

Dari sini dapat dikatakan bahwa definisi $\mu_.$ seperti yang ada di (3.9) mengandung ketentuan pada τ_j, dalam hal ini bahwa jumlah dari τ_j untuk semua j sama dengan nol.

Contoh: pada upah insentif dimana $\mu_1=70$, $\mu_2=58$, $\mu_3=90$, $\mu_4=84$, sehingga jika kita definisikan $\mu_.$ seperti yang ada pada rumus (3.9) kita dapatkan

$$\mu_. = \frac{70+58+90+84}{4} = 75{,}5$$

maka $\tau_1 = 70-75{,}5=-5{,}5$

$\tau_2 = 58-75{,}5=-17{,}5$

$\tau_3 = 90-75,5=14,5$

$\tau_4 = 84-75,5=-8,5$

Pengaruh dari tingkat Faktor pertama $\tau_1=-5,5$ menunjukkan bahwa rata-rata daya produksi pekerja untuk upah insentif tipe I kurang 5,5 dari rata-rata daya produksi pekerja untuk seluruh upah insentif.

Definisi lain dari $\mu_.$.

Konstanta $\mu_.$ dapat juga didefinisikan lebih kurang sebagai rata-rata berat dari rata-rata tingkat Faktor μ_j

(3.11) $$\mu_. = \sum_{j=1}^{r} w_j \mu_j$$

dimana w_j adalah berat dari tingkat Faktor ke-j dengan $\sum_{j=1}^{r} w_j=1$. Ini memberikan ketentuan pada τ_j yaitu bahwa

(3.12) $$\sum_{j=1}^{r} w_j \tau_j = 0$$

sebab $\tau_j = \mu_j - \mu_.$

sehingga $w_j \tau_j = w_j \mu_j - \mu_. w_j$

$$\sum_{j=1}^{r} w_j \tau_j = \sum_{j=1}^{r} w_j \mu_j - \mu_. \sum_{j=1}^{r} w_j = \mu_. - \mu_. = 0$$

seringkali berat w_j menggunakan besarnya relatif sampel $\frac{n_j}{n_T}$,sehingga $\mu_.$ menjadi

(3.13) $$\mu_. = \sum_{j=1}^{r} \frac{n_j \mu_j}{n_T}$$ dan ketentuan pada τ_j menjadi

(3.14) $$\sum_{j=1}^{r} \frac{n_j \tau_j}{n_T} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} n_j \tau_j = 0$$

Jika ukuran sampel untuk seluruh tingkat Faktor sama atau $n_j = n$ untuk setiap $j=1,2,3,\ldots,r$ dan

$$\sum_{j=1}^{r} n_j = \sum_{j=1}^{r} n = rn$$

sehingga $\mu_.$ yang didapat dari (3.9) dan (3.13) tak ada bedanya atau sama saja.

Bukti dari (3.13) $\mu_. = \sum_{j=1}^{r} \frac{n_j \mu_j}{n_T} = \sum_{j=1}^{r} \frac{n \mu_j}{rn} = n \sum_{j=1}^{r} \frac{\mu_j}{rn} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\mu_j}{r}$

sama dengan $\mu_.$ yang ada di (3.9).

Pemilihan dari definisi $\mu_.$ akan tergantung pada maksud dari besarnya hasil yang didapat dari pengaruh tingkat Faktor τ_j .Akan tetapi untuk sederhananya pembahasan,kami akan pakai definisi $\mu_.$ pada (3.13) kecuali ada catatan lain.

Catatan.

Biasanya kita sering pula meneliti apakah rata-rata tingkat Faktor μ_j itu sama semua untuk $j=1,2,3,\ldots,r$ atau tidak.Misalnya:apakah ke-5 iklan yang masing-masing berbeda bentuk mempunyai rata-rata penjualan yang sama atau tidak.Dengan model parameter (3.2) ada dua pilihan kesimpulan untuk memecahkan masalah seperti itu,kedua pilihan kesimpulan tersebut adalah:

(3.16) $\quad C_1 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots\cdots = \mu_r$

$\quad C_2$: tidak semua u_j berharga sama.

Kedua pilihan kesimpulan di atas sama dengan model parameter (3.6) dengan model ini terdapat juga dua pilihan kesimpulan untuk memecahkan masalah yang sama seperti diatas yaitu:

(3.16) $\quad C_1: \tau_1=\tau_2=\ldots\ldots\ldots=\tau_r$.

$\quad C_2$; tidak semua τ_j berharga sama.

Kedua bentuk persamaan di atas (3.15) dan (3.16) sering kita buat. Rata-rata dari tingkat Faktor μ_j sama untuk semua $j=1,2,3,\ldots\ldots,r$ (3.15), berarti bahwa semua τ_j adalah sama seperti yang ada di (3.9)

$$\mu_. = \sum_{j=1}^{r} \mu_j = r\mu_j = \mu_j \text{ karena } \mu_j \text{ sama, untuk setiap } j$$

sehingga (3.8)

$$\tau_j = \mu_j - \mu_. = \mu_j - \mu_j = 0 \text{ , untuk setiap } j$$

dari sini dapat disimpulkan bahwa jika harga μ_j sama, untuk setiap j maka harga $\tau_j = 0$ untuk setiap $j=1,2,3,\ldots\ldots\ldots,r$.

Sekarang jika harga $\tau_j = 0$ untuk setiap $j=1,2,3,\ldots\ldots\ldots,r$

menurut (3.8) $\quad \tau_j = \mu_j - \mu_.$ sehingga $\mu_j - \mu_. = 0$

$\mu_j = \mu_.$ untuk

setiap $j=1,2,3,\ldots\ldots\ldots,r$. Ini berarti bahwa untk setiap j harga μ_j adalah sama. Jadi kedua bentuk persamaan (3.15) dan (3.16) adalah equivalent.

3.2. Estimasi Parameter.

Parameter-parameter pada model Analisa variansi biasanya tidak diketahui dan harus diestimasi dari data sampel, salah satunya diperoleh dari survai atau eksperiment.

Seperti pada regresi,kita menggunakan metode kwadrat terkecil untuk mendapatkan estimator dari parameter.Sebelum kita bahas masalah penaksiran,terlebih dahulu akan kami beri contoh untuk pengenalan notasi-notasi yang nantinya akan sering kita temui.

Contoh:Pabrik Makanan Kenton.

Pabrik ini ingin mengetest 4 model pembungkus makanan pagi baru yang berisi bahan dari padi-padian (ke-4 model pembungkus itu berbeda satu dengan yang lain) terhadap volume penjualan.Ada tiga toko (yang kira-kira sama volume penjualannya) sebagai unit eksperiment.Masing-masing toko secara acak dipilihkan suatu model pembungkus makanan dan hasilnya bahwa toko-1 dan toko-2 masing-masing diberi ke-4 model pembungkus,sedang toko-3 hanya diberi model pembungkus ke-2 dan ke-3.Perlu dicatat bahwa kondisi atau keadaan model pembungkus sedekat mungkin disesuaikan dengan harga,banyak dan lokasi dari rak (tempat meletakkan barang yang dijual),usaha-usaha promosi untuk setiap toko dieksperiment ini adalah sama.Setelah dilakukan pencatatan banyaknya barang yang terjual,didapat hasil sebagai berikut:

TABEL 3.1.

Banyak barang yang berhasil dijual ke-3 toko untuk ke-4 model pembungkus-Pabrik Makanan Kenton.

(a) Data Sampel

Toko	Model Pembungkus				Total
	1	2	3	4	
1	12	14	19	24	
2	18	12	17	30	
3		13	21		
Total	30	39	57	54	180
Rata-rata	15	13	19	27	18
Banyak toko	2	3	3	2	10

(b) Simbol Notasi.

Unit Sampel (i)	Tingkat Faktor (j)				Total
	1	2	3	4	
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	
3		Y_{32}	Y_{33}		
Total	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	$Y_{.3}$	$Y_{.4}$	$Y_{..}$
Rata-rata	$\bar{Y}_{.1}$	$\bar{Y}_{.2}$	$\bar{Y}_{.3}$	$\bar{Y}_{.4}$	$\bar{Y}_{..}$
Jumlah unit Sampel	n_1	n_2	n_3	n_4	n_T

Tabel 3.1b memperlihatkan notasi simbolik untuk data yang ada pada tabel 3.1a Pabrik Makanan Kenton. Y_{ij} seperti yang telah kita ketahui mewakili pengamatan unit ke-i pada tingkat Faktor ke-j, di sini Y_{ij} sebagai banyak barang yang terjual di toko ke-i dengan model pembungkus ke-j. Contoh Y_{ij} menunjukkan penjualan dari toko-1 dengan model pembungkus ke-1 adalah $Y_{11}=12$ barang. Begitu juga dengan penjualan pada toko ke-2 dengan model pembungkus ke-3 diwakili atau dinyatakan dengan $Y_{23}=17$ barang. Total dari pengamatan pada tingkat Faktor ke-j diberi notasi $Y_{.j}$

(3.17)

$$Y_{.j} = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$$

Tanda dot (.) pada $Y_{.j}$ menunjukkan penjumlahan seluruh data observasi pada tingkat Faktor ke-j (indek i diabaikan). Contoh penjumlahan seluruh barang yang terjual dengan model pembungkus ke-j. Misal pada pabrik makanan Kenton, total penjualan seluruh toko dengan model pembungkus ke-1 menurut tabel 3.1, $Y_{.1}=30$ barang. Demikian juga, total penjualan seluruh toko yang dikenai model pembungkus ke-4 adalah $Y_{.4}=54$ barang.

Rata-rata sampel untuk tingkat Faktor ke-j diberi notasi $\bar{Y}_{.j}$ dimana:

(3.18)

$$\bar{Y}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}}{n_j} = \frac{Y_{.j}}{n_j}$$

Dalam contoh pabrik makanan Kenton,kita dapatkan:

- Rata-rata banyak barang yang terjual oleh toko dengan model pembungkus ke-1 adalah $\overline{Y}_{.1}$= 15 barang.
- Rata-rata banyak barang yang terjual oleh toko dengan model pembungkus ke-2 adalah $\overline{Y}_{.2}$= 13 barang.
- Rata-rata banyak barang yang terjual oleh toko dengan model pembungkus ke-3 adalah $\overline{Y}_{.3}$= 19 barang.
- Rata-rata banyak barang yang terjual oleh toko dengan model pembungkus ke-4 adalah $\overline{Y}_{.4}$= 27 barang.

Demikian juga,tanda dot (.) pada simbol-simbol di atas menunjukkan bahwa rata-rata dihitung berdasarkan penjumlahan seluruh data observasi pada tingkat Faktor ke-j (indek i diabaikan).Total seluruh pengamatan diberi notasi $Y_{..}$ dimana

(3.19) $$Y_{..} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$$

Kedua dot (..) menunjukkan penjumlahan seluruh data observasi (indek i dan j diabaikan).Pada contoh di atas adalah seluruh barang yang ada di toko ke-i dan dengan memakai model pembungkus ke-j dimana

i=1,2,3. Sedangkan

j=1,2,3,4.

Berikut akan kita coba untuk menghitung total seluruh barang yang terjual pada toko ke-i dengan model pembungkus ke-j pada i dan j seperti di atas.

Untuk contoh ini (sesuai tabel 3.1)

$$Y_{..} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} Y_{ij} = Y_{11}+Y_{21}+Y_{31}+Y_{12}+Y_{22}+Y_{32}+Y_{13}+Y_{23}+Y_{33}+$$

$$Y_{14}+Y_{24}+Y_{34}$$

$$= 12+18+0+14+12+13+19+17+21+24+30=180$$

Akhirnya,rata-rata seluruh observasi diberi notasi $\bar{Y}_{..}$

dimana

(3.20) $$\bar{Y}_{..} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} Y_{ij} = \frac{Y_{..}}{n_T}$$

Tanda dot (..) menunjukkan rata-rata dikerjakan melalui indek i dan j untuk contoh ini sesuai tabel 3.1

$$\bar{Y}_{..} = \frac{180}{10} = 18$$

Estimator Kwadrat Terkecil.

Untuk memperoleh estimator dari parameter yang ada di-(3.2) kita pergunakan kriteria kwadrat terkecil yaitu jumlahan kwadrat dari selisih antara hasil seluruh pengamatan dengan harga harapannya.Pada (3.3) kita tahu bahwa:

$$E(\ Y_{ij}\ ) = \mu_j$$

maka sesuai dengan kriteria kwadrat terkecil untuk memperoleh estimator dari μ_j

(3.21) $$Q = \sum_j \sum_i (\ Y_{ij} - \mu_j\ )^2 \text{ harus minimum.}$$

Bentuk di atas bisa kita tulis sebagai berikut

(3.21a) $$Q = \sum_i (\ Y_{i1} - \mu_1\ )^2 + \sum_i (\ Y_{i2} - \mu_2\ )^2 +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \sum_i (\ Y_{ir} - \mu_r\ )^2.$$

Q akan minimum bila:

$$Q_j = \sum_i (Y_{ij} - \mu_j)^2 \quad , \; j=1,2,3,\ldots\ldots,r$$

adalah minimum.

Sekarang kita defferensialkan Q_j ke μ_j, kita dapatkan

$$\frac{d\,Q_j}{d\,\mu_j} = -2 \sum_i (Y_{ij} - \mu_j)$$

Q_j akan minimum jika $\frac{d\,Q_j}{d\,\mu_j} = 0$ sehingga

$$-2 \sum_i (\, Y_{ij} - \hat{\mu}_j \,) = 0$$

$$\sum_i Y_{ij} - \sum_i \hat{\mu}_j = 0$$

$$\sum_i \hat{\mu}_j = \sum_i Y_{ij}$$

$$n_j \hat{\mu}_j = \sum_i Y_{ij}$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_i Y_{ij}}{n_j} = \overline{Y}_{.j}$$

Jadi estimator kwadrat terkecil dari μ_j diberi notasi $\hat{\mu}_j$

adalah:

(3.22) $$\hat{\mu}_j = \overline{Y}_{.j}$$

Contoh: lihat pada soal Pabrik Makanan, estimasi kwadrat terkecil dari parameter μ_j sesuai dengan data yang ada pada tabel 3.1 adalah

Parameter	Estimasi kwadrat terkecil
μ_1	$\overline{Y}_{.1} = 15$
μ_2	$\overline{Y}_{.2} = 13$

Parameter	Estimasi kwadrat terkecil
μ_3	$\bar{Y}_{.3} = 19$
μ_4	$\bar{Y}_{.4} = 27$

Jadi estimasi rata-rata penjualan pertoko dengan model pembungkus ke-1 adalah 15 barang,untuk model pembungkus ke-2 rata-rata penjualan adalah 13 barang begitu seterusnya.

Untuk parameter yang ada pada rumus (3.6) Q mempunyai nilai:

(3.24) $$Q = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - E(Y_{ij}))^2$$

dimana $E(Y_{ij}) = E(\mu_{.} + \tau_j + \varepsilon_{ij}) = E(\mu_{.}) + E(\tau_j) + E(\varepsilon_{ij}) = \mu_{.} + \tau_j$

$$Q = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \mu_{.} - \tau_j)^2$$

jika komponen $u_{.}$ seperti biasanya kita definisikan sebagai

(3.24) $$\mu_{.} = \sum_j \frac{n_j \mu_j}{n_T}$$

sehingga ketentuan pada τ_j adalah

(3.25) $$\sum_j n_j \tau_j = 0$$

estimator kwadrat terkecil dari $\mu_{.}$ dan τ_j didapat dengan meminimumkan

$$Q = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \mu_{.} - \tau_j)^2$$

jika Q kita defferensialkan ke $\mu_{.}$ didapat

$$\frac{dQ}{d\mu_{.}} = -2 \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \mu_{.} - \tau_j)$$

Q akan minimum jika defferensial di atas berharga nol

$$-2 \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \mu_. - \tau_j) = 0$$

$$\sum_j \sum_i (Y_{ij} - \mu_. - \tau_j) = 0$$

$$\sum_j \sum_i Y_{ij} - n_T \mu_. - \sum_j n_j \tau_j = 0$$

$$\sum_j \sum_i Y_{ij} - n_T \mu_. - 0 = 0$$

$$n_T \mu_. = \sum_j \sum_i Y_{ij}$$

$$\mu_. = \frac{\sum_j \sum_i Y_{ij}}{n_T} = \bar{Y}_{..}$$

Jadi estimasi dari $\mu_.$ diberi notasi $\hat{\mu}_.$ adalah

(3.26) $$\hat{\mu}_. = \bar{\bar{Y}}_{..}$$

Bentuk Q di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$Q = \sum_i (Y_{i1} - \mu_. - \tau_1)^2 + \sum_i (Y_{i2} - \mu_. - \tau_2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \sum_i (Y_{ir} - \mu_. - \tau_r)^2.$$

Q akan minimum jika

$$Q_j = \sum_i (Y_{ij} - \mu_. - \tau_j)^2$$ minimum untuk setiap $j=1,2,..,r$.

Bila Q_j kita defferensialkan ke τ_j didapat

$$\frac{d\, Q_j}{d\, \tau_j} = -2 \sum_i (Y_{ij} - \mu_. - \tau_j)$$

Q_j akan minimum jika harga defferensial di atas adalah 0

sehingga $$-2 \sum_i (Y_{ij} - \mu_. - \tau_j) = 0$$

$$\sum_i Y_{ij} - n_j \mu_. - n_j \tau_j = 0$$

$$\frac{\sum_i Y_{ij}}{n_j} = \mu_{.} + \tau_j$$

$$\tau_j = \frac{\sum_i Y_{ij}}{n_j} - \mu_{.}$$

$$\tau_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$$

Jadi estimasi τ_j diberi notasi $\hat{\tau}_j$ adalah

(3.27) $$\hat{\tau}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$$

Contoh:pada pabrik makanan Kenton,dengan kriteria kwadrat terkecil didapat estimasi dari komponen $\mu_{.}$ sesuai dengan tabel 3.1a

$$\hat{\mu}_{.} = \bar{Y}_{.j} = 18$$

dan estimasi pengaruh model pembugnkus τ_j adalah

Parameter	Estimasi
τ_1	$\bar{Y}_{.1} - \bar{Y}_{..} = -3$
τ_2	$\bar{Y}_{.2} - \bar{Y}_{..} = -5$
τ_3	$\bar{Y}_{.3} - \bar{Y}_{..} = +1$
τ_4	$\bar{Y}_{.4} - \bar{Y}_{..} = +9$

Dari tabel di atas menunjukkan bahwa rata-rata penjualan pertoko untuk model pembungkus ke-1 kurang 3 barang dari rata-rata penjualan untuk seluruh model pembungkus.Rata-rata penjualan dengan model pembungkus ke-4 lebih 9 dari rata-rata penjualan untuk seluruh model pembungkus,dan seterusnya.

Residual.

Residual sering digunakan untuk menguji beberapa sifat dari model Analisa variansi.Residual e_{ij} didefinisikan sebagai berikut:

$$e_{ij}=Y_{ij}-\mu_j=Y_{ij}-\overline{Y}_{.j} \tag{3.28}$$

Jadi residual adalah selisih dari observasi dan rata-rata sampel tingkat Faktor dengan disesuaikan indeknya.Definisi ini juga berlaku bagi rumus yang ada pada (3.6)

$$\begin{aligned} e_{ij}&=Y_{ij}-\mu_.-\tau_j=Y_{ij}-(\mu_.+\tau_j) \\ &=Y_{ij}-(\overline{Y}_{..}+\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..}) \\ &=Y_{ij}-\overline{Y}_{.j} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Contoh:tabel 3.2 berikut ini berisi harga-harga residual dari soal pabrik makanan Kenton .

$$e_{11}=Y_{11}-\overline{Y}_{.1}=12-15=-3$$

$$e_{12}=Y_{12}-\overline{Y}_{.2}=14-13=\ 1$$

Dapat dilihat bahwa jumlahan residual untuk masing-masing tingkat Faktor adalah nol.Ilustrasi ini memperlihatkan bahwa residual pada model Analisa variansi (3.2) atau model lain (3.6) bergantung pada r perlakuan

$$\sum_i e_{ij}=0 \text{ , untuk } j=1,2,3,\ldots \tag{3.30}$$

Residual ini digunakan untuk menguji beberapa sifat dari model Analisa variansi seperti mengenai kenormalan error

TABEL 3.2.

Residual dari Pabrik Makanan Kenton.

Toko	Model Pembungkus				Total
	1	2	3	4	
1	-3	1	0	-3	
2	3	-1	-2	3	
3		0	2		
Total	0	0	0	0	0

dan lain sebagainya.

3.3. Analisa Variansi Faktor.

Pemisahan SSTO.

Besarnya selisih antara observasi pada pengamatan i dan tingkat Faktor j dengan rata-rata seluruh observasi biasa ditulis dengan:

(3.31) $$Y_{ij}-\bar{Y}_{..}$$

Sedang total variability biasa dinyatakan sebagai penjumlahan kwadrat di atas dan diberi notasi SSTO (dibaca Total Jumlah Kwadrat).

(3.32) $$SSTO=\sum_j \sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{..})^2$$

Jika kita perhatikan rumus SSTO di atas tak menggunakan informasi yang ada pada tingkat Faktor. Sekarang bagaimana jika kita pergunakan informasi yang ada pada tingkat Faktor j untuk menyatakan SSTO. Sebelumnya kita tentukan terlebih dahulu besarnya selisih antara observasi pada

[illegible] tor j dengan rata-rata observasi pada tingkat Faktor j yaitu:

(3.33) $\quad Y_{ij}-\overline{Y}_{.j}$

perbedaan diantara rumus yang ada di (3.31) dan (3.33) terlihat pada rata-rata seluruh observasi dengan rata-rata observasi pada tingkat Faktor j.Bila rumus (3.31) dan (3.33) kita kurangkan hasilnya adalah:

(3.34) $\quad (Y_{ij}-\overline{Y}_{..})-(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})=\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..}$

sehingga selisih dari $Y_{ij}-\overline{Y}_{..}$ dapat kita komposisikan kedalam dua komponen yaitu:

(3.35) $\quad Y_{ij}-\overline{Y}_{..}=(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})+(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})$

Maka selisih total $Y_{ij}-\overline{Y}_{..}$ dapat kita pandang sebagai jumlahan dua komponen yaitu:

1. Selisih dari rata-rata tingkat Faktor dengan rata-rata seluruh observasi.
2. Selisih dari Y_{ij} dengan rata-rata tingkat Faktor.

Gambar 3.1 memperlihatkan komponen-komponen di atas dari soal pabrik makanan Kenton.Jika rumus yang ada pada (3.35) kita kwadratkan kemudian kita jumlahkan didapat:

(3.36) $$\sum_j\sum_i(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2=\sum_j\sum_i(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2+2\sum_j\sum_i(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})+\sum_j\sum_i(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})^2$$

dimana $$\sum_j\sum_i(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})=\sum_j\left((\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})\sum_i(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})\right)$$
$$=\sum_j\left((\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})\left(\sum_i Y_{ij}-\sum_i\overline{Y}_{.j}\right)\right)$$

$$\sum_j \sum_i (\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j}) = \sum_j ((\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})(n_j\overline{Y}_{.j}-n_j\overline{Y}_{.j}))$$
$$= 0$$

sehingga rumus (3.36) menjadi

$$\sum_j \sum_i (Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2 = \sum_j \sum_i (\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2 + \sum_j \sum_i (Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})^2$$
$$= \sum_j n_j(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2 + \sum_j \sum_i (Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})^2$$

Persamaan di atas bagian kiri yaitu $\sum_j \sum_i (Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2$ kita sebut SSTO sedang bagian kanan komponen pertama kita sebut jumlah kwadrat perlakuan atau SSTR jadi:

(3.37a) $$SSTR = \sum_j n_j(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2$$

bagian kanan komponen kedua kita sebut jumlah kwadrat error diberi notasi SSE jadi:

(3.37b) $$SSE = \sum_j \sum_i (Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})^2$$

Sehingga rumus (3.36) dapat ditulis dengan

(3.38) $$SSTO = SSTR + SSE$$

Oleh sebab itu jumlah kwadrat total pada model Analisa variansi dapat dibuat ke dalam dua komponen yaitu:

1. SSE : Suatu ukuran dari variansi acak untuk seluruh observasi terhadap rata-rata masing-masing tingkat Faktor. Jika observasi diantara masing-masing tingkat Faktor mempunyai variasi yang kecil maka harga SSE akan kecil. Jika SSE=0, ini berarti seluruh observasi untuk suatu tingkat Faktor adalah sama dan ini berlaku pada seluruh tingkat Faktor.

Jika observasi diantara masing-masing tingkat Faktor mempunyai perbedaan yang besar maka harga SSE akan besar.

2. SSTR: adalah besarnya perbedaan diantara tingkat Faktor didasarkan pada selisih dari rata-rata sampel tingkat Faktor $\overline{Y}_{.j}$ dengan rata-rata seluruh pengamatan $\overline{Y}_{..}$ .Jika rata-rata sampel tingkat Faktor $\overline{Y}_{.j}$ adalah sama maka SSTR=0.Jika rata-rata tingkat Faktor semangkin berbeda maka SSTR akan besar.

Perhitungan Rumus.

Untuk perhitungan rumus dengan tangan rumus-rumus yang telah terdefinisi seperti SSTO,SSTR dan SSE biasanya tidak atau kurang nikmat.Berikut akan diberikan rumus-rumus yang identik dengan bentuk rumus yang telah diberikan.

(3.39a)
$$
\begin{aligned}
SSTO &= \sum_j \sum_i (Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2 \\
&= \sum_j \sum_i (Y_{ij}^2-2Y_{ij}\overline{Y}_{..}+\overline{Y}_{..}^2) \\
&= \sum_j \sum_i Y_{ij}^2-2\sum_j \sum_i Y_{ij}\overline{Y}_{..}+\sum_j \sum_i \overline{Y}_{..}^2 \\
&= \sum_j \sum_i Y_{ij}^2-2n_T\overline{Y}_{..}^2+n_T\overline{Y}_{..}^2 \\
&= \sum_j \sum_i Y_{ij}^2-n_T\overline{Y}_{..}^2 \\
&= \sum_j \sum_i Y_{ij}^2-\frac{(\sum_j \sum_i Y_{ij})^2}{n_T}
\end{aligned}
$$

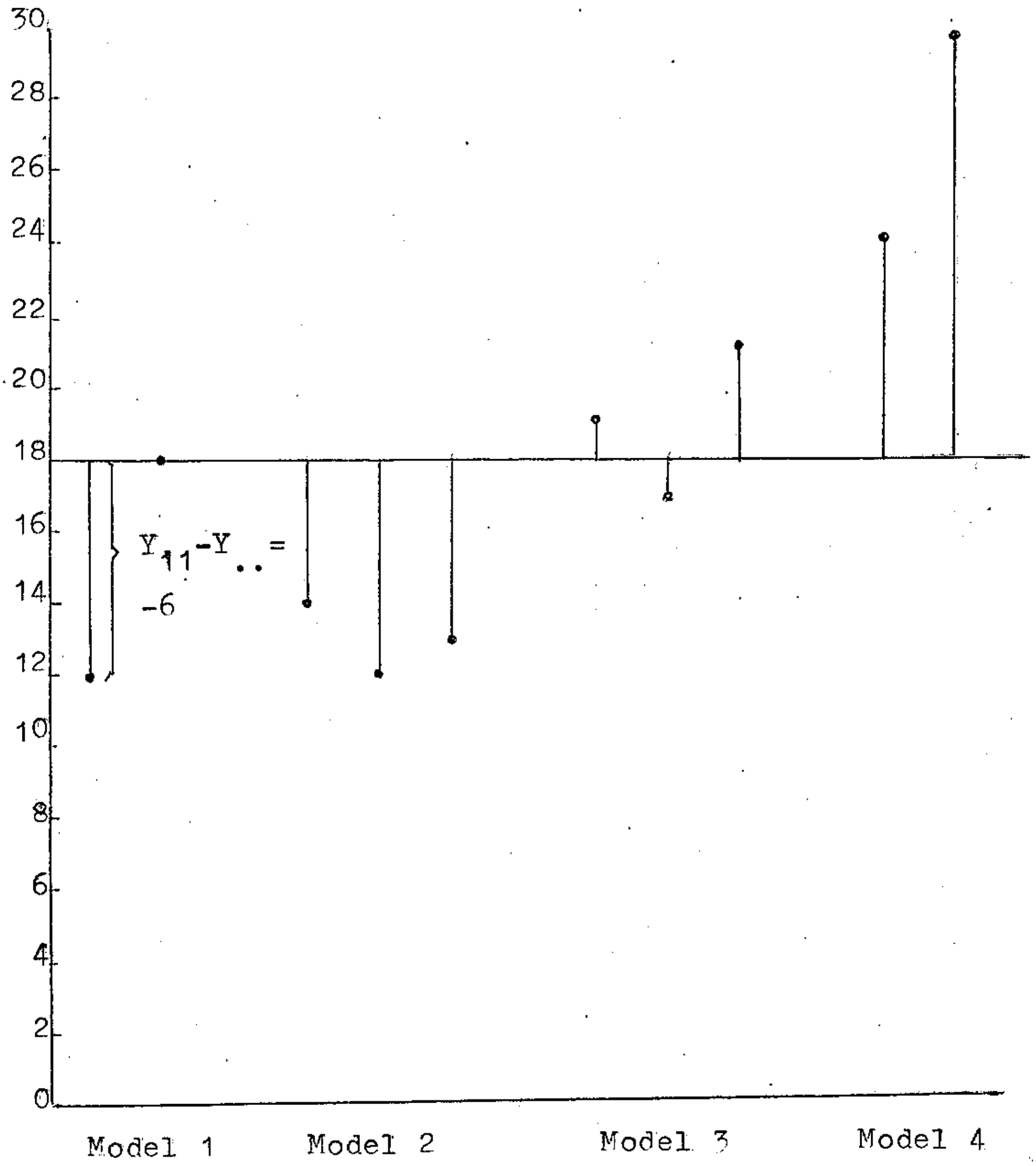
(3.39b)
$$
\begin{aligned}
SSTR &= \sum_j n_j(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2 \\
&= \sum_j n_j(\overline{Y}_{.j}-2\overline{Y}_{.j}\overline{Y}_{..}+\overline{Y}_{..}^{2}) \\
&= \sum_j n_j\overline{Y}_{.j}^{2}-2\sum_j n_j\overline{Y}_{.j}\overline{Y}_{..}+\sum_j n_j\overline{Y}_{..}^{2} \\
&= \sum_j n_j\overline{Y}_{.j}^{2}-2\,\overline{Y}_{..}\sum_j\Big(n_j\,\frac{\sum_i Y_{ij}}{n_j}\Big)+\sum_j n_j\overline{Y}_{..}^{2} \\
&= \sum_j n_j\overline{Y}_{.j}^{2}-2\overline{Y}_{..}\sum_j\sum_i Y_{ij}+n_T\overline{Y}_{..}^{2} \\
&= \sum_j n_j\overline{Y}_{.j}^{2}-2\,n_T\overline{Y}_{..}^{2}+n_T\overline{Y}_{..}^{2} \\
&= \sum_j n_j\overline{Y}_{.j}^{2}-n_T\overline{Y}_{..}^{2} \\
&= \sum_j\Big(\frac{(Y_{ij})^2}{n_j}\Big)-\frac{(\sum_j\sum_i Y_{ij})^2}{n_T}
\end{aligned}
$$

(3.39c)
$$
\begin{aligned}
SSE &= \sum_j\sum_i(Y_{ij}-\overline{Y}_{.j})^2 \\
&= \sum_j\sum_i(Y_{ij}^{2}-2Y_{ij}\overline{Y}_{.j}+\overline{Y}_{.j}^{2}) \\
&= \sum_j\sum_i Y_{ij}^{2}-2\sum_j\Big(\overline{Y}_{.j}\sum_i Y_{ij}\Big)+\sum_j n_j\overline{Y}_{.j}^{2} \\
&= \sum_j\sum_i Y_{ij}^{2}-2\sum_j\Big(\overline{Y}_{.j}n_j\,\frac{\sum_i Y_{ij}}{n_j}\Big)+\sum_j n_j\overline{Y}_{.j}^{2} \\
&= \sum_j\sum_i Y_{ij}^{2}-2\sum_j n_j\,\overline{Y}_{.j}^{2}+\sum_j n_j\,\overline{Y}_{.j}^{2} \\
&= \sum_j\sum_i Y_{ij}^{2}-\sum_j n_j\,\overline{Y}_{.j}^{2} \\
&= \sum_j\sum_i Y_{ij}^{2}-\sum_j n_j\,\frac{(\sum_i Y_{ij})^2}{n_j^2} \\
&= \sum_j\sum_i Y_{ij}^{2}-\sum_j\frac{(\sum_i Y_{ij})^2}{n_j}
\end{aligned}
$$

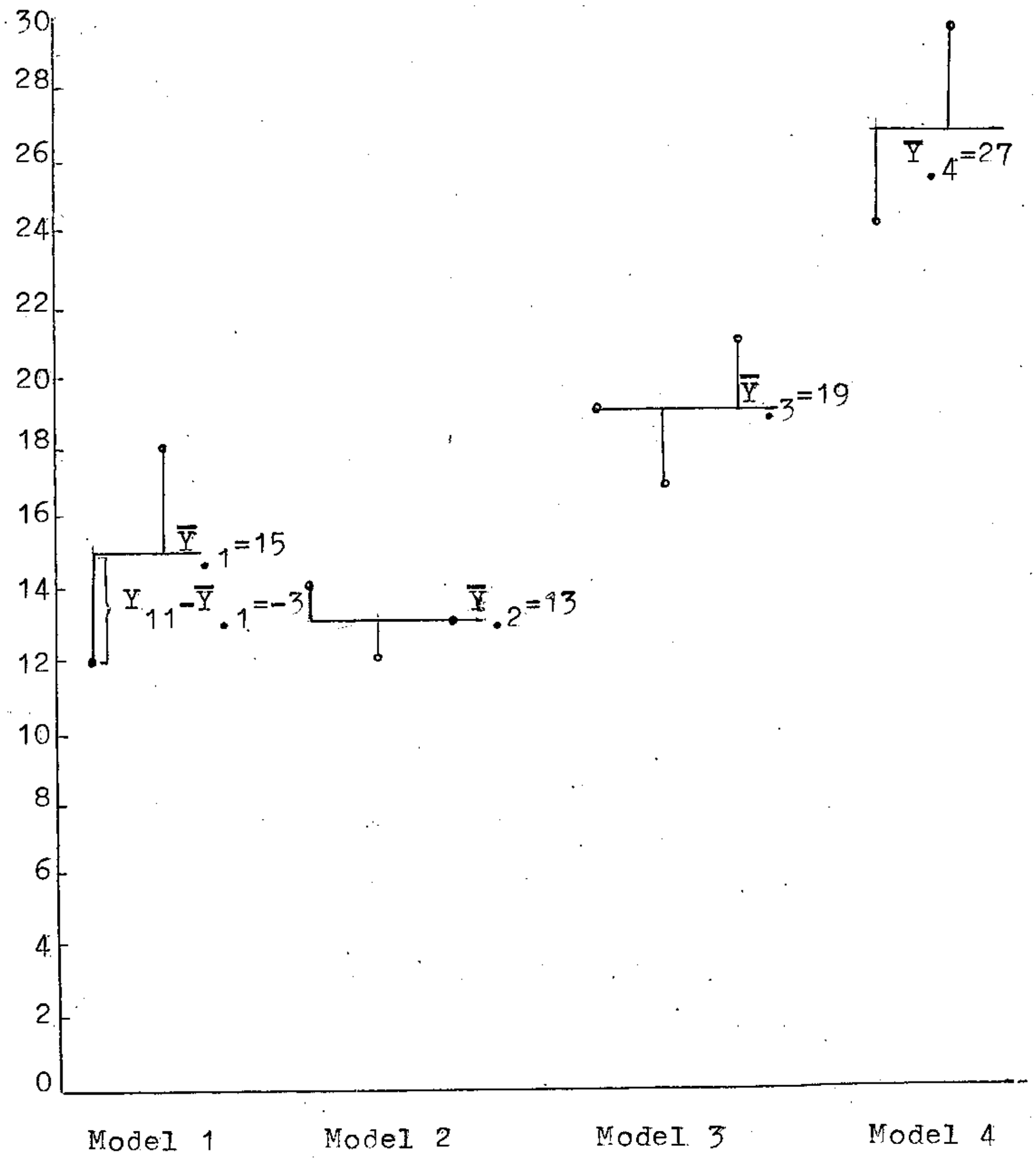
Gambar 3.1

Pemisahan dari $Y_{ij}-\overline{Y}_{..}$ untuk Data Pabrik Makanan Kenton

(a) Total selisih $Y_{ij}-\overline{Y}_{..}$



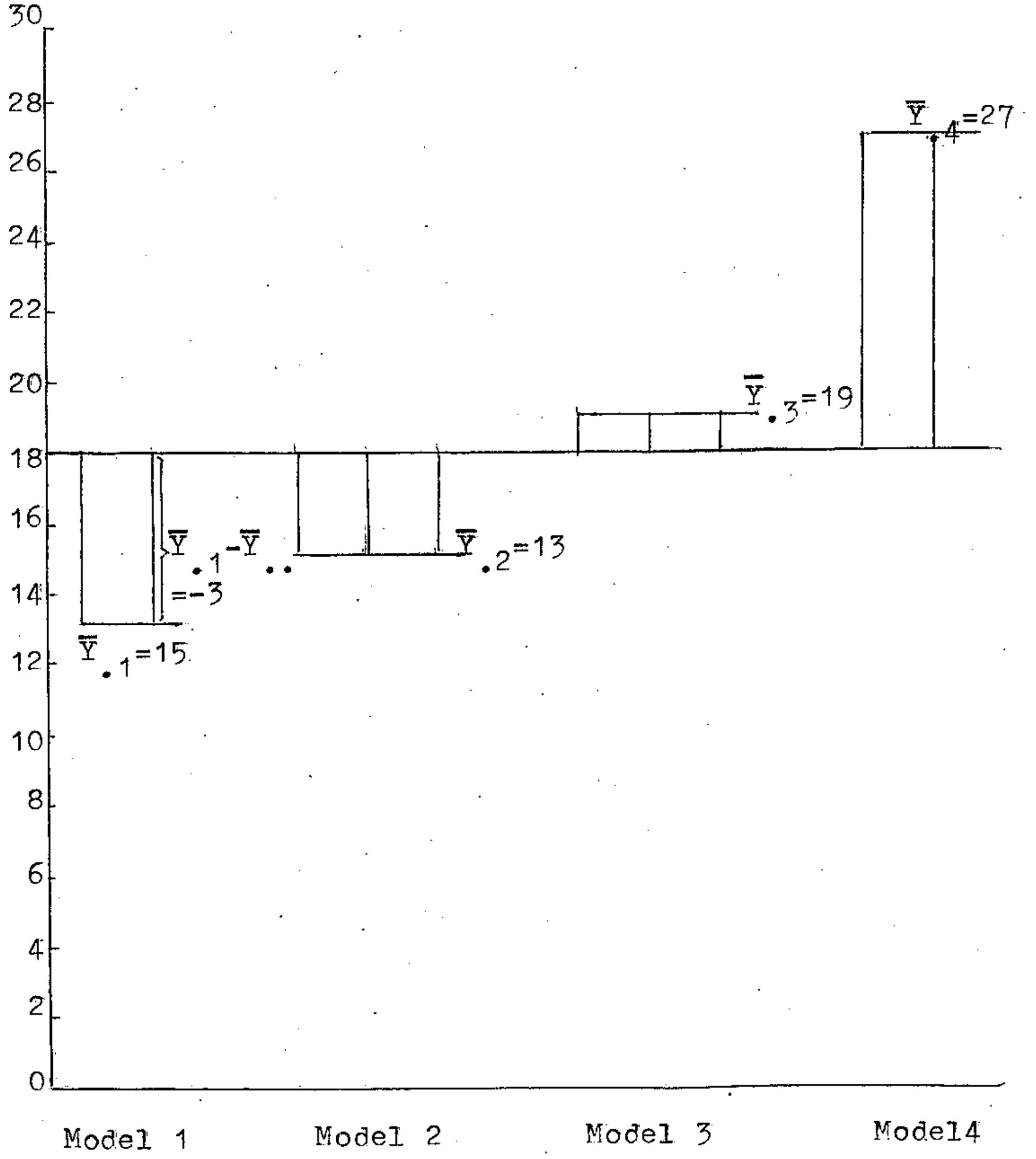
(b) Selisih diantara pengamatan pada tingkat Faktor ke-j dengan rata-rata tingkat Faktor ke-j : $Y_{ij}-\overline{Y}_{.j}$



(c) Selisih antara rata-rata tingkat

Faktor dengan rata-rata total

$\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..}$



Contoh:keputusan Analisa variansi pada jumlah kwadrat total untuk pabrik makanan Kenton data yang ada di Tabel 3.1a kita pakai,perhitungan menggunakan rumus yang ada di (3.39).

$$SSTO=(12)^2+(18)^2+(14)^2+.......+(30)^2-\frac{(180)^2}{10}$$

$$=3544-3240$$

$$=304$$

$$SSTR=\frac{(30)^2}{2}+\frac{(39)^2}{3}+\frac{(57)^2}{3}+\frac{(54)^2}{2}-\frac{(180)^2}{10}$$

$$=3498-3240$$

$$=258$$

$$SSE=3544-3498$$

$$=46$$

Jika SSTR dan SSE dijumlahkan sehingga

SSTR+SSE=258+46=304,ternyata sama dengan SSTO.

Perlu diperhatikan bahwa banyak seluruh variasi di dalam observasi berhubungan dengan variasi pada rata-rata dari tingkat Faktor.

Keputusan Derajat Kebebasan.

Sesuai komposisi pada jumlah kwadrat total,kita dapat juga memakainya untuk memutuskan derajat kebebasan dari SSTO,SSTR dan SSE.SSTO mempunyai n_T-1 derajat kebebasan.Di situ seluruhnya terdapat n_T observasi tetapi terdapat ketentuan pada selisih $(Y_{ij}-\bar{Y}_{..})$,yaitu

$\sum_j \sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{..})=0$.SSTR mempunyai r-1 derajat kebebasan,disitu ada r rata-rata tingkat Faktor $\bar{Y}_{.j}$,tetapi ada satu ketentuan pada selisih $(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})$,yaitu $\sum_j n_j(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})=0$

SSE mempunyai n_T-r derajat kebebasan,ini dapat berlaku dengan melihat pertimbangan komponen dari SSE untuk tingkat Faktor ke-j.

$$\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2 \tag{3.40}$$

Bentuk (3.40) sama seperti jumlah kwadrat total tetapi ia hanya menimbang tingkat Faktor ke-j,maka ada n_j-1 derajat kebebasan yang berhubungan dengan jumlah kwadrat ini.Karena SSE adalah jumlah kwadrat yang terdiri atas komponen penjumlahan kwadrat salah satu di (3.40),maka derajat kebebasan dari SSE adalah penjumlahan derajat kebebasan dari komponen yang ada.Jadi derajat kebebasan SSE adalah

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots\ldots+(n_r-1)=\sum_j^r n_j-r=n_T-r \tag{3.41}$$

Contoh:soal pabrik makanan Kenton,di sini $n_T=10$ dan $r=4$ jadi derajat kebebasan dari ketiga jumlah kwadrat di atas adalah:

SS	df
SSTO	10-1=9
SSTR	4-1=3
SSE	10-4=6

Jika dilihat derajat kebebasan dari SSTO sama dengan jumlahan derajat kebebasan SSTR dan SSE.

$$SSTO=SSTR+SSE$$

$$9=3+6$$

Rata-rata Kwadrat.

Rata-rata kwadrat didapat dengan membagi masing-masing jumlah kwadrat dengan derajat kebebasan sehingga

(3.42a) $$MSTR=\frac{SSTR}{r-1}$$

(3.42b) $$MSE=\frac{SSE}{n_T-r}$$

Di sini MSTR disebut rata-rata kwadrat perlakuan.

MSE disebut rata-rata kwadrat error.

Contoh:soal pabrik makanan Kenton,dari soal ini didapat

$$MSTR=\frac{258}{3}=86$$

$$MSE=\frac{46}{6}=7,67$$

Perlu diperhatikan bahwa penjumlahan kedua rata-rata kwadrat di atas tidak akan sama dengan $\frac{SSTO}{n_T-1} = 304 = 33,8$

Tabel Analisa Variansi.

Hasil dari jumlah kwadrat total dan derajat kebebasan bersama-sama dengan hasil rata-rata kwadrat dapat disajikan dalam suatu tabel ANOVA seperti Tabel 3.3.Contoh Tabel ANOVA pada pabrik makanan Kenton disajikan dalam Tabel 3.4.

TABEL 3.3.

Tabel ANOVA untuk Pelajaran Faktor-Tunggal.

Sumber Variasi	SS	df	MS	E(MS)
diantara perlakuan	$SSTR = \sum_j n_j (\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2$	$r - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{r-1}$	$\sigma^2 + \frac{1}{r-1} \sum_j n_j (\mu_j - \mu_.)^2$
error(didalam perlakuan)	$SSE = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \overline{Y}_{.j})^2$	$n_T - r$	$MSE = \frac{SSE}{n_T - r}$	σ^2
total	$SSTO = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2$	$n_T - 1$		

TABEL 3.4.

Tabel ANOVA untuk Penyelidikan Model Pembungkus.

Sumber Variasi	SS	df	MS
diantara model	258	3	86
error	46	6	7,67
total	304	9	

Ekspektasi Rata-rata Kwadrat.

Harga ekspektasi dari MSE dan MSTR dapat dilihat pada rumusan berikut ini:

(3.43a) $$E(MSE) = \sigma^2$$

(3.43b) $$E(MSTR) = \sigma^2 + \frac{\sum_j n_j(\mu_j - \mu_.)^2}{r-1}$$

(3.43c) $$E(MSTR) = \sigma^2 + \frac{\sum_j n_j \tau_j^2}{r-1}$$

dimana $\mu_.$ seperti didefinisikan di (3.13).Harga ekspektasi ini diperlihatkan pada kolom E(MS) di Tabel 3.3.

Dua masalah penting dari hasil-hasil di (3.43) yang patut diketahui :

1. MSE adalah estimator tak bias dari variansi ε_{ij} apakah rata-rata tingkat Faktor μ_j sama atau tidak.
2. Jika rata-rata tingkat Faktor μ_j semuanya berharga sama, besarnya sama dengan $\mu_.$ (atau pengaruh tingkat Faktor τ_j seluruhnya berharga nol)maka $E(MSTR)=\sigma^2$,karena $\frac{\sum_j n_j(\mu_j-\mu_.)^2}{r-1} = 0$,sehingga MSTR dan MSE adalah estimasi dari variansi error σ^2 jika rata-rata tingkat Faktor μ_j semua berharga sama.Akan tetapi jika rata-rata tingkat Faktor tidak sama maka rata-rata dari MSTR condong lebih besar daripada MSE karena $\frac{\sum_j n_j(\mu_j-\mu_.)^2}{r-1}$ positif.Pada gambar 3.1a dengan assumsi bahwa n_j=n melukiskan bahwa jika seluruh μ_j berharga

sama maka semua $\bar{Y}_{.j}$ akan berdistribusi sampling yang sama, dengan rata-rata $\mu_{.}$ dan variansi $\frac{\sigma^2}{n}$. Pada gambar 3.1b sebaliknya melukiskan bahwa jika μ_j tidak sama maka $\bar{Y}_{.j}$ akan berdistribusi sampling yang sama antara satu dengan yang lain dengan harga variansi yang sama yaitu $\frac{\sigma^2}{n}$, tetapi ada perbedaan utama pada rata-rata μ_j oleh sebab itu $\bar{Y}_{.j}$ akan condong berbeda antara satu dengan yang lain jika μ_j berbeda dibanding bila μ_j sama, dan konsekwensinya MSTR akan condong lebih besar waktu rata-rata tingkat Faktor tidak sama dibanding saat mereka berharga sama. Harga MSTR digunakan dalam rancangan uji statistik yang akan kita bahas pada bagian nanti untuk menentukan apakah rata-rata tingkat Faktor sama atau tidak. Jika MSTR dan MSE mempunyai harga yang sama, ini berarti bahwa rata-rata tingkat Faktor μ_j sama. Jika MSTR lebih besar dari MSE ini berarti bahwa rata-rata tingkat Faktor μ_j tidak sama.

Cara mencari E(MSE).

Untuk menemukan harga ekspektasi dari MSE, pertama kita tulis MSE sebagai berikut:

(3.44) $$MSE = \frac{1}{n_T - r} \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$$

$$= \frac{1}{n_T - r} \sum_j \left((n_j - 1) \frac{\sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2}{(n_j - 1)} \right)$$

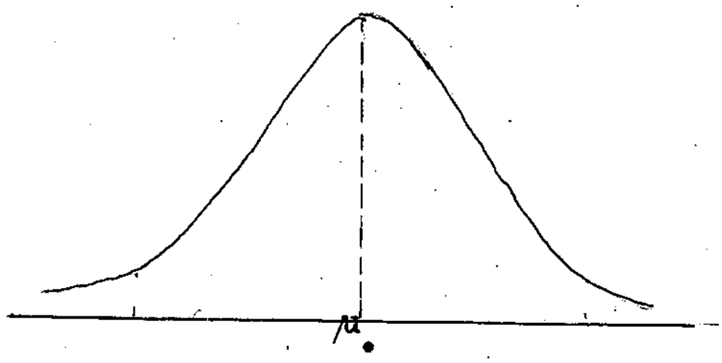
dimana variansi sampel pada observasi untuk tingkat Fak-

Gambar 3.1

Distribusi Sampling dari $\bar{Y}_{.j}$.

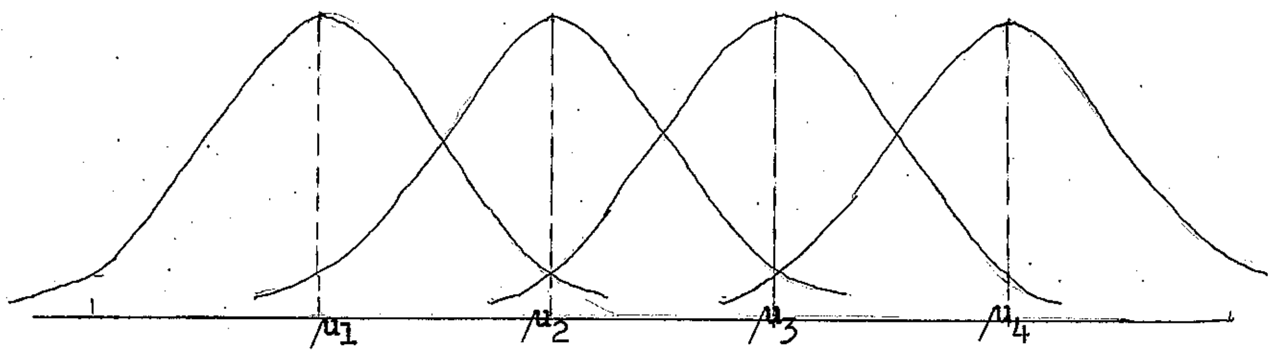
(a)

$\mu_j = \mu_.$



(b)

u_j tidak sama



tor ke-j adalah:

(3.45) $$s_j^2 = \frac{\sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2}{n_j-1}$$

sehingga rumus (3.44) dapat ditulis

$$MSE = \frac{1}{n_T-r} \sum_j (n_j-1)\ s_j^2, \text{dan}$$

(3.46) $$E(MSE) = \frac{1}{n_T-r} \sum_j (n_j-1)\ E(s_j^2)$$

$$E(s_j^2) = E\ \left(\sum_i \frac{(Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2}{n_j-1} \right)$$

$$= \frac{1}{n_j-1} E\ \left(\sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2 \right)$$

$$Y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}$$

$$Y_{ij}-\bar{Y}_{.j} = Y_{ij} - \frac{\sum_i Y_{ij}}{n_j}$$

$$= Y_{ij} - \frac{1}{n_j} \sum_i Y_{ij}$$

$$= \mu_j + \varepsilon_{ij} - \frac{1}{n_j} \left(\sum_i (\mu_j + \varepsilon_{ij}) \right)$$

$$= \mu_j + \varepsilon_{ij} - \frac{1}{n_j} \sum_i \mu_j - \frac{1}{n_j} \sum_i \varepsilon_{ij}$$

$$= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{n_j} \sum_i \varepsilon_{ij}$$

$$(Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2 = \varepsilon_{ij}^2 - 2\, \frac{\varepsilon_{ij} \sum_i \varepsilon_{ij}}{n_j} + \frac{1}{n_j^2} \left(\sum_i \varepsilon_{ij}\right)^2$$

$$\sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2 = \sum_i \varepsilon_{ij}^2 - 2\, \frac{\sum_i \varepsilon_{ij} \sum_i \varepsilon_{ij}}{n_j} + \frac{1}{n_j^2} \sum_i \left(\sum_i \varepsilon_{ij}\right)^2$$

$$\sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2 = \sum_i \varepsilon_{ij}^2 - 2\frac{(\sum_i \varepsilon_{ij})^2}{n_j} + \frac{1}{n_j^2}\, n_j (\sum_i \varepsilon_{ij})^2$$

$$= \sum_i \varepsilon_{ij}^2 - 2\frac{(\sum_i \varepsilon_{ij})^2}{n_j} + \frac{(\sum_i \varepsilon_{ij})^2}{n_j}$$

$$= \sum_i \varepsilon_{ij}^2 - \frac{(\sum_i \varepsilon_{ij})^2}{n_j}$$

$$E(\sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2) = E(\sum_i \varepsilon_{ij}^2 - \frac{(\sum_i \varepsilon_{ij})^2}{n_j})$$

$$= \sum_i E(\varepsilon_{ij}^2) - \frac{E(\varepsilon_{1j}+\varepsilon_{2j}+\varepsilon_{3j}+\ldots\ldots+\varepsilon_{n_j j})^2}{n_j}$$

$$= \sum_i E(\varepsilon_{ij}-E(\varepsilon_{ij}))^2 - \frac{E(\sum_i \varepsilon_{ij}^2 + 2\varepsilon_{1j}\varepsilon_{2j}+\ldots+2\varepsilon_{n_{j-1}j}\,\varepsilon_{n_j j})}{n_j}$$

$$= \sum_i \sigma^2(\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{n_j} E(\sum_i \varepsilon_{ij}^2 + 2\sum_{k>1}^{n_j}\sum_{i=1}^{n_j-1} \varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kj})$$

$$= n_j\sigma^2 - \frac{n_j}{n_j}\sigma^2 - \frac{2}{n_j}\sum_{k>1}^{n_j}\sum_{i=1}^{n_j-1} E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj})$$

$$= n_j\sigma^2 - \sigma^2 - 0$$

$$= (n_j-1)\sigma^2$$

hasil ini kita masukkan ke(3.46)didapat

$$E(s_j^2) = \sigma^2$$

sehingga variansi sampel adalah estimator tak bias variansi populasi. Jadi:

$$E(MSE) = \frac{1}{n_T - r}\sum_j (n_j-1)E(s_j^2)$$

$$E(MSE)=\frac{1}{n_T-r}\sum_j(n_j-1)\sigma^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{n_T-r}\left(\sum_j n_j-\sum_j 1\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n_T-r}(n_T-r)$$

$$=\sigma^2$$

Cara mencari E(MSTR).

Untuk penyenderhanaan bukti rumus (3.43b),kita akan ambil assumsi bahwa seluruh sampel berukuran sama,yaitu $n_j=n$.Sehingga rumus (3.43b) biasa ditulis

(3.47) $$E(MSTR)=\sigma^2+n\sum_j\frac{(\mu_j-\mu_.)^2}{r-1}\text{ jika } n_j=n$$

lalu jika seluruh sampel tingkat Faktor berukuran sama sebut n,MSTR yang terdefinisi di (3.37a) dan (3.42a) menjadi:

(3.48) $$MSTR= n\frac{\sum_j(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2}{r-1}\text{ jika } n_j=n$$

hasil (3.47),diperoleh dengan rumus model Y_{ij} di (3.2)

$$Y_{ij}=u_j+\varepsilon_{ij}$$

rata-rata dari tingkat Faktor ke-j,adalah

$$\frac{\sum_i Y_{ij}}{n}=\frac{\sum_i u_j}{n}+\frac{\sum_i\varepsilon_{ij}}{n},n_j=n$$

(3.49) $$\bar{Y}_{.j}=\mu_j+\bar{\varepsilon}_{.j}$$

di mana $\bar{\varepsilon}_{.j}$ adalah rata-rata dari ε_{ij} pada tingkat Faktor ke-j

(3.50) $$\bar{\varepsilon}_{.j}=\frac{\sum_i \varepsilon_{ij}}{n}$$

rata-rata seluruh observasi adalah

$$\sum_j \sum_i \frac{Y_{ij}}{n_T} = \sum_j \sum_i \frac{\mu_j}{n_T} + \sum_j \sum_i \frac{\varepsilon_{ij}}{n_T}$$

$$\bar{Y}_{..} = \sum_j \frac{\mu_j}{r} + \bar{\varepsilon}_{..}$$

(3.51) $$\bar{Y}_{..} = \mu_{.} + \bar{\varepsilon}_{..}$$

dimana $\bar{\varepsilon}_{..}$ adalah rata-rata seluruh ε_{ij} .

(3.52) $$\bar{\varepsilon}_{..}=\frac{\sum_j \sum_i \varepsilon_{ij}}{n_T}$$

karena ukuran sampel sama yaitu $n_j=n$,untuk setiap $j=1,2,.$ ......,r.Sehingga

(3.53) $$\bar{Y}_{..}=\frac{\sum_j \bar{Y}_{.j}}{r} \text{ dan } \bar{\varepsilon}_{..}=\frac{\sum_j \bar{\varepsilon}_{.j}}{r}$$

Rumus (3.54) dan (3.55) kita kurangkan hasilnya:

(3.54) $$\begin{aligned}\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..} &=(\mu_j+\bar{\varepsilon}_{.j})-(\mu_{.}+\bar{\varepsilon}_{..})\\ &=(\mu_j-\mu_{.})+(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})\end{aligned}$$

jika kita kwadratkan kemudian kita jumlahkan untuk tingkat Faktor,didapat:

(3.55) $$\sum_j(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2=\sum_j(\mu_j-\mu_{.})^2+\sum_j(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})^2+ 2\sum_j(\mu_j-\mu_{.})(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})$$

Sekarang akan kita cari harga $E(\sum_j(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2)$ sehingga kita harus mencari harga ekspektasi tiap bagian ruas kanan dalam (3.55)

1. Karena $\sum_j(\mu_j-\mu_.)^2$ adalah suatu konstanta maka

(3.56) $E(\sum_j(\mu_j-\mu_.)^2)=\sum_j(\mu_j-\mu_.)^2$

2. Sebelum mencari harga ekspektasi dari $\sum_j(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})^2$ kita perhatikan dulu bentuk ini: $\dfrac{\sum_j(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})^2}{r-1}$

Ini adalh bentuk umum dari variansi sampel, karena $\bar{\varepsilon}_{..}$ adalah rata-rata sampel dari r simbol $\bar{\varepsilon}_{.j}$ (3.53). Seperti telah kita ketahui bahwa variansi sampel adalah estimasi tak bias dari variansi variabel, dalam hal ini $\bar{\varepsilon}_{.j}$. Tetapi $\bar{\varepsilon}_{.j}$ adalah rata-rata n error dengan simbol ε_{ij} yang independent (3.50), maka:

$$\nabla^2(\bar{\varepsilon}_{.j})=\frac{\nabla^2(\varepsilon_{ij})}{n}=\frac{\nabla^2}{n}$$

sehingga

$$E\left(\frac{\sum_j(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})^2}{r-1}\right)=\frac{\nabla^2}{n}$$

jadi

(3.57) $$E(\sum_j(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..})^2)=\frac{(r-1)}{n}\nabla^2$$

3. Karena $\bar{\varepsilon}_{.j}$ dan $\bar{\varepsilon}_{..}$ adalah rata-rata dari ε_{ij}, maka semuanya mempunyai ekspektasi=0. Jadi $E(\bar{\varepsilon}_{.j})=0$ dan $E(\bar{\varepsilon}_{..})=0$ sehingga:

(3.58) $$E(2\sum_j(\mu_j-\mu_.)(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..}))=2\sum_j((\mu_j-\mu_.)E(\bar{\varepsilon}_{.j}-\bar{\varepsilon}_{..}))$$
$$=0$$

Hasil pada (3.56),(3.57) dan (3.58) kita jumlahkan didapat: $E(\sum_j(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2)=\sum_j(\mu_j-\mu_.)^2+\frac{r-1}{n}\sigma^2$

dan $E(MSTR)=E(n\sum_j\frac{(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2}{r-1})=\frac{n}{r-1}(\sum_j(\mu_j-\mu_.)^2+\frac{r-1}{n}\sigma^2)$

$$E(MSTR)=\sigma^2+\frac{n}{r-1}\sum_j(\mu_j-\mu_.)^2$$

3.4.Uji F untuk Kesamaan Rata-rata Tingkat Faktor.

Bisanya untuk mulai menganalisa pada suatu penyelidikan Faktor Tunggal dengan menentukan apakah rata-rata tingkat Faktor μ_j sama atau tidak.Misal pada model pembungkus dicontoh pabrik makanan Kenton,menunjukkan rata-rata volume penjualan,di situ tidak membutuhkan analisa lebih lanjut seperti menentukan model mana yang paling baik atau membandingkan dua model dalam usaha menaikkan volume penjualan.Adapun kesimpulan yang dapat kita timbang:

(3.59) $C_1: \mu_1=\mu_2=\ldots\ldots=\mu_r.$

$C_2:$ tidak semua μ_j sama.

cara lain

$C_1: \tau_1=\tau_2=\ldots\ldots=\tau_r=0$

$C_2:$ tidak semua $\tau_j=0$

Uji Statistik.

Uji statistik kita pakai untuk memilih diantara alternatif yang ada di (3.59) yaitu:

(3.60) $$F^*=\frac{MSTR}{MSE}$$

MSTR di sini berlaku sesuai dengan peranan MSR pada model Regresi

Jika harga MSTR condong melebihi harga MSE maka kita pilih kesimpulan C_2,hal ini telah diterangkan pada (3.43) sedang bila harga F^* hampir sama dengan 1 maka kita pilih kesimpulan C_1,ini terjadi bila harga ekspektasi dari MSTR dan MSE sama.

Distribusi dari F^*.

Pada pembahasan awal telah diterangkan bahwa SSTO diuraikan dalam 2 jumlah kwadrat (SS) yaitu:

(1) SSTR dengan derajat kebebasan r-1.

(2) SSE dengan derajat kebebasan n_T-1.

sehingga jumlah dari kedua derajat kebebasan di atas adalah n_T-1 di samping itu Y_{ij} berdistribusi Normal untuk seluruh $i=1,2,\ldots,n_j$.

$j=1,2,\ldots,r$

kemudian jika C_1 kita pilih ini berarti bahwa seluruh rata-rata perlakuan μ_j sama sehingga untuk setiap pengamatan Y_{ij} mempunyai harga ekspektasi yang sama yaitu:

$$E(Y_{ij})=E(\mu_j+\varepsilon_{ij})=\mu_j=\mu.$$

dan variansinya adalah $E(Y_{ij}-E(Y_{ij}))^2=E(\varepsilon_{ij})^2=\sigma^2(\varepsilon_{ij})=\sigma^2$ untuk seluruh $i=1,2,\ldots,n_j$ dan $j=1,2,\ldots,r$.

Menurut teorema Cochran's yang berbunyi:

"Jika seluruh n pengamatan Y_i berasal dari distribusi Normal yang sama dengan rata-rata μ dan variansi σ^2,dan SSTO diuraikan ke dalam k jumlah kwadrat SS_r, masing-masing dengan derajat kebebasan df_r maka $\frac{SS_r}{\sigma^2}$ merupakan variabel χ^2 dengan derajat df_r jika $\sum_{r=1}^{k} df_r = n-1$ ".

Maka:

(1) $\frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{\sum_j \sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2}{\sigma^2}$ merupakan variabel $\chi^2(n_T - r)$ independent dari $\bar{Y}_{.1}, \bar{Y}_{.2}, \ldots\ldots\ldots, \bar{Y}_{.r}$

(2) $\frac{SSTR}{\sigma^2} = \frac{\sum_j \sum_i (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2}{\sigma^2}$ merupakan variabel $\chi^2(r-1)$ yang merupakan fungsi dari $\bar{Y}_{.1}, \bar{Y}_{.2}, \ldots\ldots\ldots, \bar{Y}_{.r}$.

sehingga $\frac{SSE}{\sigma^2}$ dan $\frac{SSTR}{\sigma^2}$ independent.

Sekarang kita perhatikan uji statistik $F^* = \frac{MSTR}{MSE}$

F^* bisa kita tulis dengan
$$F^* = \frac{\frac{SSTR}{\sigma^2}}{r-1} : \frac{\frac{SSE}{\sigma^2}}{n_T - r}$$
$$= \frac{\chi^2(r-1)}{r-1} : \frac{\chi^2(n_T - r)}{n_T - r}$$

yang merupakan definisi dari $F(r-1; n_T - r)$. Jadi jika kita pilih C_1 maka F^* berdistribusi sebagai $F(r-1; n_T - r)$. Sebaliknya bila C_2 dipilih ini berarti tidak semua μ_j berharga sama maka F^* tidak berdistribusi F. Ia akan berdistribusi complex yang disebut distribusi non central F. Kita akan memakai distribusi F non central waktu membahas kekuatan uji F.

Rancangan Aturan Putusan.

Biasanya,resiko dari membuat error tipe I dipakai untuk mengontrol di dalam rancangan aturan putusan.Karena seperti telah kita ketahui bahwa F^* akan berdistribusi sebagai $F(r-1;n_T-r)$ jika C_1 kita pilih dan jika harga F^* besar kita condong memilih C_2 maka kelayakan aturan putusan pada tingkat signifikansi adalah:

(3.61) Jika $F^* \leqslant F(1-\alpha;r-1,n_T-r)$ pilih C_1.

Jika $F^* > F(1-\alpha;r-1,n_T-r)$ pilih C_2.

dimana $F(1-\alpha;r-1,n_T-r)$ adalah $(1-\alpha)$ 100 persent kelayakan distribusi F.

Contoh:lihat ilustrasi yang ada pada pabrik makanan Kenton.Kita ingin menguji apakah rata-rata penjualan dari keempat model pembungkus itu sama atau tidak.

C_1: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

C_2: tidak semua μ_j sama

Andaikata Pemimpin ingin mengontrol dengan resiko pada error tipe I di $\alpha=0,05$.Sehingga kita membutuhkan $F(0,95;3,6)$ dimana derajat kebebasan seperti ditunjukkan ditabel 3.4. Dari Tabel A-4"Distribusi F"kita peroleh $F(0,95;3,6)=4,76$ jadi aturan putusannya adalah:

Jika $F^* \leqslant 4,76$ pilih C_1.

Jika $F^* > 4,76$ pilih C_2.

Uji statistik dengan menggunakan data yang ada pada tabel 3.4 didapat: $F^* = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{86}{7,67} = 11,2$

Karena $F^*=11,2>4,76$ maka kita pilih C_2 yaitu bahwa rata-rata tingkat Faktor μ_j tidak sama, atau ke-4 model pembungkus yang berbeda itu tidak menunjukkan kesamaan dari rata-rata volume penjualan. Jadi kita dapat menyimpulkan relasi diantara model pembungkus dengan volume penjualan pada pabrik makanan Kenton.

Keputusan ini tidak mengejutkan bagi manager penjualan pabrik makanan Kenton. Dia memimpin penyelidikan, yang pertama pada tempat sebab dia berharap ke-4 model pembungkus mempunyai perbedaan pengaruh pada volume penjualan dan ini bersangkutan di dalam menemukan sifat-sifat yang terlihat dari perbedaan itu. Pada bab selanjutnya kita akan bahas yang kedua: susunan dari analisa yaitu bagaimana untuk menyelidiki sifat dari pengaruh tingkat Faktor bilamana ada perbedaan.

Pendekatan Umum Uji Linier.

Uji F menerangkan suatu pengujian dari sebuah model statistik Linier dengan tepat sehingga dia dapat diperoleh dengan metode umum.

1. Model lengkap adalah model (3.2)

(3.62) $\quad Y_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij}$ $\quad$ model lengkap.

Kelayakan model lengkap ditunjukkan pada estimator kwadrat terkecil $\hat{\mu}_j=\bar{Y}_{.j}$...............(3.22) dan hasil jumlah kwadrat error $SSE(F)=\sum_j \sum_i (Y_{ij}-\hat{Y}_{ij})^2=\sum_j \sum_i (Y_{ij}-\mu_j)^2$

$$=\sum_j \sum_i (Y_{ij}-\bar{Y}_{.j})^2$$

2. Model reduksi di bawah C_1 adalah:

(3.63) $$Y_{ij} = \mu_{.} + \varepsilon_{ij} \text{ model reduksi}$$

dimana $\mu_.$ adalah rata-rata seluruh tingkat Faktor. Kelayakan model reduksi ditunjukkan pada estimator kwadrat terkecil $\hat{\mu}_. = \bar{Y}_{..}$ dan hasil jumlah kwadrat:

$$SSE(R) = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2 = \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \mu_.)^2$$
$$= \sum_j \sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

3. Uji statistik umum:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{(n_T - 1) - (n_T - r)} : \frac{SSE(F)}{n_T - r}$$

Dengan catatan bahwa SSE(R) mempunyai $n_T - 1$ derajat kebebasan sebab di situ terdapat n_T observasi tetapi terdapat satu ketentuan pada selisih $(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})$ yaitu $\sum_j \sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_{..}) = 0$ dan SSE(F) mempunyai $n_T - r$ derajat kebesebab dengan melihat pertimbangan komponen dari SSE(F) untuk tingkat Faktor ke-j : $\sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$ bentuk ini seperti dengan bentuk SSE(R) hanya mempertimbangkan tingkat Faktor ke-j, maka ada $n_j - 1$ derajat kebebasan yang berhubungan dengan jumlah kwadrat ini. Karena SSE (F) adalah kwadrat yang terdiri dari komponen penjumlahan kwadrat salah satu $\sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2$, derajat kebebasan dari SSE(F) adalah jumlahan derajat kebebasan dari komponen yang ada, jadi derajat kebebasan SSE(F) adalah

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n_r - 1) = \sum_j n_j - r = n_T - r$$

Sehingga rumus yang ada pada (3.32) dan (3.37b) sesuai dengan SSE(R) dan SSE(F), jadi SSE(R)=SSTO dan SSE(F)=SSE. Oleh karena itu dengan (3.38) bahwa SSTO-SSE=SSTR, bila kita pakai uji statistik (3.60)

$$F^*=\frac{SSE(R)-SSE(F)}{(n_T-1)-(n_T-r)}:\frac{SSE(F)}{n_T-r}$$

$$=\frac{SSTR}{r-1}:\frac{SSE}{n_T-r}$$

$$=MSTR : MSE$$

$$=\frac{MSTR}{MSE}$$

Jika hanya ada 2 tingkat Faktor, jadi r=2 terlihat uji statistik F^* di (3.60) adalah equivalent dengan uji t pada dua populasi dua segi. Uji F di sini mempunyai (1, n_T-2) derajat kebebasan dan uji t mempunyai $n_1+n_2-2=n_T-2$ derajat kebebasan, kedua uji tersebut menunjukkan wilayah kritis yang sama. Untuk membandingkan 2 rata-rata populasi maka uji t biasanya lebih disukai dia dapat digunakan untuk menguji 2-segi atau 1-segi sedang uji F hanya digunakan untuk 2-segi.

3.5. Kekuatan Uji F.

Kekuatan uji F penting untuk menaksir perbedaan kelayakan dari pemakaian aturan putusan, dan juga untuk menentukan ukuran sampel yang dibutuhkan. Dengan kekuatan uji F kita menunjukkan probabilitas dari aturan putusan yang akan menunjuk kesimpulan C_2 apabila pada kenyataannya memang C_2 yang benar. Kekuatan uji F diberikan dengan rumus sebagai berikut:

(3.64) Kekuatan=P($F^* > F(1-\alpha; r-1, n_T-1) / \emptyset$)

dimana $\emptyset$ adalah parameter noncentrality yang merupakan suatu besaran dari ketidaksamaan μ_j.

(3.65) $$\emptyset = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\sum_j n_j(\mu_j - \mu_.)^2}{r}} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\sum_j n_j \tau_j^2}{r}}$$

dimana $\mu_.$ seperti terdefinisi di(3.13). Apabila seluruh sampel tingkat Faktor berukuran sama sebesar n, parameter $\emptyset$ menjadi:

(3.66) $$\emptyset = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{r}\sum_j(\mu_j - \mu_.)^2}$$

$$\emptyset = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{r}\sum_j \tau_j^2} \quad \text{, jika } n_j = n.$$

Untuk mengetahui besarnya probabilitas Kekuatan, kita harus mengetahui distribusi noncentrality F, ini distribusi sampling dari F jika C_2 yang dipilih. Perhitungan hasilnya sangat komplek. Untung ada grafik sehingga untuk menentukan besar probabilitas kekuatan menjadi sangat sederhana. Tabel A-9 "Fungsi Kekuatan untuk Analisa Variansi". Kebaikan kurve yang dipakai tergantung pada banyaknya tingkat Faktor, ukuran sampel dan juga pemakaian tingkat signifikansi di dalam aturan putusan. Tabel ini mengikuti aturan sebagai berikut:

1. Masing-masing halaman menunjukkan perbedaan v_1, besar derajat kebebasan pada pembilang dari F^*. Dalam hal ini v_1=r-1 atau banyak tingkat Faktor diambil satu. Tabelini

berisi $v_1=1,2,3,4,5$ dan 6, seperti ditunjukkan pada bagian sudut kiri atas dari setiap grafik.

2. Dua tingkat signifikansi, dengan notasi α digunakan pada grafik yaitu $\alpha=0,05$ dan $\alpha=0,01$. Ada 2 skala X yang tergantung kepada pemakaian jenis signifikansi. Selanjutnya bagian kiri dari kurva pada masing-masing peta menunjukkan $\alpha=0,05$ sedang bagian kanan $\alpha=0,01$
3. Di situ grafik-grafik terpisah untuk harga v_2 yang berbeda yang merupakan derajat kebebasan penyebut F^* dalam hal ini $v_2=n_T-r$. Indek grafik sesuai dengan harga dari v_2 pada bagian atas grafik. Karena hanya harga pilihan v_2 yang digunakan di dalam grafik, maka dibutuhkan satu untuk interpolasi pada harga tengah v_2.
4. Skala X menunjuk ϕ, parameter noncentral yang terdefinisi di (3.65).
5. Akhirnya skala Y memberikan kekuatan $=1-\beta$ dimana β adalah resiko dari pembuatan error tipe II.

Contoh:

1. Ada satu soal dengan $v_1=2, v_2=10, \phi=3$ dan $\alpha=0,05$, kita akan temukan pada tabel "Fungsi Kekuatan untuk Analisa Variansi" bahwa kekuatan $= 1-\beta$ kira-kira $= 0,983$.
2. Contoh soal pabrik makanan Kenton. Seorang analis ingin mengetahui kekuatan dari aturan putusan pada soal ini, khususnya dia ingin menimbang kejadian apabila $\tau_1=-3,5$ $\tau_2=-3, \tau_3=2$ dan $\tau_4=5$. Ingat bahwa mengatakan $\tau_4=5$ berar-

ti μ_4 lebih 5 barang dari $\mu_{.}$ rata-rata untuk seluruh model pembungkus. Jadi kita dapat harga ϕ sebagai berikut:

$$\phi = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{(2(-3,5)^2+3(-3)^2+3(2)^2+2(5)^2)}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sigma}(5,333)$$

Kita masih harus mengetahui σ, variability dari error ε_{ij} di dalam model. Andaikan dari pengalaman yang lalu diketahui bahwa $\sigma = 2,5$ sehingga: $\phi = \frac{1}{2,5}(5,333) = 2,13$

lebih lanjut kita mempunyai $v_1=r-1=3, v_2=n_T-r=6$, $=0,05$. Dari tabel "Fungsi Kekuatan untuk Analisa Variansi" didapat bahwa kekuatan$=1-\beta$ kira-kira sama dengan 0,72. Dengan kata lain di sana ada 72 kesempatan di dalam 100 kesempatan yang ada bahwa aturan putusan akan menunjukkan perbedaan rata-rata volume penjualan dari ke-4 model pembungkus apabila perbedaan telah ditetapkan terlebih dahulu.

Keterangan.

1. Jika aturan putusan dalam contoh model pembungkus dengan ketentuan seperti di atas tetapi dengan tingkat signifikansi=0,01, kekuatan akan berharga kira-kira sama dengan 0,36. Jadi semakin kecil resiko α semakin kecil kekuatan untuk sembarang ϕ yang diberikan dan oleh sebab itu resiko error tipe II lebih besar.
2. Diberikan harga sembarang ϕ meliputi banyak kombinasi

dari rata-rata tingkat Faktor μ_j atau pengaruh tingkat Faktor τ_j yang berbeda misal untuk contoh:

$\tau_1=-3,5$, $\tau_2=-3$, $\tau_3=2$, $\tau_4=5$ dan

$\tau_1=5$, $\tau_2=2$, $\tau_3=-3$, $\tau_4=-3,5$.

Kedua kombinasi di atas mempunyai harga ϕ yang sama yaitu = 2,13.Maka mereka mempunyai kekuatan yang sama.

3. Pengaruh kesalahan menetapkan harga σ pada menentukan kekuatan dapat mengakibatkan kesalahan yang besar.Contoh pada pabrik makanan Kenton,jika $\sigma=3,0$ menggantikan 2,5 maka ϕ akan berharga 1,78 dan kekuatan (untuk $\alpha=0,05$) akan menjadi 0,56 mengganti 0,72.
4. Jika ϕ besar berarti perbedaan diantara rata-rata tingkat Faktor akan besar sehingga kekuatannya akan tinggi dan oleh sebab itu probabilitas pada pembuatan error tipe II akan kecil untuk suatu pemberian resiko α pada pembuatan error tipe I.
5. Banyak penyelidikan-penyelidikan Faktor Tunggal dilakukan oleh karena ekspektasi rata-rata tingkat Faktornya berbeda dan bermaksud menyelidiki perbedaan itu. Resiko α digunakan dalam merancang aturan putusan untuk menentukan apakah rata-rata tingkat Faktor sama atau tidak dan seringkali memakai ukuran yang relatif tinggi (misal 0,05 atau 0,10 mengganti 0,01) untuk menaikkan harga kekuatan pada pengujian.
6. Tabel A-8 "Fungsi Kekuatan untuk Analisa Variansi" un-

tuk $v_1 = 1$ tidak ditemukan sebab untuk $v_1 = 1$ berarti membandingkan rata-rata 2 populasi, seperti telah kita ketahui bahwa uji F untuk 2 sisi sesuai atau equivalent dengan uji t dan grafik kekuatan untuk uji t dengan 2 sisi yang dibandingkan dapat dilihat di dalam tabel A-5 "Fungsi Kekuatan untuk Uji t Dua Sisi", dengan parameter noncentrality:

$$\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad (3.67)$$

dengan derajat kebebasan n_1+n_2-2.