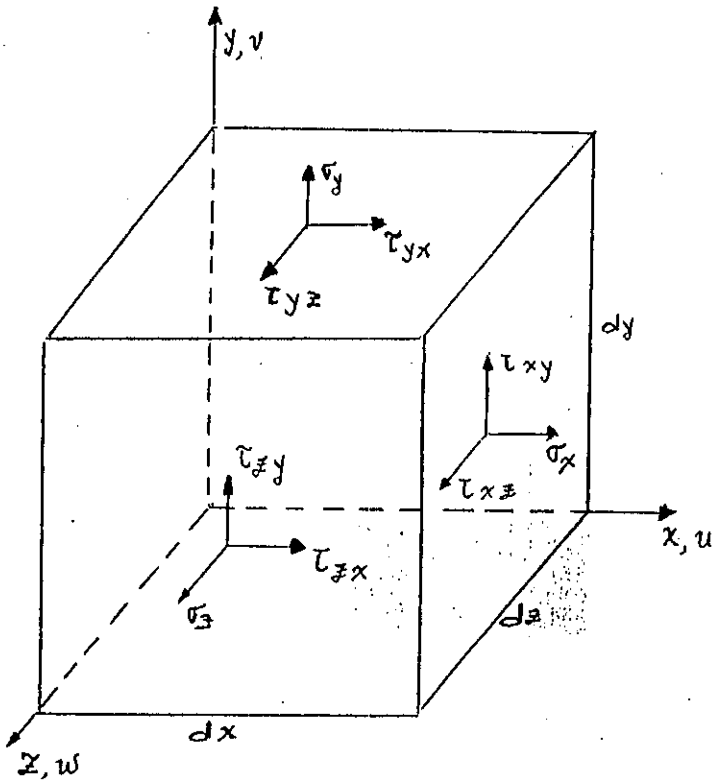
B A B I I I

METODE ELEMEN HINGGA UNTUK ANALISA STRUKTUR

III.1. Tegangan dan Regangan Dalam Kontinum Elastis

Dengan mengambil sebuah elemen kecil dalam sumbu koordinat kartesius dimana panjang sisi-sisinya dinyatakan dengan dx, dy dan dz. Akan diperlihatkan hubungan antara tegangan dan regangan pada suatu kontinum dallam sistem koordinat kutub (silinder) yang dinyatakan dengan dr, dθ dan dz.

Gambar berikut akan memperlihatkan elemen kecil tersebut.



Tegangan Normal:

σ_x, σ_y, σ_z

Tegangan Geser :

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$\tau_{xz} = \tau_{zx}$

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Kedua tegangan tersebut akan menibulkan regangan normal yang dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\epsilon_x = \delta u/\delta x \qquad \epsilon_y = \delta v/\delta y \qquad \epsilon_z = \delta w/\delta z$$

dimana u, v dan w merupakan translasi dalam arah x, y dan z. Sedangkan untuk regangan gesernya dapat dinyatakan dengan rumus.

$$\Gamma_{xy} = \delta u/\delta y + \delta v/\delta x = \Gamma_{yx}$$

$$\Gamma_{xz} = \delta u/\delta z + \delta w/\delta x = \Gamma_{zx}$$

$$\Gamma_{yz} = \delta v/\delta z + \delta w/\delta y = \Gamma_{zy}$$

hubungan tegangan dan regangan untuk material Isotropik diturunkan dari teori elastisitas sebagai berikut :

Rumus Umum Elastisitas : $E = \sigma/\epsilon$ ....<1>

dimana E = Elastisitas

σ = Tegangan

ϵ = Regangan

Apabila ditentukan gaya searah sumbu x maka didapat :

$$\epsilon_x = \sigma_x/E \qquad \epsilon_y = -v(\sigma_y/E) \qquad \epsilon_z = -v(\sigma_z/E) \qquad (a)$$

kearah sumbu y :

$$\epsilon_x = -v(\sigma_x/E) \qquad \epsilon_y = \sigma_y/E \qquad \epsilon_z = -v(\sigma_z/E) \qquad (b)$$

kearah sumbu z :

$$\epsilon_x = -v(\sigma_x/E) \qquad \epsilon_y = -v(\sigma_y/E) \qquad \epsilon_z = \sigma_z/E \qquad (c)$$

dimana v = konstanta Poison's Ratio

ket : v baja = 0.3 , selain baja = 0.25

Dari ketiga persamaan simultan tersebut dapat disusun satu persamaan simultan yaitu :

$$\epsilon_x = (1/E)(\sigma_x - v\sigma_y - v\sigma_z)$$

$$= (1/E)(\sigma_x - v(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\epsilon_y = (1/E)(\sigma_y - v(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\epsilon_z = (1/E)(\sigma_z - v(\sigma_y + \sigma_z)) \qquad (2)$$

Apabila Modulus Geser didefinisikan sebagai

$$G = E / 2(1+v) \qquad (3)$$

dan $\Gamma = \tau/G$ (rumus elastisitas) (4)

maka

$$\Gamma_{xy} = (1/G)(\tau_{xy})$$

$$\Gamma_{yz} = (1/G)(\tau_{yz})$$

$$\Gamma_{zx} = (1/G)(\tau_{zx}) \qquad (5)$$

dalam bentuk matriks , hubungan yang terdapat pada persamaan (2) dan (3) dapat dituliskan sebagai :

$$\epsilon = \mathbf{C}\,\sigma \qquad (6)$$

dimana

$$\mathbf{C} = (1/E)\begin{bmatrix} 1 & -v & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & -v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix} \qquad (7)$$

matrik C merupakan operator yang menghubungkan vektor regangan ϵ dengan vektor tegangan σ dan dengan meginverskan persamaan (6) akan didapatkan hubungan tegangan-regangan sebagai berikut :

$$\sigma = \mathbb{E}\,\epsilon \qquad (8)$$

dimana E merupakan Invers dari C

apabila $\mathbf{C} = (1/E)\,\mathbf{A}$

maka (untuk mempermudah penulisan pada matrik berikut, maka kami definisikan : a = 1-v ; b = 1+v ; c = 1-2v)

$$A_{djoin} = \begin{bmatrix} 8ab^4 & 8vb^4 & 8vb^4 & 0 & 0 & 0 \\ 8vb^4 & 8ab^4 & 8vb^4 & 0 & 0 & 0 \\ 8vb^4 & 8vb^4 & 8ab^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4cb^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4cb^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4cb^4 \end{bmatrix}$$

Determinan $\mathbf{A} = |\,\mathbf{A}\,|$

$$= 8\,(1+v)^5\,(1-2v)$$

$$A^{-1} = Ad_{join} / | A |$$

$$= \begin{bmatrix} a/bc & v/bc & v/bc & 0 & 0 & 0 \\ v/bc & a/bc & v/bc & 0 & 0 & 0 \\ v/bc & v/bc & a/bc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2b \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{bc} \begin{bmatrix} a & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & a & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ½c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ½c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ½c \end{bmatrix}$$

sehingga didapat $E = E\ A^{-1}$

$$= \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ½(1-2v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ½(1-2v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ½(1-2v) \end{bmatrix}$$

Matriks E adalah suatu operator yang menghubungkan vektor tegangan σ dan vektor regangan ϵ.

III.2. Metode Elemen Hingga yang didasarkan pada Usaha Virtual.

Prinsip Usaha Virtual :

"Bila pada suatu struktur dalam keadaan seimbang, dikerjakan suatu peralihan virtual yang kecil dalam batas-batas deformasi yang masih dapat diterima, maka usaha virtual dari beban luar tadi sama dengan energi

regangan virtual dari tegangan dalamnya".

Apabila prinsip tersebut diterapkan pada elemen hingga, akan diperoleh :

$$\delta U = \delta W \qquad (1)$$

dimana δU = Energi regangan virtual dari tegangan dalam

δW = Usaha Virtual beban luar yang bekerja pada elemen

Pandang suatu elemen hingga tiga dimensi yang terletak pada salib sumbu cartesius dengan koordinat X, Y dan Z dengan arah translasinya u, v dan w. Dari situ dapat kita buat beberapa definisi sebagai berikut :

Peralihan umum didefinisikan sebagai

$$\mathbf{U} = \{ u, v, w \}.$$

Gaya Tubuh yang bekerja didefinisikan sebagai

$$\mathbf{b} = \{ b_x, b_y, b_z \}.$$

Titik Nodal didefinisikan sebagai

$$\mathbf{q} = \{ q_i \}$$

$$= \{ q_{xi} , q_{yi} , q_{zi} \}$$

$$= \{ u_i , v_i , w_i \} \qquad (a)$$

Sedangkan titik nodal dari gaya tubuh adalah

$$\mathbf{p} = \{ p_i \}$$

$$= \{ p_{xi} , p_{yi} , p_{zi} \} \qquad (b)$$

dengan $i = 1$ s/d n_{en}, dimana n_{en} = Jumlah titik nodal elemen.

Apabila didefinisikan fungsi bentuk peralihan sebagai

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}\ \mathbf{q} \qquad (c)$$

dimana **f** adalah suatu operator berbentuk vektor yang menyatakan bahwa **u** sepenuhnya tergantung pada **q**. sedangkan hubungan Regangan-peralihan didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{d}\ \mathbf{u} \qquad (d)$$

dimana operator **d** adalah suatu operator deferensial linier yang menghubungkan vektor ϵ dan vektor u. Maka dengan mensubstitusikan kedua persamaan tersebut akan didapat suatu persamaan

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{d}\ \mathbf{f}\ \mathbf{q} \text{ atau } \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{q} \text{ dengan } \mathbf{B} = \mathbf{d}\ \mathbf{f} \qquad (e)$$

Matrik B menunjukkan regangan yang terjadi pada sebarang titik dalam elemen akibat satu satuan peralihan titik nodal. Apabila diketahui bahwa $\sigma = E\ \boldsymbol{\epsilon}$, maka dengan mensubstitusikan persamaan tersebut ke persamaan (e) maka akan didapat

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\ \mathbf{B}\ \mathbf{q} \qquad (f)$$

dimana **E B** menunjukkan tegangan pada sembarang titik bila terjadi satu satuan peralihan titik nodal.

Untuk mendapatkan kedua nilai δU dan δW tersebut, diasumsikan adanya peralihan virtual (semu) kecil $\boldsymbol{\delta}$ **q**. Sehingga

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u} = \mathbf{f}\ \boldsymbol{\delta}\ \mathbf{q} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{\delta\epsilon} = \mathbf{B}\ \boldsymbol{\delta}\ \mathbf{q} \qquad (g)$$

mengingat rumus energi regangan virtual (semu) pada batang :

$U = F\ \Delta L$ dimana F = gaya

$= F\ (\ \Delta L\ /\ L\ )\ L$ L = Panjang batang

$F = \sigma\ A$ ΔL = Perpanjangan

$= \sigma\ (\ \Delta L\ /\ L\ )\ A\ L$ A = Luas Penampang

$= \sigma\ (\ \Delta L\ /\ L\ )\ V$ V = Volume Benda

sehingga σ = tegangan

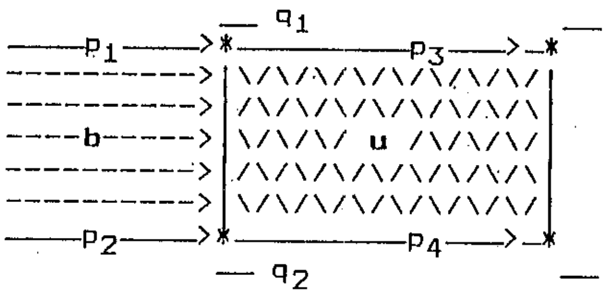
$U = \sigma\ \epsilon\ V$ ϵ = regangan

Dengan meganalogkan antara rumus energi regangan virtual pada batang dan rumus energi regangan virtual pada plat maka dapat kita tuliskan

$$\delta\ U = \int_V \delta\ \epsilon^T\ \sigma\ d\ V \qquad (2)$$

(ket: agar perkalian antara ϵ dan σ bisa menjadi skalar atau ordo 1 x 1 maka salah satunya harus ditransposekan dan diletakkan didepan).

Sedangkan Usaha Virtual luar dari gaya titik nodal dan gaya tubuh adalah sebagai berikut. untuk lebih jelasnya bisa digambarkan sebagai berikut:



p_i = gaya titik nodal
q_i = Peralihan Titik nodal
b = gaya tubuh
u = Peralihan Umum

apabila "Usaha = Gaya x Perpindahan" sehingga didapat :

$$\delta W = \delta q^T\ p + \int_V \delta u^T b\ dV \qquad (3)$$

$$\delta U = \delta W$$

$$\Leftrightarrow \int_V \delta\epsilon^T\sigma dV = \delta q^T p + \int_V \delta u^T b dV$$

diketahui $\delta\epsilon = B\delta q \Leftrightarrow \delta\epsilon^T = B^T\delta q^T$

dan $\delta u = f\delta q \Leftrightarrow \delta u^T = f^T\delta q^T$

$$\Leftrightarrow \int_V \delta B^T\delta q^T\sigma dV = \delta q^T p + \int_V \delta f^T\delta q^T b dV \quad : \delta q^T$$

$$\Leftrightarrow \int_V \delta B^T\sigma dV = p + \int_V \delta f^T b dV$$

diketahui $\sigma = E\ \epsilon$ dan $\epsilon = B\ q$

$$\Leftrightarrow \int_V \delta B^T E\epsilon dV = p + \int_V \delta f^T b dV$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_V \delta B^T E B dV \right) q = p + \int_V \delta f^T b dV$$

Apabila diasumsikan persamaan tersebut sebagai :

$$K\ q = p + p_b \qquad (4)$$

dimana $K = \int_V \delta\ B^T\ E\ B\ dV$ (5)

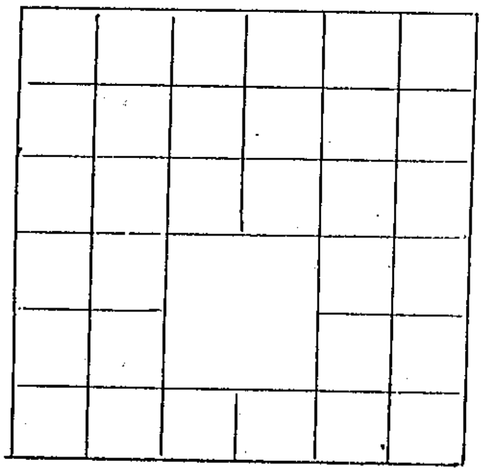
adalah matrik kekakuan elemen, yaitu gaya yang terjadi pada titik nodal sebagai akibat dari adanya satu satuan peralihan titik nodal .

$$P_b = \int_V \delta f^T b dV \qquad (6)$$

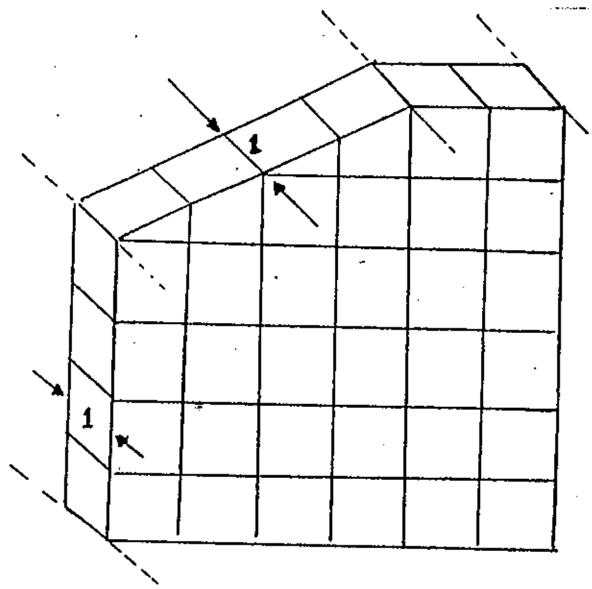
adalah gaya nodal equivalent, yaitu gaya yang diakibatkan oleh bekerjanya gaya tubuh dalam vektor **b**

III.3. TEGANGAN DAN REGANGAN DUA DIMENSI

Bila suatu pelat tipis dibebani gaya dalam arah sejajar dengan bidang pelat, maka keadaan tegangan dan deformasi pada pelat tadi disebut tegangan bidang.



tegangan bidang

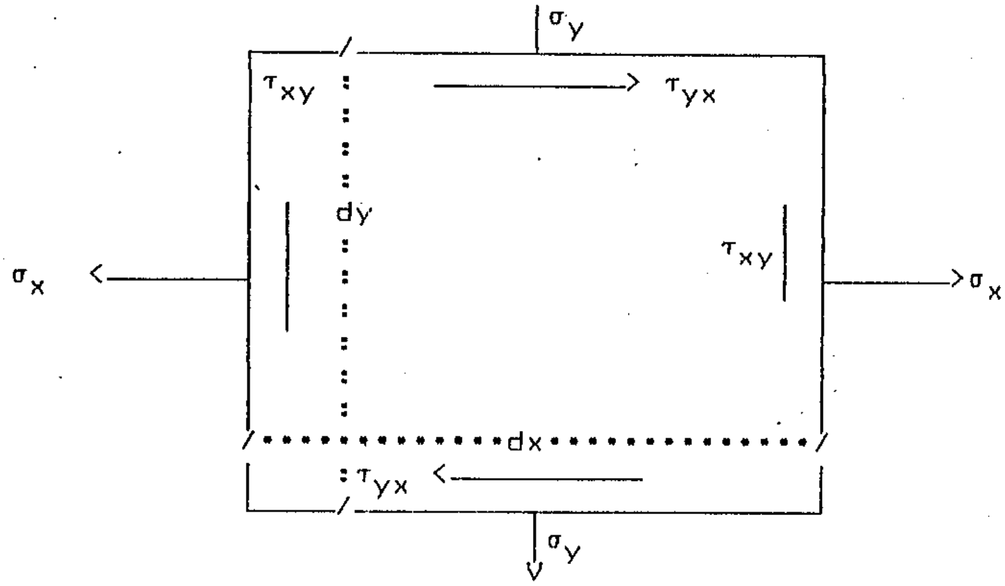


Regangan bidang

Jika sebuah benda pejal prismatis dapat dibebani oleh beban konstan pada arah normal terhadap sumbunya, maka benda tersebut dapat dianalisa sebagai sebuah keping kecil dua dimensi persatuan tebal yang disebut sebagai regangan bidang.

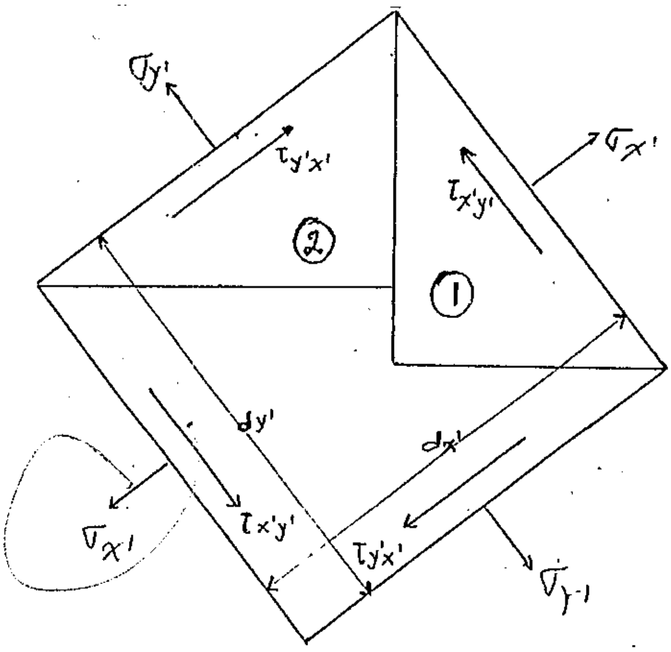
Gambar berikut memperlihatkan sebuah elemen kecil sekali dengan ukuran dx kali dy yang memiliki tegangan normal σ_x dan σ_y yang bekerja dengan arah x dan y, sedangkan tegangan gesernya τ_{xy} yang bekerja pada sisi x arah y dan τ_{yx} yang bekerja pada sisi y arah x. Dari ketiga tipe tegangan bebas ini dapat dibentuk sebuah vektor sebagi berikut :

$$\sigma = \{ \sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} \} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$



tegangan dua dimensi

Sedangkan gambar berikut memperlihatkan tegangan dalam arah miring, dimana tegangan dalam arah x' dan y' membentuk sudut θ terhadap sumbu x dan y.



tegangan dalam arah miring

Apabila kita perhatikan pada segmen 1, maka dengan mudah dapat didapatkan hasil jumlahan gaya dalam arah x' sebagai berikut :

$$F = \sigma \quad A$$

apabila F adalah gaya

σ adalah tegangan

A adalah luas sisi

$$F_x = \sigma_x \; t \; dx$$

$$F_{x'} = \sigma_{x'} t \; dx = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta$$

$$= (\sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta) \cos\theta \; t \; dx + (\sigma_y \sin\theta + \tau_{yx} \cos\theta) \sin\theta \; t \; dx$$

$$= (\sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2 \; \tau_{xy} \sin\theta \cos\theta) t \; dx$$

sehingga

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2 \; \tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad \text{...(b)}$$

Dengan cara yang sama, pada segmen ke 2 didapatkan :

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta + 2 \; \tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad \text{...(c)}$$

Pada akhirnya penjumlahan gaya dalam arah y' pada gambar segmen 1 akan didapatkan :

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad \text{........ (d)}$$

Apabila diasumsikan bahwa **$\sigma' = To \; \sigma$**

dan **To** merupakan operator yang berbentuk

$$\mathbf{To} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2 \sin\theta \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2 \sin\theta \cos\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & \sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad \text{(d)}$$

maka matrik ini penting digunakan untuk menghitung tegangan miring yang membentuk sudut θ terhadap arah x dan arah y.

Dengan mensubstitusikan identitas sudut ganda kedalam persamaan (b), (c), dan (d) akan dihasilkan :

$$\sigma_{x'} = \tfrac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \text{(e)}$$

$$\sigma_{y'} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos2\theta - \tau_{xy}\sin2\theta \quad (f)$$

$$\sigma_{x'y'} = -\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin2\theta + \tau_{xy}\cos2\theta \quad (g)$$

jika (e) + (f) ==> $\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$

ini membuktikan bahwa jumlahan tegangan normal akan selalu tetap meskipun arahnya berbeda.

Untuk mendapatkan arah tegangan utama dengan cara menurunkan persamaan (e) terhadap θ dan menyamakan hasilnya dengan nol.

$$d\sigma_{x'}/d\theta = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin2\theta + 2\tau_{xy}\cos2\theta = 0$$

$$\sin2\theta = 2\tau_{xy}\cos2\theta / (\sigma_x - \sigma_y)$$

maka :

$$\tan2\theta = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y)$$

sehingga:

$$\sin2\theta_p = (2\tau_{xy}) / \sqrt{(2\tau_{xy})^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

$$\cos2\theta_p = (\sigma_x - \sigma_y) / \sqrt{(2\tau_{xy})^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

dimana $\theta_p = \theta$ tegangan utama

Dengan mensubstitusikan kedua persamaan tersebut ke persamaan (e), (f), dan (d) akan didapatkan persamaan tegangan normal utama dan tegangan gesernya sebagai berikut :

$$\sigma_{p1} = \sigma_x = \tfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y))^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$= \sigma'_{max}$$

$$\sigma_{p2} = \sigma_y = \tfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)-\sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y))^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$= \sigma'_{min}$$

$$\tau_{x'y'} = 0 \quad (h)$$

Jadi tegangan geser akan nol jika tegangan normal mencapai nilai ekstremnya.

Sebaliknya, sudut tegangan geser maksimum τ'_{max} dapat dicari dengan menurunkan persamaan (g) terhadap θ dan hasilnya sama dengan nol seperti berikut :

$d\tau_{x'y'} / d\theta = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}$

maka $\text{tg } 2\theta_s = -(\sigma_x - \sigma_y)/2\tau_{xy}$

dimana $\theta_s = \theta_p \pm \pi/4 = \theta$ tegangan geser maximum.

$\sin 2\theta_s = (\sigma_y - \sigma_x)/2\sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$

$\cos 2\theta_s = \tau_{xy} / 2\sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\tau_{xy})^2}$

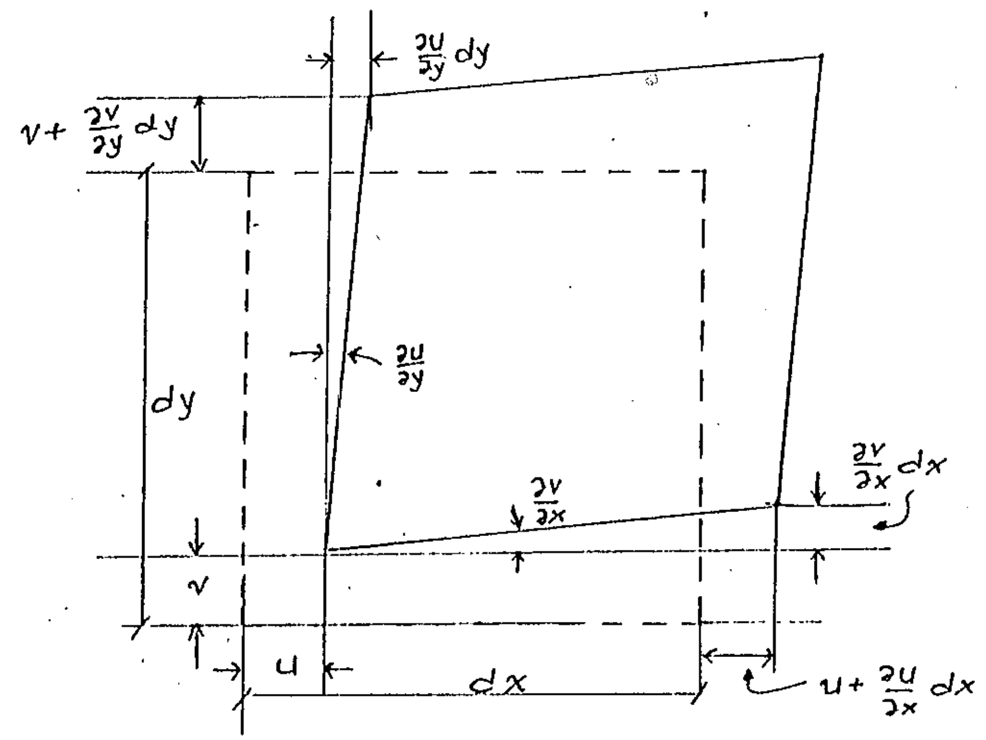
Jika $\tau_{x'y'} = -\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

Maka $\tau'_{max} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\tau_{xy})^2}$

dan $\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$. (i)

Tegangan-tegangan ini selalu terjadi pada sudut $\pm \tfrac{1}{4}\pi$ terhadap arah tegangan utama

Gambar berikut menunjukkan regangan dalam dua dimensi dengan perpindahan sebesar u dan v arah x dan y.



dengan jenis regangan :

$$\epsilon = \{ \epsilon_x , \epsilon_y , \Gamma_{xy} \} \quad \text{..............(j)}$$

dimana $\epsilon_x = \delta u/\delta x$ $\qquad \epsilon_y = \delta v/\delta y$

$$\Gamma_{xy} = \delta u/\delta y + \delta v/\delta x \quad \text{..............(k)}$$

ϵ_x dan ϵ_y adalah regangan normal sedang Γ_{xy} adalah regangan gesernya. Regangan-regangan tersebut sebagai akibat dari tegangan seperti yang ditunjukkan pada persamaan $\sigma = \{ \sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} \}$. persamaan (k) tersebut disebut " hubungan regangan-peralihan " dimana dalam bentuk vektornya : $\epsilon = d\, u$ ....(l)

$$\text{dimana} \quad d = \begin{bmatrix} \delta/\delta x & 0 \\ 0 & \delta/\delta y \\ \delta/\delta y & \delta/\delta x \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad u = \{u,v\}$$

sedangkan regangan dalam arah miring (x' , y'), untuk menelitinya bisa disamakan antara sumbu utama dan bukan utamanya pada kepadatan energi regangan virtual komplemennya.

$$(\delta \sigma')^T \epsilon' = (\delta \sigma)^T \epsilon$$

apabila diketahui $\sigma' = T_o \sigma \implies \delta \sigma' = \delta T_o \sigma$

Jadi $(\delta T_o \sigma)^T \epsilon' = (\delta \sigma)^T \epsilon$

$$(\delta \sigma)^T T_o^T \epsilon' = (\delta \sigma)^T \epsilon$$

$$\epsilon = T_o^T \epsilon'$$

atau $\epsilon = T_o^{-T} \epsilon'$ (m)

dimana

$$T_o^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta \cos\theta \\ -2 \sin\theta \cos\theta & 2 \sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

operator T_o^{-T} adalah Invers transpose dari operator To^T apabila

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta + \Gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta \qquad (n)$$

$$\epsilon_{y'} = \epsilon_x \sin^2\theta + \epsilon_y \cos^2\theta - \Gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{x'y'} = -2 (\epsilon_x - \epsilon_y)\sin\theta \cos\theta + \Gamma_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (o)$$

dengan mensubstitusikan identitas sudut ganda maka didapat :

$$\epsilon_{x'} = ½ (\epsilon_x + \epsilon_y) + ½ (\epsilon_x - \epsilon_y)\cos 2\theta + 2 \Gamma_{xy} \sin 2\theta$$

$\epsilon_{y'} = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{2} (\epsilon_x - \epsilon_y)\cos 2\theta - 2\, \Gamma_{xy} \sin 2\theta$

$\Gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\sin 2\theta + \Gamma_{xy} \cos 2\theta$ (p)

$d\epsilon_{x'}/d\theta = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\sin 2\theta + 4\, \Gamma_{xy} \cos 2\theta = 0$

$tg 2\theta = 4\Gamma_{xy} / (\epsilon_x - \epsilon_y)$

$\sin 2\theta = 4\Gamma_{xy} / \sqrt{(4\, \Gamma_{xy})^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2}$

$\cos 2\theta = (\epsilon_x - \epsilon_y) / \sqrt{(4\, \Gamma_{xy})^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2}$ (q)

sehingga persamaan Regangan normal utama :

$\epsilon_{x'max} = \epsilon'_{max} = \frac{1}{2} (\epsilon_x - \epsilon_y) + \sqrt{\frac{1}{4} (\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (2\Gamma_{xy})^2}$

$\epsilon'_{min} = \frac{1}{2} (\epsilon_x - \epsilon_y) - \sqrt{\frac{1}{4} (\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (2\Gamma_{xy})^2}$

$\Gamma_{x'y'} = 0$ (r)

Sedangkan regangan geser maksimumnya :

$d\Gamma_{x'y'}/d\theta = -2(\epsilon_x - \epsilon_y)\cos 2\theta - 2\Gamma_{xy} \sin 2\theta = 0$

$tg 2\theta = -\Gamma_{xy} / (\epsilon_x - \epsilon_y)$

$\sin 2\theta = -\Gamma_{xy} / \sqrt{(\Gamma_{xy})^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2}$

$\cos 2\theta = (\epsilon_x - \epsilon_y) / \sqrt{(\Gamma_{xy})^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2}$ .... (s)

$\Gamma_{x'y'max} = \Gamma'_{max}$

$= ((\epsilon_x - \epsilon_y)\Gamma_{xy} + \Gamma_{xy} (\epsilon_x - \epsilon_y)) / \sqrt{(\Gamma_{xy})^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2}$

$= 2\Gamma_{xy}(\epsilon_x - \epsilon_y) / \sqrt{(\Gamma_{xy})^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2}$

sehingga : $\epsilon_{x'} = \epsilon_{y'} = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y)$ (t)

Dengan mengasumsikan material Isotropik, dapat dicari hubungan tegangan-Regangan, baik untuk tegangan bidang maupun regangan bidang.

Tegangan bidang didasarkan atas asumsi bahwa :

$\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; $\Gamma_{xz} = \Gamma_{yz} = 0$; $\epsilon_z \neq 0$

Dengan menuliskan regangan sebagai fungsi dari tegangan, dapat diperoleh :

$\epsilon_x = (\sigma_x - v\, \sigma_y) / E$

$\epsilon_y = (-\sigma_x + \sigma_y) / E$

$\epsilon_z = -(\sigma_x + \sigma_y)\, v / E$

$\Gamma_{xy} = \tau_{xy} / G = 2\, (1 + v)\, \tau_{xy} / E$ (u)

Apabila Tegangan adalah fungsi dari Regangan, maka persamaan tersebut akan menjadi :

$$\sigma_x = E (\epsilon_x + v\, \epsilon_y) / (1 - v^2)$$

$$\sigma_y = E (v\epsilon_x + \epsilon_y) / (1 - v^2)$$

$$\tau_{xy} = E\, \Gamma_{xy} / 2 (1 + v)$$

$$= E\, \beta\, \Gamma_{xy} / (1 - v^2) \qquad (v)$$

dimana $\beta = (1 - v) / 2$

Apabila diketahui $\epsilon = \mathbf{C}\, \sigma$

$$\text{dimana } \mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -v & 0 \\ -v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix} \qquad (w)$$

dan $\sigma = \mathbf{E}\, \epsilon$

$$\text{dimana } \mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1} = E / (1 - v^2) \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad (x)$$

menunjukkan hubungan tegangan-regangan untuk keadaan Tegangan Bidang

Keadaan Regangan bidang didasarkan atas asumsi :

$$\epsilon_z = \Gamma_{xz} = \Gamma_{yz} = 0 \; ; \; \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \; ; \; \sigma_z \neq 0$$

Persamaan regangan dalam fungsi tegangan :

$$\epsilon_x = (\sigma_x - v\, \sigma_y - v\, \sigma_z) / E$$

$$\epsilon_y = (- v\, \sigma_x + \sigma_y - v\, \sigma_z) / E$$

$$\epsilon_z = (- v\, \sigma_x - v\, \sigma_y + \sigma_z) / E = 0$$

$$\Gamma_{xy} = 2 (1 + v) \tau_{xy} / E \qquad (y)$$

Eliminasikan σ_z dari ϵ_z

$$\sigma_z = v\, \sigma_x + v\, \sigma_y$$

$$= v (\sigma_x + \sigma_y)$$

Sehingga $\epsilon_x = ((1 - v^2)\sigma_x - v (1 + v) \sigma_y)$

$$= ((1 - v)\, \sigma_x - v\, \sigma_y)(1 + v) / E$$

dan $\epsilon_y = ((-v)(1 + v)\, \sigma_x + (1 - v^2)\, \sigma_y)$

$$= (-v\,\sigma_x + (1 - v)\,\sigma_y)\,(1 + v) / E \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (z)$$

Dengan menggunakan Determinan Yacobi maka :

$$\sigma_x = E \frac{\begin{vmatrix} \epsilon_x & -v(1+v) \\ \epsilon_y & (1-v^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-v^2 & -v(1+v) \\ -v(1+v) & (1-v^2) \end{vmatrix}}$$

$$= E \frac{(1-v^2)\epsilon_x + v(1+v)\epsilon_y}{(1-v^2)^2 - v^2(1+v)^2}$$

$$= E \frac{(1-v)(1+v)\epsilon_x + v(1+v)\epsilon_y}{(1-v)^2(1+v)^2 - v^2(1+v)^2}$$

jadi $\sigma_x = E \dfrac{(1-v)\epsilon_x + v\epsilon_y}{(1-2v)(1+v)}$ (aa)

dengan cara yang sama didapat :

$$\sigma_y = E \frac{(1-v)\epsilon_y + v\epsilon_x}{(1-2v)(1+v)} \qquad (ab)$$

apabila $\Gamma_{xy} = 2 (1 + v)\,\tau_{xy} / E$

maka $\tau_{xy} = E\,\Gamma_{xy} / 2 (1 + v)$

$$= \{E(1-v) / (1+v)(1-2v)\}\ \{\Gamma_{xy}\}\ \{(1-2v) / 2 (1-v)\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (ac)$$

Sehingga bisa disusun matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E (1 - v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & v/(1-v) & 0 \\ v/(1-v) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2v)/2(1-v) \end{bmatrix} \qquad (ad)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & (1-2v)/2 \end{bmatrix} \qquad (ae)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1} = \frac{1 + v}{E}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-v & -v & 0 \\ -v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (af)$$