BAB II

MODEL RESIKO PERSEORANGAN UNTUK PERIODE PENDEK

Untuk suatu organisasi asuransi, kerugian acak dari resiko perseorangan ditandai dengan S

Jadi $S = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$

Dengan X_1 = adalah kerugian jaminan untuk setiap nasabah

n = adalah jumlah dari nasabah yang menanggung resiko.

Model resiko dibagi menjadi dua yaitu model resiko perseorangan dan model resiko collective.

Dalam penulisan ini yang dibahas model resiko perseorangan Sedangkan model resiko collective tidak disinggung, dan polistermnya diasumsikan untuk periode pendek.

2.1. MODEL VARIABEL ACAK UNTUK KLAIM PERSEORANGAN

Dalam pembahasan bab ini akan dimulai dengan asuransi jiwa. Dalam jangka waktu satu tahun, penanggung setuju untuk membayar sejumlah b bila tertanggung meninggal dalam tahun yang dijanjikan dan tidak membayar sesuatu apabila tertanggung masih hidup pada tahun tersebut.

Peluang bahwa terjadi tuntutan dalam tahun tersebut adalah q, variabel acak tuntutan = X , mempunyai distribusi yang dapat dinyatakan dengan p.f (probability function) dan d.f (density function) sebagai berikut :

p.f adalah $f(x) = Pf\ (X = x)$

	$1 - q$	$x = 0$
	q	$x = b$ (2.1)
	0	lainnya

d.f adalah $F(x) = Pf\ (X \quad x)$

	0	$x \quad 0$
	$1 - q$	$0 \quad x \quad b$ (2.2)
	1	$x \quad b$

Dari P.f dan definisi moment didapatkan :

$$E[X] = \text{moment I dari } X$$
$$= 0(1-q) + b.q + 0$$
$$= 6.\ q. \qquad (2.3)$$
$$E[X^2] = \text{Moment ke II dari } X$$
$$= 0^2.\ (1-q) + b^2 .\ q + 0$$
$$= b^2 .\ q$$
$$\text{Jadi Var } [X] = E[X^2] - [E(x)]^2$$
$$= b^2 .\ q - b^2q^2$$
$$= b^2q\ (1 - q) \qquad (2.4)$$

Dari rumus ini dapat dituliskan bahwa :

$$X = I.\ b \qquad (2.5)$$

X = variabel acak tuntutan

I = variabel acak, bernilai 1 apabila terjadi kematian dan bernilai 0 apabila terjadi sebaliknya.

b adalah konstanta jumlah yang dapat dibayarkan apabila - terjadi kematian.

Sehingga :

$$\Pr (I = 0) = 1 - q$$
$$\Pr (I = 1)= q$$
$$\text{Dan } E(I=1) = q$$
$$E[I^2] = q$$
$$\text{Var } [I] \pm E[I^2] - (E[I])^2$$
$$= q - q^2$$
$$= q\ (1 - q\ )$$

$$\text{Sehingga } E[X] = E[I.b]$$
$$= b.\ E[I]$$
$$= b.\ q$$
$$\text{Var } [X] = \text{Var } [I.b]$$
$$= b^2 .\ \text{Var } [I] = b^2 .\ q\ (1 - q).$$

Dalam teori peluang, I disebut sebagai indikator bariabel acak bernoulli atau variabel acak binomial dalam percobaan tunggal. Sebab menunjukkan kejadian bila I = 1 dan bukan kejadian bila I = 0 dalam kejadian yang ditentukan. Kita akan mencari model yang lebih umum, dengan jumlah - tuntutan juga merupakan variabel acak dan beberapa tuntutan dapat terjadi dalam suatu periode.

Rumus (2.5) dapat diperluas menjadi :

$$X = I \cdot B$$

Dengan X = variabel acak tuntutan dalam periode

B = jumlah total tuntutan dalam periode

I = indikator, untuk kejadian.

I menghasilkan kejadian (I = 1) dan tidak terjadi (I = 0) dari tuntutan dalam suatu periode.

Pr (I = 1) tetap tergantung dari harga q

Perhatikan contoh di bawah ini untuk menentukan distribusi dari I dan B.

Misalkan dalam satu tahun, pihak perusahaan asuransi membayar keuntungan extra dalam kasus kematian yang disebabkan oleh kecelakaan.

Lebih terperinci jika kematian karena kecelalaan jumlah keuntungan extra dalam kasus kematian yang disebabkan oleh kecelakaan.

Lebih terperinci jika kematian karena kecelakaan jumlah keuntungan Rp. 50.000,00 jika kematian karena sebab yang lain, jumlah keuntungan adalah Rp. 25.000,00

Kemudian peluang dari kematian karena kecelakaan 0.0005 dan peluang dari kematian karena bukan kecelakaan 0.0020

Maka :

$$Pr\ (I = 1 \text{ dan } B = 50.000) = 0.0005$$

$$Pr\ (I = 1 \text{ dan } B = 25.000) = 0.0020$$

Untuk semua kemungkinan dari nilai B didapat :

$$Pr\ (I = 1) = 0.0005 + 0.0020$$

$$= 0.0025$$

$$Pr\ (I \quad Pr\ (I = 0) = 1 - Pr\ (I = 1)$$

$$= 1 \ . \ 0 \ . \ 0025$$

$$= 0.\ 9975$$

Maka distribusi dari B, jika I = 1 adalah

$$Pr\ (B = 25.000,\ I = 1) = \frac{Pr\ (B = 25.000 \text{ dan } I = 1)}{Pr\ (I = 1)}$$

$$= \frac{0\ .\ 0020}{0\ .\ 0025} = 08$$

$$Pr\ (B = 50.000\ I = 1\ ) = \frac{Pr\ (B = 50.000 \text{ dan } I = 1)}{Pr\ (I = 1)}$$

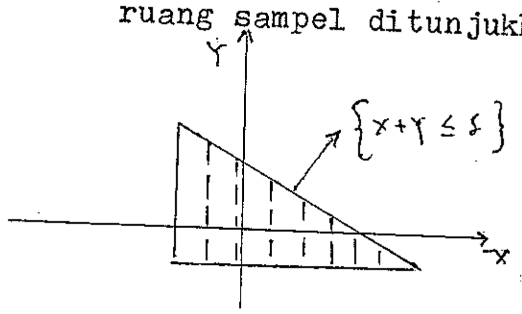
$$= \frac{0.0005}{0.0025} = 0.2$$

2.2. PENJUMLAHAN DARI VARIABEL ACAL YANG BEBAS.

Dalam model resiko perseorangan, tuntutan dalam perusahaan asuransi dimodel sebagai jumlah dari tuntutan beberapa orang yang diasuransikan.

Tuntutan dari beberapa orang diasuransikan saling bebas dalam banyak penggunaan. Dalam bab ini akan dibahas dua cara untuk menentukan distribusi dari jumlah variabel acak yang bebas.

PERTAMA = Penjumlahan dua variabel acak $S = X + Y$ dengan ruang sampel ditunjukkan pada gambar 2.3.



Gambar : 2.3

Gambar $X + Y = S$ dan daerah di bawah garis menunjukkan kejadian dari $\left[S = X + Y \leq s \right]$ sehingga d.f dari S adalah

$$F_S(S) = P_r[S \leq s] = P_r[X + Y \leq s] \qquad (2.6)$$

Untuk dua diskrit, variabel acak non negatif dapat digunakan hukum dari prabutilitas untuk menulis (2.6) menjadi :

$$F_S(S) = \sum_{\forall y \leq S} P_r[X + Y \leq S \mid Y = y] \, P_r(Y = y),$$

$$= \sum P_r[X \leq S - y) \mid P_r(Y = Y), \ \forall y \leq S \qquad (2.7)$$

Bila X dan Y saling bebas, jumlah terakhir dapat ditulis :

$$F_S(S) = \sum F_X(S-Y) \, f_y(y), \ \forall y \leq S \qquad (2.8)$$

P_f berhubungan dengan d_f dapat dihitung sebagai berikut :

$$f_S(S) = \sum f_x(s-y) \, f_y(y), \ \forall_y \leq s \qquad (2.9)$$

Untuk bentuk kontinu, variabel acak non negatif maka ketiga rumus terakhir dapat ditulis :

$$F_S(S) = \int_0^s P_r(X \leq S-Y \mid Y = y) \, f_Y(Y) \, dy \qquad (2.10)$$

$$F_S(S) = \int_0^s F_X(S-Y) \, f_y(y) \, dy \qquad (2.11)$$

$$f_S(S) = \int_0^s f_x(S - Y) \, f_Y(Y) \, dy \qquad (2.12)$$

Bila salah satu atau keduanya dari X dan Y mempunyai distribusi bertipe campuran (tipe dalam penggunaan resiko perseorangan) rumus serupa hanya lebih kompleks.

Untuk variabel acak dapat pula bernilai negatip, maka penjumlahan dan integral dalam rumus di atas mencakup semua harga Y dari minus X hingga plus X.

Dalam analisa matematika operasi (2.8) dan (2.11) disebut lingkar dari sepasang fungsi distribusi $F_X(X)$ dan $F_Y(Y)$ dan ditentukan oleh $F_X \star F_Y$, $\star$ = istilah lingkar.

Contoh 2.1 :

Misal X mempunyai distribusi uniform pada (0,2) dan Y saling bebas terhadap X dengan distribusi uniform diatas (0,3). Tentukan d_f dari $S = X + Y$.

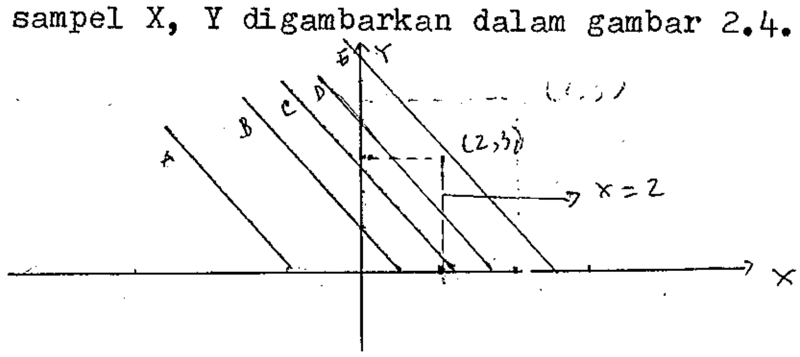
Jawab : Karena X dan Y kontinu, digunakan rumus (2.8)

$$F_X(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ X/2 & 0 \leq X < 2 \\ 1 & X \geq 2 \end{cases}$$

$$f_y(Y) = \begin{cases} 1/3 & 0 < Y < 3 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Maka rumus dari (2.8) $F_S(S) = \int_0^S F_X(S-Y)\, F_y(Y)\, d_y$

Ruang sampel X, Y digambarkan dalam gambar 2.4.



Daerah empat persegi panjang memuat semua probabilitas untuk X dan Y.

Hal yang menarik, $X + Y \leq S$ digambarkan dalam gambar untuk lima nilai S. untuk setiap nilai S, garis memotong sumbu y di S dan garis X = 2 di S - 2.

Nilai dari F_S untuk kelima kasus diatas adalah :

$F_S = 0 \qquad S < 0 \qquad$ Garis A

$F_S = \int_0^S 1/3 \cdot \frac{S-Y}{2} d_y = \frac{S^2}{12} \qquad 0 \leq S < 2 \qquad$ B

$F_S = \int_0^{S-2} 1/3\, d_y + \int_{S-2}^{S} 1/3\, \frac{S-Y}{2} d_y = \frac{S-1}{3} \qquad 2 \leq S < 3 \qquad$ C

$F_S = \int_0^{S-2} 1/3 \cdot 1\, d_y + \int_{S-2}^{3} 1/3\, \frac{S-Y}{2} d_y = 1 - \frac{(5-S)^2}{12}$

$3 \leq S < 5 \qquad$ D

$F_S = 1 \qquad S \geq 5 \qquad$ E

KEDUA : Untuk menentukan distribusi dari jumlah dan yang lebih dari dua variabel acak, digunakan proses - lingkar.

Untuk $S = X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_n$ dengan X_i variabel acak bebas, F_i d_f dari X_i, dan $F^{(K)}$ d_f dari $X_1 + X_2 + \ldots + Y_K$,

Sehingga didapatkan :

$$F^{(2)} = F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1$$

$$F^{(3)} = F_3 * F^{(2)}$$

$$F^{(4)} = F_4 * F^{(3)}$$

$$\vdots$$

$$F_S = F^{(n)} = F_n * F^{(n-1)}$$

Contoh 2.2 menggambarkan prosedur ini, untuk tiga variabel acak diskrit. Bila kita mempunyai distribusi variabel acak yang sama ($F_i = F, i = 1, 2, \ldots n$). Distribusi ini disebut lingkar ke n dari F dan ditulis F^{*n}

Contoh 2.2 :

Diket. variabel acak X_1, X_2 dan X_3 saling bebas dengan distribusi didefinisikan pada kolom (1) (2) dan (3) pada tabel Tentukan d_f dan p_f dari $S = X_1 + X_2 + X_3$,

Jawab : Notasi padaa paragraph sebelumnya digunakan pada tabel :

kolom (1) (2) dan (3) adalah data yang diberikan (variabel-acak yang bebas).

Kolom (4) d_f dari kolom (1)

Kolom (5) diturunkan dari kolom (2) dan (4) dengan rumus (2.8).

Kolom (6) diturunkan dari kolom (3) dan (5) dengan rumus (2.8).

Hasil turunan di kolom (6) melengkapi penentuan dari distribusi S dan p_f dapat diturunkan oleh perbedaan kolom (b). Untuk menggambarkan hal ini, kita memuat kolom (7) yang diturunkan dari kolom (1) dan (2) dengan rumus (2.9). Kemudian untuk kolom (8) diturunkan dari kolom (3) dan (7) dengan menggunakan rumus (2.9).

Tabel dari contoh : 2.2

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$F_1(x)$	$F^{(2)}(x)$	$F^{(3)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$
1	0.4	0.5	0.6	0.4	0.20	0.120	0.20	0.120
2	0.3	0.2	0.0	0.7	0.43	0.258	0.23	0.138
3	0.2	0.1	0.1	0.9	0.63	0.398	0.20	0.140
4	0.1	0.1	0.1	1.0	0.79	0.537	0.16	0.139
5	0.0	0.1	0.1	1.0	0.90	0.666	0.11	0.129
6	0.0	0.0	0.0	1.0	0.99	0.869	0.03	0.088
7	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.928	0.01	0.059
8	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.964	0.00	0.036
9	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.985	0.00	0.021
10	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.995	0.00	0.010
11	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	0.999	0.00	0.004
12	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00	1.000	0.00	0.001

2. 3. PENDEKATAN UNTUK JUMLAHAN SUATU DISTRIBUSI

Theorema limit sentral menyarankan suatu metode untuk menentukan nilai numerik suatu distribusi dari jumlah beberapa variabel acak yang bebas. Pernyataan dari theorema ini adalah untuk barisan saling bebas dengan distribusi variabel acak yang sama X_1, X_2, ... dengan $E(X_i) = \mu$ dan $Var(X_i) = \sigma^2$: untuk tiap n, distribusi dari $\sqrt{n}.(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ dengan $\bar{X}_n = (x_1 + X_2 + ... X_n)/n$ mempunyai mean = 0 dan varians = 1. Barisan distribusi (n = 1,2, ...) diketahui mendekati bentuk distribusi normal standard.

Bila n besar, thearema digunakan untuk mendekati distribusi dari $\bar{X}_n$ dengan distribusi normal dengan mean = μ , Var = σ^2/n .

Distribusi dari jumlah n variabel acak didekati dengan distribusi normal dengan mean $n\mu$ dan varianc $n\sigma^2$ Keefektifan pendekatan ini tergantung tidak hanya pada ban yaknya variabel, tapi juga pada penyimpangan dari distribusi jumlah terhadap distribusi normal.

Pada model resiko perseorangan variabel acak dalam jumlah tidak mempunyai distribusi yang sama. Hal ini akan dijelaskan dengan contoh pada bab berikut. Thearema limit sentral dapat diperluas untuk barisan dari jumlah variabel acak yang bebas dengan distribusi yang tidak sama.

Untuk menggambarkan beberapa model resiko perseorangan digunakan pendekatan normal untuk distribusi dari jumlah n variabel acak.

Jika $S = X_1 + X_2 + ... X_n$

Maka $E(S) = \sum_{k=1}^{n} E(X_K)$.

dan selanjutnya, dengan asumsi saling bebas

$$\mathrm{Var}\ (S) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var} \left[X_K \right]$$

2.4. PENGGUNAAN DALAM ASURANSI.

Dalam sub bab ini diberikan contoh untuk menjelas - kan penyelidikan dari sub bab 2.1 dengan menggunakan pende katan normal.

<u>Contoh</u> : Suatu perusahaan asuransi jiwa dengan kontrak sa- t u tahun.

Keuntungan berjumlah 1 dan 2 unit

Prababilitas kematian sebesar 0,02 atau 0,10

Tabel berikut memberikan jumlah orang = n_k dalam setiap em pat klas, jumlah keuntungan = b_k dan prababilitas tuntutan = Q_K

K	Q_K	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500

Perusahaan ingin mengumpulkan, dari populasi 1800 orang , jumlah yang setara dengan 95 % dari distribusi dari total- tuntutan.

Selanjutnya, diinginkan setiap bagian perorangan dari jum- lah ini sebanding dengan tuntutan rata-rata perorangan.

Bagian untuk perorangan j dengan mean $E(X_j)$ menjadi :

$(1 + \theta)\ E\ (Xj)$.

95 % mensyaratkan θ positip. jumlah ekstra ini, $\theta E\ (Xj)$ adalah pemuatan jaminan, dan θ adalah pemuatan jaminan relatif.

Hitung = θ

Jawab : Kriteria untuk θ adalah $Pr\ (S \leq (1+\theta)\ E(S)\ ) = 0{,}95$

dengan $S = X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots + X_{1800}$

$$\text{Maka} = Pr\left[\frac{(S - E(S))}{\sqrt{Var\ (S)}} \leq \frac{\theta\ E(S)}{\sqrt{Var\ (S)}}\right] = 0{,}95$$

Dalil limit sentral akan mendekati distribusi $\dfrac{(S - E(S)}{\sqrt{Var\ (S)}}$

Dengan distribusi normal standard dan menggunakan persentie 95 % untuk menentukan $\dfrac{\theta\ E(S)}{\sqrt{var\ (S)}} = 1{,}645.$ (Dari tabel Normal)

Sekarang tinggal menghitung mean, variance dan θ dengan persamaan ini.

Untuk empat kelas dari asuransi perseorangan, kita mendapatkan hasil sebagai berikut :

k	q_k	b_k	$\mu_k = b_k q_k$ (mean)	$\sigma^2_k = b^2_k\ q_k(1-q_k)$ (variance)	n_k
1	0.02	1	0.02	0.0196	500
2	0.02	2	0.04	0.0184	500
3	0.10	1	0.10	0.0900	300
4	0.10	2	0.20	0.3600	500

Maka :

$$E(S) = \sum_{j=1}^{1800} E(Xj) = \sum_{k=1}^{4} n_k\ \mu_k = 10 + 20 + 30 + 100 = 160$$

$$Var\ (S) = \sum_{j=1}^{1800} var\ (Xj) = \sum_{k=1}^{4} n_k\ \sigma^2_k = 9.80 + 39.20 + 27 + 180 = 256$$

Sehingga pemuatan jaminan relatif (*)

$$\frac{\theta \, E\,(S)}{\sqrt{Var\,(S)}} = 1,645$$

$$\theta = 1.645 \cdot \frac{\sqrt{256}}{160}$$

$$= 0.1645 \; .//$$