BAB III

D I R E C T P R O D U C T

3.1 EXTERNAL DIRECT PRODUCT.

Definisi 3.1.1

Direct product grup-grup $G_1, G_2, \ldots, G_n$ adalah himpunan n tuples ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) dimana $a_i \in G_i$. Ditulis

" $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ "

" $X_{i=1}^{n} G_n$ "

Definisi 3.1.2

($a_1, a_2, \ldots, a_n$) dan ($b_1, b_2, \ldots, b_n$) dikatakan sama bila dan hanya bila $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... , $a_n = b_n$

Contoh :

S_2 = grup dari himpunan seluruh permutasi dengan degree 2

$= \{\rho_0, \rho_1\}$

$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)$ $\qquad$ $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (\,1\ 2\,)$

$S_2 \times S_2 = (\rho_0, \rho_0), (\rho_0, \rho_1), (\rho_1, \rho_0), (\rho_1, \rho_1)$

Teorema 3.1.1

Bila $G_1, G_2, \ldots, G_n$ grup-grup dengan aturan komposisi perkalian. Untuk ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) $\in X_{i=1}^{n} G_i$,

($b_1, b_2, \ldots, b_n$) $\in X_{i=1}^{n} G_i$ didefinisikan

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, a_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$

Maka $X_{i=1}^{n} G_i$ adalah grup. Disebut " External Direct Product " dari grup-grup G_i.

Bukti :

$a_i, b_i \in G_i$, karena G_i grup maka $a_i b_i \in G_i$ sehingga

$\forall (a_1,a_2,\ldots,a_n),(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$ maka $(a_1,a_2,\ldots,a_n)(b_1,b_2,\ldots,b_n) = (a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_nb_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$. Sifat tertutuphya komposisi dipenuhi.

Diambil elemen sebarang dalam $X_{i=1}^{n} G_i$ misalnya $(a_1,a_2,\ldots,a_n),(b_1,b_2,\ldots,b_n),(c_1,c_2,\ldots,c_n)$.

$$\begin{aligned}
(a_1,a_2,\ldots,a_n)\ (b_1,b_2,\ldots,b_n)(c_1,c_2,\ldots,c_n) &= \\
&= (a_1,a_2,\ldots,a_n)(b_1c_1,b_2c_2,\ldots,b_nc_n) \\
&= (a_1(b_1c_1),a_2(b_2c_2),\ldots,a_n(b_nc_n)) \\
&= ((a_1b_1)c_1,(a_2b_2)c_2,\ldots,(a_nb_n)c_n) \\
&= (a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_nb_n)(c_1,c_2,\ldots,c_n) \\
&= (a_1,a_2,\ldots,a_n)(b_1,b_2,\ldots,b_n)\ (c_1,c_2,\ldots,c_n)
\end{aligned}$$

Sifat assosiatifitas dipenuhi.

Karena G_i adalah grup maka elemen identitas $e_i \in G_i$ sehingga $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ adalah elemen identitas dari $X_{i=1}^{n} G_i$. Maka $\exists (e_1,e_2,\ldots,e_n)$, $\forall (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ sedemikian sehingga $(e_1,e_2,\ldots,e_n)(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (e_1a_1,e_2a_2,\ldots,e_na_n) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$

Karena G_i grup maka invers $a_i \in G_i$ adalah $a_i^{-1} \in G_i$ sehingga invers dari $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$ adalah $(a_1^{-1}, a_2^{-1},\ldots,a_n^{-1}) \in X_{i=1}^{n} G_i$ karena $\forall (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$, $\exists (a_1^{-1},a_2^{-1},\ldots,a_n^{-1}) \in X_{i=1}^{n} G_i$ sedemikian sehingga $(a_1,a_2,\ldots,a_n)(a_1^{-1},a_2^{-1},\ldots,a_n^{-1}) = (a_1a_1^{-1}, a_2a_2^{-1},\ldots,a_na_n^{-1}) = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$

Terbukti $X_{i=1}^{n} G_i$ grup, dan merupakan external direct product .

Contoh :

$S_2 \times S_2 = (\rho_0,\rho_0),(\rho_0,\rho_1),(\rho_1,\rho_0),(\rho_1,\rho_1)$

Didefinisikan $(a_1,a_2) \in S_2 \times S_2$, $(b_1, b_2) \in S_2 \times S_2$,

$(a_1,a_2)(b_1,b_2) = (a_1b_1,a_2b_2)$

Akan dibuktikan $S_2 \times S_2$ merupakan grup.

1. Sifat tertutupnya komposisi jelas dipenuhi
2. Sifat assosiatifitas jelas dipenuhi.
3. $\forall (a_1,a_2) \in S_2 \times S_2, \exists (e_1,e_2) \in S_2 \times S_2$ sedemikian sehingga $(a_1,a_2)(e_1,e_2) = (a_1e_1, a_2e_2) = (a_1,a_2)$.

   Misalnya $(\rho_0,\rho_1)(\rho_0,\rho_0) = (\rho_0\rho_0, \rho_1\rho_1)$
   $= (\rho_0,\rho_1)$
4. $\forall (a_1,a_2) \in S_2 \times S_2, \exists (a_1^{-1},a_2^{-1}) \in S_2 \times S_2$

   sedemikian sehingga $(a_1,a_2)(a_1^{-1},a_2^{-1}) = (a_1a_1^{-1},a_2a_2^{-1}) = (e_1,e_2)$

   Misalnya $(\rho_0,\rho_1)(\rho_0,\rho_1) = (\rho_0\rho_0,\rho_1\rho_1)$
   $= (\rho_0,\rho_0)$

Terbukti $S_2 \times S_2$ adalah grup dan merupakan external direct product dari grup-grup S_3.

Definisi 3.1.3

Bila aturan komposisi G_i adalah penjumlahan maka $X_{i=1}^{n} G_i$ disebut " External Direct Sum " grup-grup G_i.

Contoh :

Z_2 = grup dari himpunan bilangan- bilangan bulat modulo $2 = \{\overline{0},\overline{1}\}$

Z_3 = grup dari himpunan bilangan-bilangan bulat modulo $3 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$

$Z_2 \times Z_2 = (\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})$

Didefinisikan $(a_1,a_2) \in Z_2 \times Z_3$, $(b_1,b_2) \in Z_2 \times Z_3$,

$(a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$

Akan dibuktikan $Z_2 \times Z_3$ merupakan grup

1. Sifat tertutupnya komposisi jelas dipenuhi.
2. Sifat assosiatifitas jelas dipenuhi.
3. $\forall (a_1,a_2) \in Z_2 \times Z_3, \exists (e_1,e_2) \in Z_2 \times Z_3$, sedemikian sehingga $(a_1,a_2) + (e_1,e_2) =$

   $(a_1+e_1, a_2+e_2) = (a_1,a_2)$.

   Misalnya $(\bar{1},\bar{2}) + (\bar{0},\bar{0}) = (\bar{1}+\bar{0},\bar{2}+\bar{0}) = (\bar{1},\bar{2})$
4. $\forall (a_1,a_2) \in Z_2 \times Z_3, \exists (a_1^{-1},a_2^{-1}) \in Z_2 \times Z_3$ sedemikian sehingga $(a_1,a_2) + (a_1^{-1},a_2^{-1}) =$

   $(a_1+a_1^{-1}, a_2+a_2^{-1}) = (e_1,e_2)$

   Misalnya $(\bar{1},\bar{2}) + (\bar{1},\bar{1}) = (\bar{1}+\bar{1},\bar{2}+\bar{1})$

   $= (\bar{0}+\bar{0})$

Terbukti $Z_2 \times Z_3$ adalah grup dan merupakan " External Direct Sum " dari grup-grup Z_2 dan Z_3

<u>Teorema 3.1.2</u>

" External Direct Product " dari grup abelian adalah abelian.

Selanjutnya bila grup G_i mempunyai r_i elemen untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka $X_{i=1}^{n} G_i$ mempunyai $r_1,r_2,\ldots,r_n$ elemen.

<u>Contoh :</u>

Grup $Z_2 = \{\bar{0},\bar{1}\}$ mempunyai $r_1 = 2$ elemen

Grup $Z_3 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ mempunyai $r_2 = 3$ elemen

$Z_2 \times Z_3$ mempunyai elemen $r_1 \times r_2 = 2 \times 3 = 6$ yaitu

$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})$

Teorema 3.1.3

Grup Z_m X Z_n isomorphis dengan Z_{mn} bila dan hanya bila m dan n relatif prima yaitu faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah satu

Bukti :

Misalnya subgrup siklik mempunyai penghasil (1,1). Maka order dari Z_m X Z_n adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga k(1,1) = (0,0). Komponen pertama Z_m dibawa ke 0 hanya pada kelipatan m,2m dan seterusnya . Komponen kedua Z_n dibawa ke 0 hanya pada kelipatan n,2n dan seterusnya. Kedua komponen dibawa ke 0 hanya pada kelipatan yang merupakan perkalian n dan m. Bilangan bulat terkecil yang merupakan perkalian m dan n dan merupakan kelipatan m dan n bila dan hanya bila faktor persekutuan terbesar dari m dan n adalah satu.

Contoh :

Z_2 X Z_3 isomorphis ke Z_6.

Faktor persekutuan terbesar dari 2 dan 3 adalah 1.

1. Didefinisikan fungsi $\emptyset : (Z_2 \times Z_3) \to Z_6$ sedemikian sehingga $\emptyset$ (na) = $\overline{n}$; dimana a adalah penghasil dari Z_2 X Z_3.
2. $\emptyset$ (na) = $\emptyset$ (ma)
   $\overline{n} = \overline{m}$. Jadi $\emptyset$ fungsi satu-satu
3. Untuk suatu $\overline{n} \in Z_6$ elemen na $\in Z_2 \times Z_3$ dipetakan ke $\overline{n}$ oleh $\emptyset$. Jadi $\emptyset$ onto Z_6.
4. $$\begin{aligned}\emptyset (na + ma) &= \emptyset ((n + m)a) \\ &= \overline{n+m} \\ &= \overline{n} + \overline{m} \\ &= \emptyset(na) + \emptyset(ma)\end{aligned}$$

Terbukti Z_2 X Z_3 isomorphis ke Z_6.

Akibat:

Grup $X_{i=1}^{n} Z_{m_i}$ siklik dan isomorphia ke $Z_{m_1 . m_2 ... m_n}$ bila dan hanya bila faktor persekutuan terbesar dari dua di- antara bilangan-bilangan m_i, $i=1,2,\ldots,n$ adalah satu

Teorema 3.1.4

Bila r_i order berhingga dari $a_i \in G_i$ maka order dari $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$ adalah kelipatan persekutuan terkecil dari seluruh r_i.

Bukti :

Karena r_i order berhingga dari $a_i \in G_i$ maka $(a_i)^{r_i} = e_i$

Berdasarkan teorema 3.1.3 $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$ di - bawa ke $(e_1,e_2,\ldots,e_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$ oleh bilangan bulat terkecil yang merupakan kelipatan r_i, $i=1,2,\ldots,n$ dan perkalian r_i, $i=1,2,\ldots,n$ yaitu bilangan bulat yang me- rupakan kelipatan persekutuan terkecil r_i, $i=1,2,\ldots,n$

Jadi terbukti order dari $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in X_{i=1}^{n} G_i$ adalah kelipatan persekutuan terkecil seluruh r_i, $i=1,2,\ldots n$

Contoh :

$Z_2 = \{\bar{0},\bar{1}\}$, $o(\bar{0}) = 1$, $o(\bar{1}) = 2$

$Z_3 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$, $o(\bar{0}) = 1$, $o(\bar{1}) = 3$, $o(\bar{2}) = 3$

$Z_2 \times Z_3 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})\}$

$o(\bar{1},\bar{1}) = 6$ yaitu kelipatan persekutuan terkecil dari $o(\bar{1}) = 2$ dan $o(\bar{2}) = 3$

Teorema 3.1.5

Bila $X_{i=1}^{n} G_i$ " External Direct Product " maka $\bar{G}_i = \{(e_1, e_2,\ldots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n) \mid a_i \in G_i\}$ merupakan subgrup dari $X_{i=1}^{n} G_i$.

Bukti :

Akan dibuktikan syarat perlu dan cukup agar $\overline{G}_i$ merupakan subgrup dari $X_{i=1}^n G_i$.

(1). Diambil dua elemen sebarang dari $\overline{G}_i$ misalnya

$(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n) \in \overline{G}_i$ dan

$(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots,e_n) \in \overline{G}_i$

$(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n)(e_1,e_2,\ldots,$
$e_{i-1},b_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$

$= (e_1e_1,e_2e_2,\ldots,e_{i-1}e_{i-1},a_ib_i,e_{i+1}e_{i+1},$
$\ldots,e_ne_n)$

$= (e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},a_ib_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$
$\in G_i$.

(2). Elemen netral dari $X_{i=1}^n G_i$ berada didalam $\overline{G}_i$ yaitu $(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},e_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$

(3). Setiap elemen dari $\overline{G}_i$ mempunyai invers. Misalnya diambil elemen sebarang $(e_1,e_2,\ldots,$ $e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n) \in \overline{G}_i$. Invers dari $(e_1,$ $e_2,\ldots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$ adalah $(e_1,e_2,$ $\ldots,e_{i-1},a_i^{-1},e_{i+1},\ldots,e_n)$ sebab

$(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\ldots,e_n)(e_1,e_2,\ldots,$
$e_{i-1},a_i^{-1},e_{i+1},\ldots,e_n)$

$= (e_1e_1,e_2e_2,\ldots,e_{i-1}e_{i-1},a_ia_i^{-1},$
$e_{i+1}e_{i+1},\ldots e_ne_n)$

$= (e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},e_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$

Terbukti syarat perlu dan cukup agar $\bar{G}_i$ merupakan subgrup dari $\times_{i=1}^{n} G_i$ dipenuhi.

Teorema 3.1.6

$\bar{\bar{G}}_i$ isomorphis ke G_i

Bukti

Didefinisikan $\emptyset : \bar{G}_i \longrightarrow \bar{G}_i : \emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , g_i , \ldots , e_n \mid g_i \in G_i) \longrightarrow e_1 e_2 \ldots g_i \ldots e_n$.

1. Akan dibuktikan $\emptyset$ fungsi artinya jika $(e_1 , e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = (e_1 , e_2 , \ldots , b_i , \ldots , e_n)$

   $\Longrightarrow \emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = \emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , b_i , \ldots , e_n)$, $a_i , b_i \in G_i$

   $(e_1 , e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = (e_1 , e_2 \ldots , b_i , e_n)$ maka $e_1 = e_1$, $e_2 = e_2$, $\ldots$ $a_i = b_i$, $\ldots$, $e_n = e_n$.

   Sehingga $(e_1 e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = (e_1 e_2 , \ldots , b_i , \ldots , e_n)$

   $\emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = \emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , b_i , \ldots , e_n)$

2. Akan dibuktikan $\emptyset$ fungsi satu-satu artinya bila $\emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = \emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , b_i , \ldots , e_n) \Longrightarrow (e_1 , e_2 \ldots , a_i , \ldots , e_n) = (e_1 , e_2 , \ldots , b_i e_n)$.

   $\emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = \emptyset (e_1 , e_2 , \ldots , b_i , \ldots , e_n)$

   $(e_1 e_2 , \ldots , a_i , \ldots , e_n) = (e_1 e_2 \ldots b_i , \ldots , e_n)$

   artinya $e_1 = e_1$, $e_2 = e_2$, $\ldots$, $a_i = b_i$, $\ldots$, $e_n = e_n$

Sehingga $(e_1,e_2,\ldots,a_i,\ldots,e_n) = (e_1,e_2,\ldots,b_i,\ldots, e_n)$.

3. $\emptyset$ fungsi yang onto artinya setiap $g_i \in G_i$ ditentukan oleh elemen dari $\overline{G}_i$ yaitu bila $g_i = e_1e_2\ldots g_i\ldots e_n \in G_i$ ditentukan oleh $(e_1,e_2,\ldots,g_i,\ldots,e_n) \in \overline{G}_i$.

4. Ambil elemen sebarang $(e_1,e_2,\ldots,a_i,\ldots,e_n)$ dan $(e_1,e_2,\ldots,b_i,\ldots,e_n) \in G_i$, maka

$$\begin{aligned}
\emptyset((e_1,e_2,\ldots,a_i,\ldots,e_n)(e_1,e_2,\ldots,b_i,\ldots,e_n))
&= \emptyset(e_1e_1,e_2e_2,\ldots,a_ib_i,\ldots,e_ne_n) \\
&= \emptyset(e_1,e_2,\ldots,a_ib_i,\ldots,e_n) \\
&= e_1e_2\ldots a_ib_i\ldots e_n. \\
&= a_ib_i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\emptyset(e_1,e_2,\ldots,a_i,\ldots,e_n)\emptyset(e_1,e_2,\ldots,b_i,\ldots,e_n)
&= (e_1e_2\ldots a_i\ldots e_n)(e_1e_2\ldots b_i\ldots e_n) \\
&= a_ib_i.
\end{aligned}$$

Terbukti $\emptyset((e_1,e_2,\ldots,a_i,\ldots,e_n)(e_1,e_2,\ldots,b_i,\ldots, e_n)) = \emptyset(e_1,e_2,\ldots,a_i,\ldots,e_n)\emptyset(e_1,e_2,\ldots,b_i,\ldots,e_n)$

Sampai disini terbukti $\overline{G}_i$ isomorphis ke G_i.

<u>Contoh</u> :

$S_2 = \{\rho_0,\rho_1\}$ dan $S_3 = \{\rho_0,\rho_1,\rho_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$

Subgrup-subgrup dari $S_2 \times S_3 \times S_3$ adalah :

$\overline{S}_2 = \{(\rho_0,\rho_0,\rho_0),(\rho_1,\rho_0,\rho_0)\}$

$\overline{S}_{3_1} = \{(\rho_0,\rho_0,\rho_0),(\rho_0,\rho_1,\rho_0),(\rho_0,\rho_2,\rho_0),(\rho_0,\mu_1,\rho_0),$
$(\rho_0,\mu_2,\rho_0),(\rho_0,\mu_3,\rho_0)\}$

$\overline{S}_{3_2} = \{(\rho_0,\rho_0,\rho_0),(\rho_0,\rho_0,\rho_1),(\rho_0,\rho_0,\rho_2),(\rho_0,\rho_0,\mu_1),$
$(\rho_0,\rho_0,\mu_2),(\rho_0,\rho_0,\mu_3)\}$

Teorema 3.1.7

Bila $G_1 \times G_2$ external direct product dan $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$ subgrup subgrup dari $G_1 \times G_2$. Maka :

1. Setiap elemen dari $\overline{G_1}$ komutatif dengan setiap elemen dari $\overline{G_2}$.
2. Setiap elemen dari $G_1 \times G_2$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai product elemen-elemen dari $\overline{G_1} \times \overline{G_2}$.

   Ditulis $G_1 \times G_2 = X_{i=1}^{2} G_i = G_1 G_2$
3. $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \{(e_1 , e_2)\}$
4. Grup $G_1 \times G_2$ isomorphis ke grup $G_2 \times G_1$

Bukti :

1. Andaikan diambil elemen sebarang $a \in \overline{G_1}$ dan $b \in \overline{G_2}$ maka terdapatlah a_1 , $e_1 \in G_1$ dan b_2 , $e_2 \in G_2$ sedemikian sehingga $a = (a_1 , e_1)$ dan $b = (e_1 , b_2)$.

   Maka $ab = (a_1 , e_2)(e_1 , b_2)$

   $= (a_1 e_1 , e_2 b_2)$

   $= (e_1 a_1 , b_2 e_2)$

   $= (e_1 , b_2)(a_1 , e_2)$

   $= ba$

   Sehingga $ab = ba$ untuk setiap $a \in \overline{G_1}$ dan $b \in \overline{G_2}$. Jadi terbukti bahwa setiap elemen $\overline{G_1}$ komutatif dengan seti tiap elemen dari $\overline{G_2}$
2. Diambil elemen sebarang $(a_1 , a_2) \in G_1 \times G_2$

   $(a_1 , a_2) = (a_1 e_1 , a_2 e_2)$

   $= (a_1 e_1 , e_2 a_2)$

   $= (a_1 , e_2)(e_1 , a_2)$

   Akan dibuktikan tunggalnya (a_1 , e_2) dan (e_1 , a_2) Andaikan (a_1 , e_2) dan (e_1 , a_2) tidak tunggal, maka terdapatlah $b_1 \neq a_1 \in G_1$ dan $b_2 \neq a_2 \in G_2$ sedemi kian sehingga

$$(b_1 , e_2)(e_1 , b_2) = (a_1 , a_2)$$
$$(b_1 e_1 , e_2 b_2) = (a_1 , a_2)$$
$$(b_1 , b_2) = (a_1 , a_2)$$

Maka $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$. Kontradiksi, pengandaian harus diingkar. Jadi (a_1 , e_2) dan (e_1 , a_2) tunggal.

3. Diambil elemen sebarang $(a , b) \in \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$

Maka $(a, b) = (a , e_2)(e_1 , b)$

Sehingga $\left.\begin{array}{l} (a , e_2) \in \bar{G}_1 \\ (a , e_2) \in \bar{G}_2 \end{array}\right\} a = e_1$

Demikian juga

$\left.\begin{array}{l} (e_1 , b) \in \bar{G}_1 \\ (e_1 , b) \in \bar{G}_2 \end{array}\right\} b = e_2$

Jadi $(a , b) = (e_1 , e_2)$. Terbukti $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = (e_1 , e_2)$

4. Didefinisikan $\emptyset : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2 \times G_1 : \emptyset (a_1 , a_2) = (a_2 , a_1)$, $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$

a). Dibuktikan $\emptyset$ suatu fungsi . Yaitu $(a_1 , a_2) = (b_1 , b_2)$ maka $\emptyset (a_1 , a_2) = \emptyset (b_1 , b_2)$

Andaikan $(a_1 , a_2) = (b_1 , b_2)$ maka $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Sehingga $(a_2 , a_1) = (b_2 , b_1)$

$$\emptyset (a_1 , a_2) = \emptyset (b_1 , b_2)$$

Jadi $(a_1 , a_2) = (b_1 , b_2) \Longrightarrow \emptyset (a_1 , a_2)$ $\emptyset (b_1 , b_2)$. Terbukti $\emptyset$ suatu fungsi.

b). Dibuktikan $\emptyset$ fungsi satu-satu. Yaitu jika

$\emptyset (a_1 , a_2) = \emptyset (b_1 , b_2)$ maka $(a_1 , a_2) = (b_1 , b_2)$.

$$\emptyset (a_1 , a_2) = \emptyset (b_1 , b_2)$$
$$(a_2 , a_1) = (b_2 , b_1)$$

Maka $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$.

Sehingga $(a_1 , a_2) = (b_1 , b_2)$. Jadi

$\emptyset (a_1 , a_2) = \emptyset (b_1 , b_2) \Longrightarrow (a_1 , a_2) = (b_1 , b_2)$. Terbukti $\emptyset$ fungsi satu-satu .

c). Setiap elemen dari $G_2 \times G_1$ ditentukan oleh elemen dari $G_1 \times G_2$. Yaitu bila $(a_2 , a_1) \in G_2 \times G_1$ ditentukan oleh $(a_1 , a_2) \in G_1 \times G_2$.

Jadi fungsi $\emptyset$ onto .

d). Ambil elemen sebarang (a_1 , a_2) dan $(b_1 , b_2) \in G_1 \times G_2$. Maka :

$$
\begin{aligned}
\emptyset ((a_1 , a_2)(b_1 , b_2)) &= \emptyset (a_1 b_1 , a_2 b_2) \\
&= (a_2 b_2 , a_1 b_1) \\
&= (a_2 , a_1)(b_2 , b_1) \\
&= \emptyset (a_1 , a_2) \emptyset (b_1 , b_2)
\end{aligned}
$$

Sehingga $\emptyset ((a_1 , a_2)(b_1 , b_2)) = \emptyset (a_1 , a_2) \emptyset (b_1 , b_2)$ untuk setiap (a_1 , a_2) dan $(b_1 , b_2) \in G_1 \times G_2$. Jadi $\emptyset$ adalah homomorphisma grup.

Sampai disini terbukti $G_1 \times G_2$ isomorphisma .

<u>Secara umum</u> :

Bila $X_{i=1}^{n} G_i$ external direct product dan $\overline{G}_1 , \overline{G}_2 , \ldots , \overline{G}_n$ subgrup-subgrup dari $X_{i=1}^{n} G_i$ maka :

1. Setiap elemen dari dua subgrup yang berbeda adalah komutatif .
2. $\overline{G}_i \cap \overline{G}_j = \{(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)\}$, $i \neq j$
3. Setiap elemen $X_{i=1}^{n} G_i$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai product dari elemen elemen $\overline{G}_1 , \overline{G}_2 , \ldots , \overline{G}_n$.
4. $\overline{G}_1 \times \overline{G}_2 \times \ldots \times \overline{G}_n \cong \overline{G}_n \times \overline{G}_{n-1} \times \ldots \times \overline{G}_2 \times \overline{G}_1$.

3.2 INTERNAL DIRECT PRODUCT .

<u>Definisi 3.2.1</u>

Definisi 3.2.1

H_i , $i = 1 , 2 , \ldots , n$ adalah subgrup-subgrup dari grup G . Grup G disebut Internal direct product subgrup-subgrup dari H_i bila fungsi $\emptyset : X_{i=1}^{n} H_i \rightarrow G$ yang didefinisikan : $\emptyset (h_1 , h_2 , \ldots , h_n) = h_1 h_2 \ldots h_n$ dimana $h_i \in H_i$, adalah suatu isomorphisma .

Contoh :

$S_2 = \{ \rho_0 ; \rho_1 \}$

Subgrup-subgrup S_2 adalah $H_1 = \{ \rho_0 \}$

$H_2 = \{ \rho_0 , \rho_1 \}$

$H_2 \times H_2 = \{ (\rho_0 , \rho_0) , (\rho_0 , \rho_1) \}$

Didefinisikan $\emptyset : H_1 \times H_2 \longrightarrow S_2 : \emptyset (h_1 , h_2) = h_1 h_2$

1. Jelas $\emptyset$ suatu fungsi sebab setiap elemen dari $H_1 \times H_2$ hanya berkaitan dengan satu elemen dari S_3
2. ~~Jelas $\emptyset$~~ fungsi satu-satu sebab $\emptyset (a) = \emptyset (b) \Longrightarrow a = b$
3. Setiap elemen S_2 adalah bayangan satu elemen dari $H_1 \times H_2$. Jadi $\emptyset$ onto.
4. Dipenuhi $\emptyset (a b) = \emptyset (a) \emptyset (b)$.

   Misalnya :

$$\begin{aligned}
\emptyset \{ (\rho_0 , \rho_0)(\rho_0 , \rho_1) \} &= \emptyset \{ \rho_0 \rho_0 , \rho_0 \rho_1 \} \\
&= \emptyset \{ \rho_0 , \rho_1 \} \\
&= \rho_0 \rho_1 \\
&= \rho_1 \\
\emptyset (\rho_0 , \rho_0) \emptyset (\rho_0 , \rho_1) &= (\rho_0 \rho_0)(\rho_0 \rho_1) \\
&= \rho_0 \rho_1 \\
&= \rho_1
\end{aligned}$$

Jadi S_2 adalah internal direct product dari subgrup-subgrup H_1 dan H_2.

Teorema 3.2.1

Bila G adalah internal direc product dari subgrup-subgrup H_1, H_2, ..., H_n maka setiap $g \in G$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ dimana $h_i \in H_i$.

Bukti :

G Internal Direct Produtt dari subgrup-subgrup H_1, H_2, ..., H_n artinya ada fungsi $\emptyset : X_{i=1}^{n} H_i \rightarrow G$ sedemikian sehingga $\emptyset(h_1, h_2, \ldots, h_n) = h_1 h_2 \ldots h_n$ adalah suatu isomorphisma .

Akan dibuktikan bahwa setiap elemen $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ dari $X_{i=n}^{n} H_i$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai product $(h_1, h_2, \ldots, e_n)(e_1, h_2, \ldots, e_n) \ldots (e_1, e_2, \ldots, h_n)$. Dimana $h_i \in H_i$.

Diambil elemen sebarang $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in X_{i=1}^{n} H_i$
$(h_1, h_2, \ldots, h_n) = (h_1, e_2, \ldots, h_n)(h_1, h_2, \ldots, e_n) \ldots (e_1, e_2, \ldots, h_n)$

Akan dibuktikan tunggalnya $(h_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(e_1, h_2, \ldots, e_n)$, $(e_1, e_2, \ldots, h_n)$.

Andaikan $(h_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(e_1, h_2, \ldots, e_n)$, ..., $(e_1, e_2, \ldots, h_n)$ tidak tunggal , maka terdapatlah $b_1 \neq h_1 \in H_1$, $b_2 \neq h_2 \in H_2$, ..., $b_n \neq h_n \in H_n$ sedemikian sehingga :

$(b_1, e_2, \ldots, e_n)(e_1, b_2, \ldots, e_n) \ldots (e_1, e_2, \ldots, b_n) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$

$(b_1 e_1 e_1 \ldots e_1, e_2 b_2 \ldots e_2, \ldots, e_n e_n \ldots b_n)$
$= (h_1, h_2, \ldots, h_n)$

$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Maka $b_1 = h_1$, $b_2 = h_2$, ..., $b_n = h_n$. Kontradiksi.

Jadi pengandaian harus diingkar.

Jadi $(h_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(e_1, h_2, \ldots, e_n)$, ..., $(e_1, e_2, \ldots, h_n)$ tunggal.

Karena G adalah internal direct product dari subgrup-subgrup $H_1, H_2, \ldots, H_n$, subgrup $\bar{H}_i$ isomorphis ke H_i dan setiap elemen dari $X_{i=1}^{n} G_i$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai product $(h_1, e_2, \ldots, e_n), (e_1, h_2, \ldots, e_n), \ldots, (e_1, e_2, \ldots, h_n)$. Maka jelas bahwa setiap elemen $g \in G$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai $g = h_1 h_2 \ldots h_n$ dengan $h_i \in H_i$

H,K subgrup-subgrup dari G. Didefinisikan $HK = \{hk \mid h \in H, h \in H, k \in K\}$.

HK bukan merupakan subgrup dari grup G bila $h_1k_1h_2k_2$ tidak dapat dibawa ke bentuk hk. Sedangkan bila G grup abelian atau bila H komutatif dengan K yaitu $hk = kh$ maka

$$h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1k_2$$

$$= h_3k_3 \qquad , \; h_3 = h_1h_2 \in H$$

$$k_3 = k_1k_2 \in K$$

Sehingga HK adalah subgrup dari grup G dengan elemen netral $ee = e$ dan $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} = h^{-1}k^{-1}$.

Paling sedikit ada satu subgrup berisi HK yaitu G.

Definisi 3.2.2

HK subgrup-subgrup dari grup G. Join H K dari H dan K adalah irisan subgrup-subgrup dari G berisi $HK = \{hk \mid h \in H, k \in H\}$

Contoh :

Subgrup-subgrup S_3 adalah $H = \{\rho_0\}$, $K = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

$HK = \{\rho_0\rho_0, \rho_0\rho_1, \rho_0\rho_2\} = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

$H \vee K = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\} \cup \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

Jelas $H \vee K$ adalah subgrup terkecil berisi HK. Dan bila H dan K komutatif atau bila G abelian maka $H \vee K = HK$

Karena $h = he$, $k = ke$ maka $H \subsetneq HK$ dan $K \subsetneq HK$, juga H subgrup dari $H \vee K$ dan K subgrup dari $H \vee K$

$H \vee K$ berada didalam subgrup yang juga memuat H dan K. Jadi dapat dilihat bahwa $H \vee K$ adalah subgrup terkecil dari G yang mengandung H dan K.

Teorema 3.2.2

Grup G adalah internal direct product dari subgrup-subgrup H dan K bila dan hanya bila :

1" $G = H \vee K$

2" $hk = kh$ untuk setiap $h \in H$ dan $k \in K$

3" $H \cap K = \{ e \}$

Bukti :

($\Rightarrow$)

1). Karena G adalah Internal Direct Product dari subgrup subgrup H dan K sehingga $\emptyset : H \times K \longrightarrow G$ sedemikian se hingga $\emptyset (h , k) = hk$ adalah suatu isomorphisma. Jadi $\emptyset$ pasti onto artinya setiap $g \in G$ ditentukan o leh elemen dari $H \times K$. Sehingga $G = H \vee K$

2). Karena G adalah Internal Direct Product dari subgrup subgrup H dan K maka $G = HK$ dan karena $G = H \vee K$ maka $HK = H \vee K$ dan ini dipenuhi hanya jika G abelian atau H komutatif dengan K yaitu $hk = kh$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$.

3). Karena G adalah Internal Direct Product subgrup-subgrup H dan K . Karena $\overline{H}$ isomorphis dengan H , $\overline{K}$ isomorphis dengan K dan $\overline{H} \cap \overline{K} = \{ e \}$, maka jelas $H \cap K = \{ e \}$

($\Leftarrow$)

Akan dibuktikan bahwa grup G adalah Internal Direct Product dari subgrup-subgrup H dan K yaitu $\emptyset : (H \times K) \longrightarrow$

G didefinisikan $\emptyset(h,k) = hk$ adalah suatu isomorphisma

1). Akan dibuktikan $\emptyset$ suatu fungsi , artinya setiap anggota dari H X K hanya berkaitan dengan satu anggota dari G. Yaitu bila $(h_1,k_1) = (h_2,k_2)$ maka $\emptyset(h_1,k_1) = \emptyset(h_2,k_2)$.

Karena $h_1k_1 = h_2k_2$, maka $h_1 = h_2$, $k_1 = k_2$.

Sehingga $h_1k_1 = h_2k_2$

$$\emptyset(h_1,k_1) = \emptyset(h_2,k_2)$$

Terbukti $\emptyset$ suatu fungsi.

2). Akan dibuktikan $\emptyset$ fungsi satu-satu yaitu bila $\emptyset(h_1,k_1) = \emptyset(h_2,k_2)$ maka $(h_1,k_1) = (h_2,k_2)$

$$\emptyset(h_1,k_1) = \emptyset(h_2,k_2)$$

$$h_1k_1 = h_2k_2$$

$$h_2^{-1}h_1k_1k_1^{-1} = h_2^{-1}h_2k_2k_1^{-1}$$

$$h_2^{-1}h_1e = ek_2k_1^{-1}$$

$$h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} \quad , h_2^{-1}h_1 \in H$$

$$k_2k_1^{-1} \in K \text{ ....(1)}$$

Diketahui dari 3" bahwa $H \cap K = \{e\}$ ....(2)

Dari (1) dan (2) maka $h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} = e$

$$h_2^{-1}h_1 = e$$

$$h_2h_2^{-1}h_1 = h_2e$$

$$eh_1 = h_2e$$

$$h_1 = h_2$$

Demikian juga $k_2k_1^{-1} = e$

$$k_2k_1^{-1}k_1 = ek_1$$

$$k_2e = ek_1$$

$$k_2 = k_1$$

Jadi $\emptyset(h_1,k_1) = \emptyset(h_2,k_2)$. Terbukti $\emptyset$ fungsi satu

satu.

3). Berdasarkan 2" maka HK abelian yaitu setiap $h \in H$ komutatif dengan setiap $k \in K$. Maka $HK = H \vee K$
Dengan menggunakan 1" maka $HK = H \vee K = G$. Maka $\emptyset$ onto G artinya setiap elemen dari G ditentukan oleh elemem dari $H \times K$

4). $\emptyset\{(h_1,k_1)(h_2,k_2)\} = \emptyset(h_1h_2,k_1k_2)$

$$= h_1h_2k_1k_2$$

$$\emptyset(h_1,k_1)\emptyset(h_2,k_2) = h_1k_1h_2k_2$$

$$= h_1h_2k_1k_2 \quad \text{,karena } hk=kh$$

Jadi $\emptyset(h_1,k_1)(h_2,k_2) = \emptyset(h_1,k_1)\emptyset(h_2,k_2)$

Sampai disini terbukti G internal direct product dari subgrup-subgrup H dan K. Teorema terbukti.