BAB I

B E N D A H U L U A N

Pada bab ini dibahas komsep-konsep yang dapat menunjang masalah-masalah yang akan dibahas pada bab II dan bab III. Diantaranya adalah grup, subgrup, grup siklik.

1.1 GRUP

Definisi 1.1.1

Suatu grup G adalah suatu himpunan G terdiri atas elemen-elemen yang tidak didefinisikan beserta suatu hukum komposisi yang dapat disajikan dengan tanda yang memenuhi sifat-sifat dibawah ini :

1. Tertutup. Untuk suatu pasangan anggota-anggota a dan b (berlainan atau sama) dapat ditemukan dengan tunggal suatu elemen c dari G sedemikiam sehingga $a * b = c$

   $(\forall a,b \in G)(\exists c \in G)\ a * b = c$
2. Assosiatif. Untuk a,b,c dalam G berlaku

   $(a * b) * c = a * (b * c)$

   $(\forall a,b,c \in G)(a * b) * c = a * (b * c)$
3. Memiliki elemen netral kiri. Yaitu ada elemen e dalam G sedemikian sehingga untuk setiap a dalam G berlaku $e * a = a$

   $(\exists e \in G)(\forall a \in G)\ e * a = a$
4. Ada invers kiri untuk setiap elemen. Yaitu untuk setiap a dalam G dapat ditemukan a^{-1} dalam G sedemikian sehingga $a^{-1} * a = e$

   $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)\ a^{-1} * a = e$

Selanjutnya apabila masih dipenuhi sifat :

5. Komutatif. Yaitu untuk setiap pasangan a,b dalam G berlaku $a * b = b * a$

maka grupny disebut grup komutatif atau grup abelian. Didalam sifat-sifat diatas hanya disyaratkan adanya elemen netral kiri dan adanya invers kiri untuk setiap elemen. Tetapi dengan adanya sifat-sifat lainnya dapat dibuktikan bahwa netral kiripun merupakan netral kanan sehingga dapat dikatakan adanya elemen netral. Demikian juga invers kiri merupakan invers kanan, sehingga dapat dikatakan bahwa setiap elemen G mempunyai invers. Grup dimana himpunan dasarnya berhingga disebut grup berhingga dan grup dimana himpunan dasarnya tak berhingga disebut grup tak berhingga.

Untuk selanjutnya tanda $*$ diganti ".".

Definisi 1.1.2

Order suatu grup berhingga G, notasi o(G) adalah banyaknya anggota-anggota dari G. Bila grup G tak berhingga maka order G tak berhingga. Apabila grup G berhingga, maka komposisinya dapat disajikan dengan suatu tabel.

Teorema 1.1.1

Untuk grup G , berlaku hukum konsellasi, yaitu

$$ax = ay \Rightarrow x = y \quad \text{(hukum konsellasi kiri)}$$

$$xa = ya \Rightarrow x = y \quad \text{(hukum konsellasi kanan)}$$

untuk setiap a, x, y dalam G

Teorema 1.1.2

Elemen netral e adalah tunggal

Teorema 1.1.3

Invers suatu elemen adalah tunggal

Teorema 1.1.4

Invers dari invers a adalah a. Yaitu $(a^{-1})^{-1} = a$

Teorema 1.1.5

Persamaan ax = b dan ya = b mempunyai penyelesaian tunggal

Teorema 1.1.6

Hukum assosiatifitas umum berlaku, yaitu

$(a_1a_2\dots a_i)(a_{i+1}\dots a_n) = (a_1a_2\dots a_k)(a_{k+1}\dots a_n)$

Teorema 1.1.7

Invers dari suatu hasil ganda adalah hasil ganda dari invers-inversnya dengan urutan dibalik

$(ab\dots cm)^{-1} = m^{-1}c^{-1}\dots b^{-1}a^{-1}$

Definisi 1.1.3

a^m =def aa...a sebanyak m faktor

a^{-m}=def $a^{-1}a^{-1}\dots a^{-1}$ sebanyak mfaktor

a^0 =def e

Dari definisi diatas maka berlaku $a^{-m} = (a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$

Teorema 1.1.8

Apabila elemen-elemen a dan b komutatif maka $a^nb^n = (ab)^n$

Apabila hukum komposisi dari grup disajikan dengan tanda penjumlahan maka a+a+...+a sebanyak m suku disajikan dengan tanda ma, sehingga : $n(ma) = (nm)a$

$$ma + na = (n+m)a$$

$$na + nb = n(a+b)$$

Teorema 1.1.9

Apabila m dan n bilangan-bilangan bulat dan $a \in G$ maka

$$a^ma^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

1.2 SUBGRUP

Definisi 1.2.1

Subset H dari grup G disebut subgrup dari G bila terhadap hukum komposisi yang sama dengan hukum komposisi G, H merupakan grup. Ditulis :

" $H \leq G$ " atau " $G \geq H$ " dan " $H < G$ " atau " $G > H$ " bila

$H \neq G$. Dari definisi diatas e dan grup G sendiri merupakan subgrup dari G dan disebut subgrup tidak sejati. Subgrup subgrup yang lain disebut subgrup sejati.

Teorema 1.2.1

Syarat perlu dan cukup agar subset H merupakan subgrup dari grup G adalah :

1. Tertutup

   $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$, $\forall a, b \in H$

2. Elemen netral e dari grup G didalam H

3. Setiap elemen didalam H mempunyai invers

   $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$, $\forall a \in H$

Teorema 1.2.2

Apabila H dan K subgrup-subgrup dari grup G, maka $H \cap K$ pun subgrup dari grup G. Sedangkan $H \cup K$ pada umumnya bukanlah subgrup.

Bukti :

Apabila $a_1, a_2 \in H \cap K$ maka $a_1 \in H$ dan $a_2 \in H$ sehingga $a_1 . a_2 \in H$, sebab H subgrup. Karena juga $a_1 \in K$ dan $a_2 \in K$ maka $a_1 a_2 \in K$, sebab K subgrup. Sehingga $a_1 a_2 \in H \cap K$ karena H subgrup dari grup G maka elemen netral e dari grup G berada didalam H. Demikian juga karena K subgrup dari grup G maka elemen netral e dari grup G berada didalam K. Sehingga $e \in H \cap K$.

Apabila $a \in H \cap K$ maka $a^{-1} \in H$ dan $a^{-1} \in K$. Sehingga $a^{-1} \in H \cap K$

Dengan menggunakan teorema 1.2.1 terbukti $H \cap K$ subgrup. Sedsngkan $H \cup K$ umumnya bukan merupakan subgrup dari grup G.

Contoh :

S_3 = himpunan semua permutasi dengan degree 3.

S_3 adalah grup dengan aturan komposisi $*$ = pergandaan. Elemen-elemen S_3 adalah :

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1) \circ (2\ 3)$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2) \circ (1\ 3)$$

$$\mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (3) \circ (1\ 2)$$

$$\rho_0 \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

$$= \rho_1$$

$$\rho_1 \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1) = \rho_0$$

$$\rho_0 \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1) \circ (2\ 3) = \mu_1$$

Dan seterusnya, sehingga didapat tabel :

$\cdot$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_2	μ_3	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	μ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_0

Dari tabel terlihat bahwa $\{\rho_0, \mu_1\}$ dan $\{\rho_0, \mu_2\}$ merupakan subgrup dari S_3. Sedangkan

$\{\rho_0, \rho_1\} \cup \{\rho_0, \rho_2\} = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ bukan subgrup dari S_3.

Definisi 1.2.2

Bila $H = \{h_1, h_2, \ldots\}$ adalah subgrup dari grup G. Maka :

$aH =$def $\{ah_1, ah_2, \ldots\} = \{ah \mid h \in H\}$ dinamakan koset kiri relatif terhadap subgrup H

$Ha =$def $\{h_1a, h_2a, \ldots\} = \{ha \mid h \in H\}$ dinamakan koset kanan relatif terhadap subgrup H

Teoreme 1.2.3

Bila H suatu subgrup dari grup G, dan $a \in G$ maka :

1. $aH = H$ bhb $a \in H$
2. $aH = bH$ bhb $a^{-1}b \in H$
3. $b \in aH$ bhb $aH = BH$
4. Koset-koset saling asing
5. Koset-koset terkecuali H bukan subgrup dari grup G
6. Koset-koset itu ekwipotent.

Definisi 1.2.3

Apabila grup G dipandang terpecah-pecah atas koset-koset nya subgrup H, maka dikatakan bahwa diadakan dekomposisi relatif terhadap H dan ditulis :

$$G = H + aH + bH + \ldots\ldots$$

Definisi 1.2.4

Indeks dari subgrup H dalam grup G adalah banyaknya ko - set-koset (kiri / kanan *) relatif terhadap H ditulis :

$$[G : H]$$

Teorema 1.2.4 (Teorema Lagrange)

Order dari suatu grup berhingga G habis dibagi oleh or - der daripada setiap subgrup dari grup G.

Teorema 1.2.5

Apabila K dan H subgrup-subgrup dari grup G dengan indeks berhingga, berturut-turut n dan j sedangkan K termuat di-didalam H, maka :

1. Indeks h dari K didalam H berhingga juga.
2. $[G:H] = [G:H]\ [H:K]$ yaitu $n = jh$.

1.3 GRUP SIKLIK.

Definisi 1.3.1

Bila G grup, $a \in G$ dan $G = \{a^n \mid n \in Z\}$ maka G disebut grup siklik yang dihasilkan oleh a. Ditulis $G = \langle a \rangle$. Selanjutnya a disebut penghasil dari grup G.

Definisi 1.3.2

Bila G adalah grup, $a \in G$ dan $H = \{a^n \mid n \in Z\}$ adalah sub - grup dari grup G

Definisi 1.3.3

Grup siklik a yang dihasilkan oleh a adalah tak berhingga bila dan hanya bila ($a^p = a^q \Rightarrow p = q$)

Bila grup G berhingga dengan order n maka elemen-elemen G dapat ditulis $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$

Teorema 1.3.4

Dalam grup siklik $\langle a \rangle$ berorder n, elemen a^k ($0 < k < n$) merupakan elemen penghasil bila dan hanya bila k dan n relatif prima .

Bukti :

(Catatan : digunakan dalil ilmu hitung elementer yaitu ditentukan bilangan bulat k dan n maka dapat ditemukan bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $kx + ny = 1$ bila dan hanya bila k dan n relatif prima yaitu tidak mempunyai faktor berserikat keduali 1.

($\Longrightarrow$)

a^k ($0 < k < n$) merupakan elemen penghasil $\Rightarrow$ k dan n relatif prima. Jika a^k merupakan elemen penghasil, maka berarti a dapat dicapai dengan $(a^k)^x = a$

$$\begin{aligned} a^{kx} &= a \\ a^{kx}a^{-1} &= aa^{-1} \\ a^{kx-1} &= a^{1-1} \\ &= a^0 \\ &= e \\ &= a^n \end{aligned}$$

Berarti kx − 1 merupakan kelipatan n yaitu order dari $\langle a \rangle$ misalnya ny. Sehingga $kx - 1 = ny$

$$kx - ny = 1$$

Terbukti k dan n relatif prima .

($\Longleftarrow$)

k dan n relatif prima $\Longrightarrow$ a^k ($0 < k < n$) merupakan elemen penghasil.

Karena k dan n relatif prima maka ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $kx + ny = 1$

$$\begin{aligned} \text{Maka } (a^k)^x = a^{kx} &= a^{1-ny} \\ &= aa^{-ny} \\ &= a(a^n)^{-y} \\ &= a(e)^{-y} \\ &= ae \\ &= a \end{aligned}$$

Dengan demikian terlihat bahwa elemen penghasil untuk seluruh grup yaitu a berada dalam grup yang dihasilkan oleh a^k yaitu $\langle a^k \rangle$

Sehingga $\langle a \rangle \subset \langle a^k \rangle$ ....(1)

Karena $a^k \in \langle a \rangle$ maka $\langle a^k \rangle \subset \langle a \rangle$ ....(2)

Dari (1) dan (2) terbukti $\langle a \rangle = \langle a^k \rangle$.