BAB II

NORMALISATOR DAN SENTRALISATOR

2.1 KONJUGASI

<u>Definisi 2.1.1</u>

Elemen $a \in G$ dikatakan konjugat terhadap $b \in G$, bila $\exists\, x \in G$ sedemikian sehingga $a = x^{-1}bx$ ditulis

$$a^c = b$$

<u>Contoh</u> :

S_3 = grup dari himpunan seluruh permutasi dengan degree 3

Angota-anggota dari S_3 adalah

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1) \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1) \circ (2\ 3)$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \circ (2)$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2) \circ (3)$$

$\rho_0^{\,c} = \rho_0$, sebab $\exists\ x \in S_3$ sedemikian sehingga $\rho_0 = x^{-1}\rho_0\, x$

$$\rho_1^{-1}\rho_0\,\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho_0$$

$\mu_2^{\,c} = \mu_1$, sebab $\exists\, \mu_3 \in S_3$ ssdemikian sehingga

$$\mu_2 = \mu_3^{-1}\mu_1\mu_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mu_2$$

<u>Teorema 2.1.1</u>

Relasi konjugasi adalah relasi ekwivalensi.

Definisi 2.1.2

Himpunan elemen-elemen yang konjugat terhadap a disebut klas konjugat dari a ditulis $\bar{a}$ atau $C[a]$

$$C[a] = \{x^{-1}ax \mid x \in G\}$$

Contoh :

Dalam S_3 : $C[\rho_0] = \{\rho_0\}$

$C[\rho_2] = \{\rho_1, \rho_2\}$

$C[\mu_1] = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

Definisi 2.1.3

Karena relasi konjugasi merupakan relasi ekwivalensi maka grup G terbagi atau terpecah lengkap atas golongan-golongan atau klas-klas yang saling asing. Maka :

1. Dua elemen berada dalam satu klas bila dan hanya bila mereka konjugat satu dengan yang laih
2. Tidak ada dua elemen dari klas yang berbeda saling konjugat.

Definisi 2.1.4

Bila grup G berhingga, maka persamaan klas dari G adalah

$$o(G) = \sum_{a \in G} o(\bar{a})$$

Contoh :

$$\begin{aligned} o(S_3) &= \sum_{a \in S_3} o(S_3) \\ &= \sum_{a \in S_3} o(C[a]) \\ &= o(C[\rho_0]) + o(C[\rho_2]) + o(C[\mu_1]) \\ &= 1 + 2 + 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Definisi 2.1.5

Elemen $a \in G$ disebut konjugat ke diri sendiri (invarian) bila a adalah satu-satunya anggota $C[a]$. Jadi a konjugat ke dirinya sendiri bila dan hanya bila

$$a = x^{-1}ax \quad , \forall x \in G$$

$$xa = x(x^{-1}ax) \quad , \forall x \in G$$

$$xa = xx^{-1}ax \quad , \forall x \in G$$
$$xa = eax \quad , \forall x \in G$$
$$xa = ax \quad , \forall x \in G$$

Teorema 2.1.2

Jika A himpunan seluruh elemen yang konjugat ke dirinya sendiri dari grup G. Maka A adalah subgrup dari grup G.

Bukti :

Ambil a, $b \in A$. Karena A himpunan elemen-elemen yang konjugat ke dirinya sendiri, maka $\forall x \in G$, $a = x^{-1}ax$.

$$xa = x(x^{-1}ax)$$
$$xa = xx^{-1}ax$$
$$xa = eax$$
$$xa = ax$$

Dan $\forall x \in G$, $b = x^{-1}bx$

$$xb = x(x^{-1}bx)$$
$$xb = (xx^{-1})(bx)$$
$$xb = ebx$$
$$xb = bx$$
$$b^{-1}(xb)b^{-1} = b^{-1}(bx)b^{-1}$$
$$(b^{-1}x)(bb^{-1}) = (b^{-1}b)(xb^{-1})$$
$$(b^{-1}x)e = e(xb^{-1})$$
$$b^{-1}x = xb^{-1}$$
$$b^{-1} \in Z$$

Lalu $x(ab^{-1}) = (xa)b^{-1}$, $\forall x \in G$

$x(ab^{-1}) = (ax)b^{-1}$, karena a konjugat ke diri sendiri

$x(ab^{-1}) = a(xb^{-1})$, karena assosiativitas.

$x(ab^{-1}) = a(b^{-1}x)$, karena b konjugat ke diri sendiri

$x(ab^{-1}) = (ab^{-1})x$, karena assosiativitas.

$ab^{-1} \in Z$

Jadi $a,b \in Z \Rightarrow ab^{-1} \in Z$, Zadalah subgrup dari grup G

Definisi 2.1.6

K,L subset-subset dari grup G. Subset K disebut konjugat ke subset L bila ada elemen $x \in G$ sedemikian sehingga $K = x^{-1}Lx$. Dimana

$$x^{-1}Lx = \{ x^{-1}ax \mid a \in L \}$$

Contoh :

(1). S_3 grup dari himpunan seluruh permutasi dengan degree 3.

$K = \{\rho_0 , \mu_1\}$, $L = \{\rho_0 , \mu_2\}$ subset-subset dari S_3

Untuk $x = \rho_0 \rightarrow x^{-1}Kx = \{ x^{-1}ax \mid a \in K \} \neq L$

$x = \rho_1 \rightarrow x^{-1}Kx = \{x^{-1}ax \mid a \in K \} \neq L$

-

-

$x = \mu_3 \rightarrow x^{-1}Kx = \{ x^{-1}ax \mid a \in K \} \neq L$

L tidak konjugat ke K, karena tidak ada $x \in S_3$ sedemikian sehingga $L = x^{-1}Kx$.

(2). $M = \{\rho_0 , \mu_2\}$, $N = \{\rho_0 , \mu_3\}$ subset-subset dari S_3

M konjugat ke N, karena ada $x = \rho_2 , \mu_1 \in S_3$ sedemikian sehingga $M = x^{-1}Nx$

2.2 SUBGRUP NORMAL

Definisi 2.2.1

Bila subgrup N dari grup G konjugat ke dirinya sendiri maka N disebut subgrup normal atau invarian.

Ditulis $N \triangleleft G$

$N \triangleleft G$ bila $n \in N$, $a \in G$, $ana^{-1} \in N$

Contoh :

$A_3 = \{\rho_0 , \rho_1 , \rho_2\}$ subgrup normal dari S_3

Teorema 2.2.1

Setiap subgrup dari grup abelian adalah subgrup normal

Teorema 2.2.2

Irisan dari dua subgrup normal adalah subgrup normal

2.3 NORMALISATOR DAN SENTRALISATOR.

Definisi 2.3.1

S subset dari grup G. Maka himpunan semua $n \in G$ sedemikian sehingga $nS = Sn$ disebut normalisator $N_{(S)}$ dari S didalam grup G

$$N_{(S)} = \{ n \in G \mid nS = Sn \}$$

Jadi elemen $n \in G$ membawa S kedirinya sendiri bila dan hanya $x \in S$ komutatif dengan $n \in G$

Contoh :

S_3 grup dari seluruh permutasi dengan degree 3

$$\rho_0 \{\rho_1, \rho_2\} = \{\rho_1, \rho_2\}\rho_0 \Rightarrow \{\rho_0\rho_1, \rho_0\rho_2\} = \{\rho_1\rho_0, \rho_2\rho_0\}$$
$$\{\rho_1, \rho_2\} = \{\rho_1, \rho_2\}$$
$$\rho_1 \{\rho_1, \rho_2\} = \{\rho_1, \rho_2\}\rho_1 \Rightarrow \{\rho_1\rho_1, \rho_1\rho_2\} = \{\rho_1\rho_1, \rho_2\rho_1\}$$
$$\{\rho_2, \rho_0\} = \{\rho_2, \rho_0\}$$
$$\rho_2 \{\rho_1, \rho_2\} = \{\rho_1, \rho_2\}\rho_2 \Rightarrow \{\rho_2\rho_1, \rho_2\rho_2\} = \{\rho_1\rho_2, \rho_2\rho_2\}$$
$$\{\rho_0, \rho_1\} = \{\rho_0, \rho_1\}$$

dimana $\{\rho_1, \rho_2\} = K$ subset dari S_3.

Jadi $N_{(K)} = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

Teorema 2.3.1

Normalisator $N_{(S)}$ dari subset S didalam grup G merupakan sugrup dari grup G

Teorema 2.3.2

Untuk grup G berhingga, banyaknya elemen dalam klas C a adalah sama dengan indeks normalisator a di grup G

Didefinisikan relasi $\emptyset : C[a] \rightarrow [G:N_{(a)}] : \emptyset (x^{-1}ax \mid x \in G)$

$= N_{(a)}x$

Dibuktikan $\emptyset$ adalah suatu fungsi, artinya setiap unsur dari C[a] hanya berkaitan dengan satu unsur dari $[G:N_{(a)}]$

Diambil dua elemen dari C[a] dan misalnya kedua elemen tersebut sama.

$$a = x^{-1}ax \quad , \quad x \in G$$

$$b = y^{-1}ay \quad , \quad y \in G$$

$$a = b$$

$$\Rightarrow \quad x^{-1}ax = y^{-1}ay$$

$$\Rightarrow yx^{-1}axx^{-1} = yy^{-1}ayx^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad yx^{-1}a = ayx^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad yx^{-1} \in N_{(a)}$$

Berdasarkan teorema 1.2.3 $H_a = H_b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ maka

$N_{(a)}x = N_{(a)}y$

Terbukti setiap unsur dari C[a] hanya berkaitan dengan satu unsur $[G:N_{(a)}]$. Akan dibuktikan bahwa $\emptyset$ adalah fungsi satu-satu : $\emptyset(a) = \emptyset(b) \Rightarrow a = b$

$$\emptyset(a) = \emptyset(b)$$

$$\emptyset(x^{-1}ax) = \emptyset(Y^{-1}ay)$$

$$N_{(a)}x = N_{(a)}y$$

Berdasarkan teorema 1.2.3 $H_a = H_b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ maka $yx^{-1} \in N_{(a)}$

Sehingga $yx^{-1}a = ayx^{-1}$

$$y^{-1}yx^{-1}ax = y^{-1}ayx^{-1}x$$

$$x^{-1}ax = y^{-1}ay \qquad \text{Terbukti.}$$

Akan dibuktikan $\emptyset$ onto, artinya setiap elemen $[G:N_{(a)}]$ adalah bayangan dari paling sedikit satu elemen C[a]

Diambil $nx \in N_{(a)}x$

$$\emptyset(nx) = (nx)^{-1}anx$$

$$= x^{-1}n^{-1}anx$$

$$= x^{-1}n^{-1}nax \qquad , \text{ sebab } N_{(a)} \ominus \{ n \in G \mid na = an \}$$

$$= x^{-1}ax$$

Karena elemen $[G:N_{(a)}]$ dibangun oleh elemen $C[a]$ maka $\emptyset$ omto. Terbukti banyaknya elemem dalam klas $C[a]$ sama dengan indeks normalisator $N_{(a)}$ di grup G.

Teorema 2.3.3

Banyaknya elemen dari klas konjugat pada grup berhingga G membagi order dari grup G.

Definisi 2.3.2

S subset grup G. Himpunan elemen-elemen $z \in G$ yang komutatif dengan setiap elemen dari S disebut sentralisator dari S didalam grup G. Ditulis : Z_S

$$Z_S = \{ z \in G \mid zs = sz \ , \forall s \in S \}$$

Contoh :

$S = \{\rho_0\}$ subset dari S_3 maka $Z_S = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$

Teorema 2.3.4

Sentralisator Z_S dari subset S didalam grup G merupakan subgrup dari grup G

Apabila dalam definisi sentralisator, sebagai subset diambil seluruh G, maka Z(G) merupakan himpunan elemen-elemen yang komutatif dengan setiap elemen dari G. Subgrup Z(G) ini disebut Z(G) ini disebut senter dari G dan anggotanya disebut elemen sentral.

$$Z(G) = \{ a \mid a \in G ; \ ag = ga, \ \forall g \in G \}$$

Jadi senter Z(G) adalah himpunan elemen-elemen yang konjugat ke dirinya sendiri.

Bila $o(Z(G)) = 1$ maka senter Z(G) disebut trivial, sedangkan bila $o(Z(G)) > 1$ senternya disebut senter non trivial.

Contoh :

(1). Satu-satunya elemen S_3 yang komutatif dengan setiap elemen S_3 adalah ρ_0

Jadi $Z(S_3) = \{\rho_0\}$

(2). D_4 grup dari himpunan seluruh permutasi dari D_4.

$_i$ = rotasi ; $_i$ = pencerminan

$_i$ = diagonal

$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$Z (D_4) = \{\rho_0 , \rho_2\}$

Teorema 2.3.5

Senter Z (G) dari grup G merupakan subgrup normal di dalam grup G.

2.4. GRUP FAKTOR (GRUP KWOSEN)

Bila G grup dan N G maka G/N yaitu himpunan koset-koset kiri terhadap subgrup N atau

G/N = N , aN , bN ,....

Dan G/N disebut grup faktor atau grup kwosen.

Contoh :

S_4 grup dari himpunan seluruh permutasi dengan degree 4.

$H \triangleleft S_4$ = { I , (ab)o(cd) , (ac)o(bd) , (ad)o(cd) }

Ha (abcd) = (abcd) , (ac) , (adcb) , (bd)

Ha (acbd) = (abcd) , (adbc) , (ab) , (cd)

Ha (adbc) = (abdc) , (ad) , (bc) , (acdb)

Ha (abc) = (abc) , (acd) , (bdc) , (adb)

Ha (bcd) = (bcd) , (acb) , (adc) , (abd)

S_4/H = { H , Ha (abcd) , H (acbd) , Ha (adbc) , Ha (abc) , Ha (bcd) }

Teorema 2.4.1

Grup faktor dari grup siklik adalah siklik.

2.5 p. GRUP

Definisi 2.5.1

Misalnya G suatu grup dan $a \in G$. Jika ada bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$, maka n disebut order dari a.

Bila tidak ada bilangan bulat positif sedemikian maka order dari elemen adalah takterhingga.

Elemen netral dari dari grup G adalah satu-satunya elemen dari grup G yang mempunyai order 1

Contoh :

(1). $Z_4 = (\bar{0} , \bar{1} , \bar{2} , \bar{3})$

$o(\bar{0}) = 1$

$\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = 4 (\bar{1}) = (\bar{0})$, $o(\bar{1}) = 4$

$\bar{2} + \bar{2} = \bar{2} (\bar{2}) = \bar{0}$, $o(\bar{2}) = 2$

$\bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$, $o(\bar{3}) = 4$

Teorema 2.5.1

Order setiap elemen dari grup berhingga G adalah pembagi order G.

Bukti :

Misalnya $a \in G$, $o(a) = m$. Maka menurut definisi 2.5.1 $a^m = e$. Sehingga a , a^2 , a^3 , ... a^{m-1} , $a^m = e$ dan merupakan subgrup dengan order m.

Menurut teorema lagrange mak order subgrup membagi order G.

Terbukti order setiap elemen dari grup berhingga G membagi order G.

Definisi 2.5.2

Grup G disebut p grup bila order setiap elemen dari grup G kecuali elemen netral e adalah pangkat dari bilangan prima p.

$\forall a \in G \quad , \quad a^{(p^m)} = e \quad , \; p$ = bilangan prima

m = bilangan bulat positif.

Contoh :

Z_4 = grup dari himpunan bilangan bulat modulo 4 dengan aturan komposisi penjumlahan.

$= \{ \bar{0} , \bar{1} , \bar{2} , \bar{3} \}$

$o(\bar{1}) = \quad = 2^2$

$o(\bar{2}) = 2 = 2^1$

$o(\bar{3}) = 4 = 2^2$

Definisi 2.5.3

Subgrup dari grup G disebut p subgrup bila subgrup itu sendiri merupakan p grup.

Contoh :

S_3 = grup dari himpunan seluruh permutasi dengan degree 3.

$= \{ \rho_0 , \rho_1 , \rho_2 , \mu_1 , \mu_2 , \mu_3 \}$

$\{ \rho_0 , \rho_1 , \rho_2 \}$ merupakan subgrup S_3 dan disebut 3 subgrup.

$\{ \rho_0 , \mu_1 \} : \{ \rho_0 , \mu_2 \} , \{ \rho_0 , \mu_3 \}$ subgrup S_3 dan di sebut 2 subgrup.

Teorema 2.5.2

Setiap subgrup dengan order bilangan prima adalah siklik.

Bukti :

Diambil $o(G) = p$, p bilangan prima dan $a \neq e \in G$ maka $H = \langle a \rangle$ adalah subgrup siklik dari grup G. (karena menurut teorema 1.3.2 setiap subgrup dari grup siklik adalah siklik) . Menurut teorema 1.2.4 order dari suatu - grup berhingga G habis dibagi oleh order daripada setiap subgrup dari G maka $o(H)$ membagi $o(G)$ dimana $o(G)$

definisi 1.3.3 order dari grup siklik dengan penghasil a adalah sama dengan order elemen $a \neq e$ dan karena satu satunya elemen dengan order satu adalah elemen netral e maka order $H = \langle a \rangle \neq 1$) . Jadi o(H) pasti bilangan prima p sehingga G = H = grup siklik.