BAB III

DISTRIBUSI KELANGSUNGAN HIDUP DAN TABEL KEMATIAN

3.1 DISTRIBUSI KELANGSUNGAN HIDUP

Dalam bab yang lalu telah diterangkan model sederhana untuk polis asuransi periode tunggal, dimana dasar dari model ini adalah variabel acak bernonlli, yang berhubungan dengan terjadi atau tidak terjadinya kerugian.

Dalam bab ini variabel acak waktu hingga mati, - T(X), merupakan dasar dari penyusunan model ini. Bab ini akan mengembangkan beberapa ide untuk melukiskan dan menggunakan distr ibusi dari waktu hingga kematian, dan distribusi yang berhubungan dengan umur kematian (X).

Akan ditunjukkan bagaimana distribusi dari variabel acak umur kematian dapat diringkas dari tabel kematian, hal ini banyak berguna dalam bidang ilmu pengetahuan. Akibat - nya banyak notasi dan daftar istilah dikembangkan diantara banyak pemakai yang menggunakan tabel kematian. Dalam bab ini, tabel kematian digunakan untuk menyusun model asuransi yang dibentuk untuk membantu keraguan seseorang tentang waktu kematiannya.

Tabel kematian merupakan komponen yang sangat diperlukan - dalam banyak model asuransi.

3.2 PROBABILITAS UNTUK UMUR KEMATIAN

Dalam sub bab ini akan dirumuskan ketidak tentuan umur kematian dalam konsep prababilitas.

3.2.1 Fungsi Kelangsungan Hidup.

Suatu variabel acak X dimisalkan sebagai usia bayi baru lahir hingga berumur X.

Misalkan = F (X) adalah x.f dari X

Jadi = $F(X) = Pr\ (X \leq x)$, $x \geq 0$ (3.1)

$$S(X) = 1 - F\ (X)$$
$$= Pr\ (X > x), \quad x \geq 0 \qquad (3.2)$$

Bila diasumsikan bahwa $F(0) = 0$, berarti $S(0) = 1$.
Fungsi S(X) disebut fungsi kelangsungan hidup jadi positip : S (x) adalah kemungkinan bayi baru lahir akan mencapai umur X.
Distribusi dari X dapat ditetapkan oleh fungsi lain yang spesifik yaitu fungsi F(X) atau fungsi S (X).
Dalam penggunaannya, prababilitas dari kelahiran baru akan mati antara umur X dan Z adalah :

$$Pr\ (x < X < Z) = F\ (Z) - F\ (x)$$
$$= S(x) - S\ (Z)$$

3.2.2 Kemungkinan Kematian seseorang.

Prababilitas bersyarat suatu kelahiran baru akan mati antara umur X dan Z, adalah :

$$Pr\ (x < X \leq Z \mid X > x) = \frac{F(Z) - F(x)}{1 - F(x)}$$
$$= \frac{S(x) - S\ (Z)}{S\ (x)} \qquad (3.3)$$

Simbul (x) akan digunakan untuk menandai hidup pada umur (x).
Untuk waktu hidup dimasa mendatang dari (x), X - x, juga bisa ditandai dengan T (x)

Pernyataan prababilitas tentang T(x), diberi notasi :

$$t\,Q_x = Pr\ [T(x) \leq t)], \quad t \geq 0 \qquad (3.4)$$

$$t^P{}_x = 1 - t^Q{}_x$$
$$= Pr\ [T(x) > t], \quad t \geq 0 \qquad (3.5)$$

dimana =

- ${}_tQ_x$ adalah prababilitas (x) akan mati dalam t tahun, ${}_tQ_x$ ialah fungsi distribusi dari T (x)
- ${}_tP_x$ adalah prababilitas bahwa (x) akan mencapai umur x + t, ${}_tP_x$ adalah fungsi kelangsungan hidup untuk (x).

Suatu simbul khusus untuk beberapa peristiwa umum, bahwa (x) akan hidup t tahun dan mati dalam μ tahun berikutnya, ialah (x) akan mati antara umur x + t dan umur (x + t) + μ tahun. Dengan simbulnya adalah ${}_{t/\mu}Q_x$ dan besarnya :

$$
\begin{aligned}
{}_{t/\mu}Q_x &= \Pr\left[\, t < T(x) \leq t + \mu \,\right] \\
&= {}_{t+\mu}Q_x - {}_tQ_x \\
&= {}_tP_x - {}_{t+\mu}P_x \qquad (3.6).
\end{aligned}
$$

Observasi kelangsungan hidup pada umur x menghasilkan suatu distribusi bersyarat yang sama dengan kelangsungan hidup seorang bayi yang baru lahir telah hidup pada umur x, adalah :

$$ {}_tP_x = \frac{{}_{x+t}P_o}{{}_xP_o} = \frac{S\,(x+t)}{S(x)} \qquad (3.7) $$

$$ {}_tQ_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S\,(x\,)} \qquad (3.8) $$

Suatu pendekatan dari rumus di atas dan hal-hal khusus dinyatakan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
{}_{t/\mu}Q_x &= \frac{S\,(x+t) - S(x+t+\ )}{S\,(x)} \\
&= \frac{S\,(x+t)}{S\,(x)} \cdot \frac{S(x+t) - S(x+t+\ \ )}{(S\,(x+t\,)} \\
&= {}_tP_x \cdot {}_{\mu}Q_{x+t} \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

3.2.3 Fungsi Waktu Hidup Mendatang.

Suatu kumpulan variabel acak diskrit yang berhubung an dengan masa hidup yang akan datang memakai beberapa model actuaria.

Variabel acak ini dapat ditandai dengan K (x), yang mempunyai fungsi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Pr\,[K(x)] &= Pr\,[\,k < T(x) \leq K + 1\,] \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\ &= {}_kp_x \quad Q_{x+k} \\ &= {}_kQ_x \,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Variabel acak K (x) diartikan sebagai jumlah dari tahun hidup mendatang secara penuh.

A sumsi lain apabila T (x) adalah variabel acak kontinu adalah :

$$Pr\,[\,T(x) = k\,] = Pr\,[\,T(x) = k + 1\,] = 0$$

dan dapat ditulis dengan ${}_kQ_x$.

Jadi $= {}_kQ_x = Pr\,[\,k \leq T(x) < k+1\,]$

3.2.4 Tingkat Kemungkinan kematian

Suatu fungsi untuk kematian dapat diperoleh dengan menggunakan densitas dari prababilitas kematian pada umur x ialah menggunakan persamaan (3.3) =

$$Pr\left[x < X < Z \mid X > x\right] = \frac{F(Z) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Dengan mengganti Z dengan z + Δx didapat :

$$Pr\left[x < X \leq x + \Delta x \mid X > x\right] = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$= \frac{f(x)\ \Delta x}{1 - F(x)}. \qquad (3.11)$$

Bentuk F' (x) = f (x) adalah p.d.f dari variabel acak umur kematian yang kontinu.

Fungsi $\frac{f(x)}{1-F(x)}$ dalam (3.11) merupakan tafsiran densitas dari prababilitas bersyarat.

Pada setiap umur x hal ini memberikan nilai pada p, d, f bersyarat dari x pada umur yang pasti, dan diberi notasi μ_x

Yaitu : $\mu_X = \dfrac{f(x)}{1-F(x)} = \dfrac{-S'(x)}{S(x)}$

3.3 TABEL KEMATIAN

Tabel kematian berisi perhitungan, umur umur kematian, fungsi dasar(basic) Q_X, l_X, d_X dan penambahan turunan dari fungsi tersebut.

Hubungan tabel kematian dengan fungsi kelangsungan hidup tertera dalam persamaan (3.8) yang menyatakan prababilitas bersyarat bahwa (X) akan mati dalam t tahun adalah

$$ {}_tQ_X = 1 - \frac{S(X+t)}{S(X)} $$

Apabila harga t = 1

$$ Q_X = 1 - \frac{S(X+1)}{S(X)} $$

Sekarang dipertimbangkan grup anak baru lahir atau Lo, misal diambil Lo = 100.000, yang masing-masing mempunyai - fungsi kelangsungan hidup S (X)

Di dalam penjumlahan ada notasi H (X) yang dirumuskan sebagai berikut :

$$ H(X) = \sum_{j=1}^{Lo} Ij , \quad j = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots Lo $$

H (X) adalah jumlah atau kelompok yang survice pada umur X

Ij suatu indikator untuk kelangsungan hidup dari j

dimana :

$$ Ij = \begin{cases} 1 , & \text{jika hidup j berlangsung sampai umur X} \\ 0 , & \text{untuk lainnya.} \end{cases} $$

Karena E (Ij) = S (X)

Maka $E\left[H(x)\right] = \sum_{j=1}^{Lo} E\left[Ij\right] = Lo\ S(X)$

Ada notasi untuk $E\left[H(X)\right]$ yaitu $L_X = lo\ S(X)$

L_X adalah perkecualian jumlah survival pada umur X dari Lo

Dan diketahui bahwa $L_X = Lo\ S(X)$

Dengan indikasi bahwa indikator Ij saling bebas.

H (X) menunjukkan distribusi binomial dengan parameter

n = Lo dan p = S (X).

Dengan jalan yang sama, $n^{D}X$ akan menunjukkan jumlah kematian antara umur X dan X + n dari Lo

Akan ditunjukkan $E\left[{}_{n}D_X\right]$ dengan $n\ {}^{d}X$

$$\underbrace{n^{d}X}_{\text{Populasi}} = E\left[n^{-D}X\right]_{\to \text{sampel}}$$

$$= Lo\left[S(X) - S(X+n)\right]$$

$$= L_X - L_{X+n}$$

Dari persamaan $L_X = Lo\ S(X)$

$$-\frac{1}{L_X}\ \frac{d\ LX}{d_X} = -\frac{1}{S(X)}\ \frac{d\ S(X)}{d_X}$$

$$= \mu X$$

$$\text{dan } -d\ L_X = L_X\ \mu_X\ d_X$$

$$L_X\ \mu_X = Lo\ {}_{X}P_o\ \mu_X$$

Faktor $L_X\ \mu_X$ pada persamaan di atas dapat diartikan se - bagai pe rkecualian densitas kematian dalam interval u mur antara X dan X + d_X.

Dari rumus ini akan dibentuk tabel yang nantinya akan di - pergunakan.

Contoh : penggunaan tabel kematian.

Dalam "Tabel kematian untuk populasi total AS - 1979 - 81" fungsi $_tQ_X$, L_X dan $_td_X$ dinyatakan dengan Lo = 100.000 kecuali anak baru lahir, nilai fungsi $_tQ_X$ dan $_td_X$ adalah 1.

Untuk contoh : dengan menggunakan tabel, hitunglah kemungkinan seseorang (20 tahun akan ±

a. Hidup sampai 100 tahun

b. Meninggal sebelum 70 tahun

c. Meninggal dalam decade kesepuluh (90 - 100).

Jawab :

a. $\frac{S\ (100)}{S\ (20)} = \frac{L\ (100)}{L\ (20)} = \frac{1150}{97741} = 0{,}0118$

b. $\left[\frac{S\ (20)-S(70)}{S\ (20)}\right] = 1 - \frac{L\ 70}{L\ 20} = 1 - \frac{68.248}{97.741} = 0.3017$

c. $\left[\frac{S\ (90) - S\ (100)}{(\ S\ (20)}\right] = \left[\frac{L\ 90 - L\ 100}{L\ 20}\right]$

$= \left[\frac{14154 - 1150}{97741}\right] = 0.1330$