BAB II

PENGERTIAN - PENGERTIAN

2.1. AKAR - AKAR SUATU PERSAMAAN POLYNOMIAL DAN TEOREMA - TEOREMA PENDUKUNG

Suatu persamaan polynomial derajat n dapat ditulis dalam bentuk :

$P_n(x) = \emptyset$,

dimana :

$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n$

.....................(1.1)

$n = \{ \emptyset, 1, 2, \ldots \}$

$a_i \in R \quad \{ i = \emptyset, 1, 2, \ldots, n \}$

$a_i \neq \emptyset$

Definisi :

Jika $P_n(x) = (x-r).Q(x)$ dimana $Q(x)$ adalah suatu polinomial dengan derajat n-m dan m adalah bilangan bulat positif dan jika $Q(x) \neq \emptyset$ atau $\neq \infty$ maka r adalah akar derajat m dari $P_n(x) = \emptyset$, dimana $-\infty < r < \infty$.

Teorema - torema yang ada hubungannya dengan akar-akar persamaan polynomial adalah sebagai berikut :

TEOREMA I :

Suatu persamaan polynomial $P_n(x) = \emptyset$ berderajat n mempunyai tepat n akar.

BUKTI : Misalkan $r_1, r_2, \ldots r_n$ adalah akar - akar berlainan dari $P_n(x) = \emptyset$. Karena r_1 merupakan akar dari $P_n(x) = \emptyset$ maka $(x - r_1)$ adalah faktor dari $P_n(x)$. Sehingga :

$$P_n(x) = (x-r_1).P_{n-1}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

dimana $P_{n-1}(x)$ mempunyai derajat $n-1$. Apabila dalam persamaan terakhir ini x diganti dengan r_2 maka dari sebab $P_n(r_2) = \emptyset$ didapat :

$\emptyset = (r_1-r_2).P_{n-1}(r_2)$

Karena $r_1=r$ maka $P_{n-1}(r_2) = \emptyset$, sehingga $(x-r_2)$ merupakan factor dari $P_{n-1}(x)$, yaitu $P_{n-1}(x) = (x-r_2).P_{n-2}(x)$. Maka persamaan (1) menjadi :

$$P_n(x) = (x-r_1).(x-r_2).P_{n-2}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dimana $P_{n-2}(x)$ mempunyai derajat $n-2$. Dengan melanjutkan proses ini maka akhirnya didapat :

$$P_n(x) = a(x-r_1)(x-r_2) \ldots (x-r_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

a adalah koefisien pemimpin dari $P_n(x)$ jadi $= \emptyset$, misalkan r merupakan akar dari $P_n(x) = \emptyset$, sehingga $P_n(r) = \emptyset$

$a.(r-r_1).(r-r_2) \ldots (r-r_n) = \emptyset$

Dari sini terlihat karena $a = \emptyset$ maka pasti salah satu $r-r_n=\emptyset$, sehingga r adalah salah satu diantara $r_1, r_2, \ldots r_n$.

Maka terbukti persamaan $P_n(x)=\emptyset$ dimana $P_n(x)$ mempunyai derajat n, mempunyai tepat n akar.

TEOREMA II : **TEOREMA SISA**

Jika suatu polynomial $P_n(x)$ berturut - turut dibagi dengan $(x - r)$ sampai diperoleh sisa yang konstan, maka sisa tersebut sama dengan $P_n(r)$.

BUKTI :

Apabila $P_n(x)$ dibagi dengan $x-r$ dengan hasil bagi $Q(x)$ yang mempunyai derajat n-1 dan suatu sisa R, maka diperoleh :

$P_n(x) = (x-r).Q_{n-1}(x) + R$

......................(4)

Untuk x=r maka persamaan (4) menjadi :

$P_n(r) = \emptyset.Q_{n-1}(r) + R$

$P_n(r) = R$

.... (5)

TEOREMA III : **TEOREMA FACTOR**

Jika $P_n(r)=\emptyset$ maka $(x-r)$ adalah faktor dari $P_n(x)$. Dan sebaliknya.

BUKTI :

1. Akan dibuktikan jika $P_n(r) = \emptyset$ maka $(x-r)$ merupakan suatu faktor dari $P_n(x)$, demikian :

   Sesuai teorema II, jika $P_n(x)$ dibagi $(x-r)$ mempunyai sisa $P_n(r)$.

Sehingga berlaku :

$P_n(x) = (x-r).Q(x) + P_n(r)$ .... (6)

Jika $P_n(r)=\emptyset$ persamaan (6) menjadi :

$P_n(x) = (x-r).Q(x)$

maka (x-r) adalah faktor dari $P_n(x)$.

2. Akan dibuktikan jika (x-r) faktor dari $P_n(x)$ maka $P_n(r)=\emptyset$, demikian :

   Sesuai teorema II, jika $P_n(x)$ dibagi (x-r) mempunyai sisa $P_n(r)$, sehingga berlaku :

   $P_{n(x)}= (x-r).Q(x) + P_n(r)$

   Jika (x-r) factor dari $P_n(x)$ maka x=r memenuhi persamaan $P_n(x) = \emptyset$, yang berarti $P_n(r)=\emptyset$.

TEOREMA IV :

Jika koefisien-koefisien a_i dari $P_n(x)$ adalah bilangan real dan a+bi dimana a dan b bilangan real dengan b=Ø, apabila a+bi adalah suatu akar dari persamaan polynomial $P_n(x) = \emptyset$, maka a-bi juga merupakan suatu akar dari persamaan $P_n(x)=\emptyset$.

BUKTI :

Jika a+bi suatu akar dari $P_n(x)=\emptyset$, maka (x-(a+bi)) adalah faktor dari $P_n(x)$.

$P_n(x)$ dibagi dengan $(x-(a+bi)).(x-(a-bi))$ dimana $(x-((a+bi))(x-((a-bi))=x^2 -2a.x + a^2 + b^2$ menghasilkan sisa $cx+d$ dimana c dan d bilangan real.

$$\frac{P_n(x)}{x^2 - 2a.x + a^2 + b^2} = Q(x) + \frac{cx+d}{x^2 - 2a.x + a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

atau

$$P_n(x) = (x^2 - 2a.x + a^2 + b^2).Q(x) + c.x + d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

dimana c dan d adalah konstanta real.

Karena persamaan (8) berlaku untuk semua x maka benar untuk $x=a+bi$.

$P_n(a+bi) = 0.Q(a+bi) + c.(a+bi) + d$

$P_n(a+bi) = c.(a+bi) + d$

$P_n(a+bi) = 0$

maka :

$$c.a + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$c.b_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Karena diketahui $b \neq 0$, $i \neq 0$ maka $c=0$ .... (11)

persamaan (9) menjadi:

$0 + d = 0$

maka :

$d = 0$

Persamaan (8) menjadi :

$P_n(x) = (x^2 - 2a.x + a^2 + b^2).Q(x)$

$P_n(x) = (x-(a+bi)).(x-(a-bi)).Q(x)$

.... (12)

Sehingga persamaan polynomial $P_n(x)=\emptyset$ dapat disajikan sebagai :

$(x-(a+bi)).(x-(a-bi)).Q(x) = \emptyset$

berarti $(x-(a+bi)) = \emptyset$, maka $x = a-bi$ juga merupakan akar dari $P_n(x)=\emptyset$.

TEOREMA V :

Suatu polynomial derajat $2n+1$, dengan n bilangan asli dapat difaktorkan sebagai hasil kali $(fx+g)$ dan (cx^2+dx+e), dengan c, d, e, f, g real.

BUKTI :

Jika $P_n(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} +...+ a_1.x^1 + a_o$ adalah suatu polynomial real yang mempunyai derajat n, maka menurut teorema IV, apabila a+bi adalah akar dari $P_n(x)=\emptyset$ maka a-bi juga merupakan akar dari $P_n(x)=\emptyset$, dengan $b\neq\emptyset$.

Ambil:

$h_2(x) = (x-a-bi).(x-a+bi)$

$h_2(x) = x^2 - 2a.x + a^2 + b^2$

$P_n(x)$ dibagi dengan $h_2(x)$ sampai menghasilkan sisa yang mempunyai derajat

1. misal ux+v , maka :

$P_n(x) = h_2(x).Q_{n-2}(x) + v$

.... (13)

dimana $Q_{n-2}(x)$ adalah suatu polynomial real yang merupakan hasil bagi $P_n(x)$ dengan $h_2(x)$.

Dengan mengganti x=a+bi pada persamaan (8) maka menurut teorema IV didapat u=Ø dan v=Ø. Proses ini dilanjutkan terus sampai menghasilkan polynomial sisa yang hanya mempunyai akar real. Jika $P_n(x)=Ø$, apabila akar - akar tersebut $r_1, r_2, .. r_k$ maka menurut Teorema Factor dapat ditulis sebagai :

$a_o.(x-r_1).(x-r) \ldots (x-r_k).D_1(x).$

$D_2(x) \ldots D_t(x)=Ø$

Berarti $P_n(x)$ dapat difactorkan sebagai hasil kali para (fx+g) dan para (cx^2+dx+e)

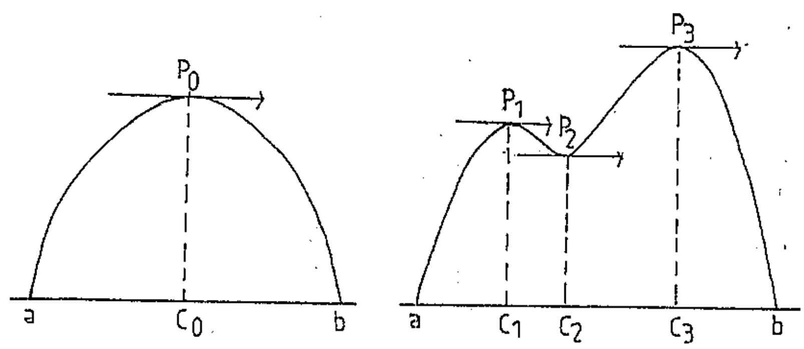
TEOREMA VI : TEOREMA ROLLE

Jika f(x) kontinu pada interval tertutup $a \leqslant x \leqslant b$ dan dapat didiferensiir pada interval terbuka $a < x < b$ dan f(a)=f(b) = Ø, maka terdapat sedikit - dikitnya satu titik dengan absis x=c dimana a<x<b sehingga berlaku f'(x)=Ø.

BUKTI :

Untuk memperoleh gambaran mengenai Dalil Rolle ini dari sudut ilmu ukur dapat dilihat pada gambar. Pada gambar 1, garis singgung di titik P_o berabsis $x=c_o$ sejajar sumbu x.

Pada gambar 2, garis singgung di titik P_1 berabsis $x=c_1$, di titik P_2 berabsis $x=c_3$, masing-masing sejajar sumbu x.



- Jika f(x) berimpit dengan sumbu x berarti f(x)=0 maka selalu berlaku f'(x)=0 sehingga Dalil Rolle benar.

- Jika f(x)≠0, karena f(x) kontinu pada interval a<x<b maka terdapat sedikit-dikitnya satu titik x=c pada interval tersebut sehingga f(c) mencapai harga maksimum atau harga minimum.

  Misalkan terdapat harga maksimum sebesar M, maka f(c)=M. Karena maksimum maka $f(c+h)<f(c)$.

Terdapat 2 hal :

1. Bila $h>0$ maka $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$ dan

   turunan kanan dari $f(x)$ di titik $x=c$ ialah :

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

2. Bila $h < 0$ maka $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$ dan

   turunan kiri dari $f(x)$ di titik $x=c$ ialah :

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Diketahui bahwa $f(x)$ dapat didiferensiir pada interval $a<x<b$, maka dapat didiferensiir juga di titik $x=c$ dimana $(a<c<b)$.

Dengan perkataan lain di titik $x=c$ berlaku bahwa turunan kanan dari $f(x)$=turunan kiri dari $f(x)$.

Dan ini hanya terjadi jika (1)=(2)=0.

Berarti:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ atau } f'(c) = 0$$

TEOREMA VII : TEOREMA NILAI RATA-RATA

Jika $f(x)$ kontinu pada interval tertutup $a \leqslant x \leqslant b$, dan dapat didiferensiir pada interval terbuka maka terdapat sedikit -

dikitnya satu titik dengan absis x=c dimana $a < c < b$ sehingga berlaku :

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-a} = f'(c)$$

BUKTI :

Pernyataan $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ adalah kemiringan dari garis yang menghubungkan titik A (a,f(a)) dan B(b,f(b)). Ambil fungsi baru yang memenuhi kondisi dari Teorema Rolle, misalkan fungsi itu :

$$g(x) = f(x)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

dimana g(x) adalah selisih antara elemen kedua dari titik (x,f(x)) pada grafik dari fungsi f dan elemen kedua dari titik :

$$(x, f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a))$$

pada garis lurus yang menghubungkan A(a,f(a)) dan b(b,f(b)). g(x) merupakan fungsi yang menyatakan jarak antara sebarang titik pada f(x) dan titik yang berabsis sama dan terletak pada garis lurus yang menghubungkan A dan B.

Jelaslah bahwa g(a)=g(b)=Ø dan g kontinu pada (a,b).

Maka $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dan f differentiable pada (a,b), maka g differentiable pada (a,b). Maka menurut Teorema Rolle terdapat satu titik $c \in (a,b)$ sedemikian hingga. $g'(c) = 0$.

Didapat :

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f(b)-f(a) = (b-a).f'(c)$$

2.2. METODE BIERGE - VIETA

Metode ini dipergunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan polynomial derajat n, dimana metode ini dipakai untuk mencari akar dari suatu persamaan dengan cara yang tidak langsung. Maksudnya ialah dalam mencari penyelesaian suatu persamaan dengan melaksanakan serangkaian operasi aritmatika dan operasi logika dengan cara diulang-ulang. Jawaban yang diperoleh merupakan suatu pendekatan dan diperbaiki dengan setiap pengulangan dari operasinya sampai batas ketelitian yang dikehendaki.

Metode Birge Vieta merupakan metode gabungan / kombinasi dari 2 proses yaitu :

- Proses Pembagian Sintetik oleh Faktor Linier dan
- Iterasi Newton Raphson.

Proses Pembagian Sintetik pada metode ini dibutuhkan untuk mencari $P_n(x)$ dan $P'_n(x)$ dimana nilai-nilai dari $P_n(x)$ dan $P'_n(x)$ diperlukan dalam rumus iterasi Newton Raphson untuk menghitung x_{i+1}. Apabila persamaan polynomial derajat n dinyatakan dalam bentuk umum $P_n(x) = \emptyset$, dimana :

$P_n(x) = a_o x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots$
$+ a_{n-1} x + a_n$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

dan mempunyai koefisien-koefisien a_i ($i=\emptyset, 1, \ldots n$) yang nyata, diambil akar-akar persamaannya ialah r_i ($i = 1, 2, \ldots n$) maka persamaan (2.1) dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari n faktor linier $(x-r_i)$. Yaitu :

$P_n(x) = (x-r_1).(x-r_2) \ldots (x-_{rn})$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2)$$

Bila akar dari $P_n(x) = \emptyset$ yaitu $r_1 = x_1$ telah dihitung maka $P_n(x)$ diganti dengan polynomial derajat (n-1) yaitu $P_{n-1}(x)$ dengan $P_{n-1}(x) = P_n(x)/(x-r_1)$.
Akar r_2 yang diperoleh dari $P_{n-1}(x) = \emptyset$ juga merupakan akar dari $P_n(x) = \emptyset$.
Dengan cara yang sama dalam menghitung r_1 maka

$P_{n-1}(x)$ diganti dengan $P_{n-2}(x) = \dfrac{P_{n-1}(x)}{(x-r_2)}$

yaitu polynomial derajat n-2.
Proses ini diteruskan sampai menghasilkan semua akar $r_1, r_2, r_3 \ldots rn$ dari $P_n(x) = \emptyset$.

2.2.1. PROSES PEMBAGIAN SINTETIK UNTUK MENGHITUNG $P_n(x)$ DAN $P'_n(X)$

Jika $P_n(x)$ dibagi dengan factor $(x-x_i)$ maka diperoleh $$\frac{P_n(x)}{(x-x_i)} = x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + b_2.x^{n-3}$$

$$+ \ldots b_{n-2}\,x + \frac{b_n}{x - x_i} + b_{n-1}$$

Apabila persamaan ini dikalikan dengan $x-x_i$:

$$P_n(x) = (x-x_i).(x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}.x + b_{n-1}) + b_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

Misalkan diambil akar perkiraan $x=x_i$ maka dari persamaan (2.3) didapat $P_n(x_i) = b_n$. Karena b_n dapat dihitung maka persamaan polynomial $P_n(x)$ dapat dihitung untuk $x = x_i$.

Untuk mencari semua b.i, i dari 1,2, ... n dapat dicari dengan cara menyamakan semua koefisien pangkat x yang sama pada kedua ruas kanan persamaan (2.1) dan persamaan (2.3) yaitu :

$$P_n(x) = x^n + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.x + a_n = \emptyset \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x-x_i).(x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}.x + b_{n-1}) + b_n \\ &= (x^n + b_1.x^{n-1} + b_2.x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}.x^2 + b_{n-1}.x) - x_i.(x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}.x + b_{n-1}) + b_n \\ &= x^n + (b_1-x_i).x^{n-1} + (b_2-b_1.x_i).x^{n-2} + \ldots + (b_{n-2} - b_{n-1}.x_i) + b_n \end{aligned}$$

Didapat :

$a_1 = b_1 - x_i$ $\qquad$ $b_1 = a_1 + x_i$

$a_2 = b_2 - b_1.x_i$ $\qquad$ $b_2 = a_2 + b_1.x_i$

$a_3 = b_3 - b_2x_i \quad b_3 = a_3 + b_2x_i$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a_k = b_k - b_{k-1}x_i \quad b_k = a_k + b_{k-1}x_i$

$a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}x_i \quad b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}x_i$

$a_n = b_n - b_{n-1}x_i \quad b_n = a_n + b_{n-1}x_i$

Secara umum :

$b_1 = a_1 + x_i$ (awal)

$b_k = a_k + b_{k-1}x_i$ $(k=2, 3, \ldots n)$

(pengulang)

Jadi nilai $P_n(x)$ untuk $x=x_i$ yang nilainya sebesar b_n dapat dihitung dengan mencari b_n memakai rumus yang sudah ada yaitu rumus (2.4).

Untuk mencari nilai $P'_n(x)$ diperoleh dengan cara menurunkan $P_n(x)$ dari persamaan (2.3).

$P_n(x) = (x-x_i).P_{n-1}(x)$

$P'_n(x) = (x-x_i).P'_{n-1}(x) + P_{n-1}(x)$

....................(2.5)

dimana $P_{n-1}(x) = x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \ldots$

$+ b_{n-2}.x + b_{n-1}$

untuk harga $x=x_i$, didapat :

$P'_n(x) = P_{n-1}(x)$

.... (2.6)

sedang jika $P_{n-1}(x)$ dibagi dengan $(x-x_i)$ akan diperoleh :

$P_{n-1}(x) = (x-x_i).P_{n-2}(x) + c_n$

..................(2.7)

dimana :

$$P_{n-2}(x) = c_1.x^{n-2} + c_2.x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}.x + c_{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

Maka dari persamaan (2.7) untuk $x=x_i$ diperoleh $P_{n-1}(x)=c_n$ dan $P'_n(x)=c_n$ yang diperoleh dari persamaan (2.6).

Untuk menghitung c_i ($i=2,3, \ldots n$) digunakan cara yang sama pada waktu menghitung b_i yaitu dengan cara menyamakan koefisien dari pangkat x yang sama pada ruas kanan dan ruas kiri dari persamaan (2.7).

$$x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}.x + b_{n-1}$$
$$= (x-x_i).P_{n-2}(x) + c_n$$
$$= (x-x_i).(c_1.x^{n-2} + c_2.x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}.x + c_{n-1})$$
$$+ c_n$$
$$= c_1.x^{n-1} + c_2.x^{n-2} + \ldots + c_{n-2}.x^2 + c_{n-1}\ x -$$
$$x_i.(c_1.x^{n-2} + c_2.x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}.x + c_{n-1}) + c_n$$
$$= c_1.x^{n-1} + c_2.x^{n-2} + c_3.x^{n-3} - x_i.c_2.x^{n-3} + \ldots$$
$$+ c_{n-1}.x - x_i.c_{n-2}.x + c_{n-1} + c_n$$

Didapat :

	$c_1 = 1$
$b_1 = c_2 - x_i.c_1$	$c_2 = b_1 + x_i.c_1$
$b_2 = c_3 - x_i.c_2$	$c_3 = b_2 + x_i.c_2$
$\vdots$	$\vdots$
$b_{k-1} = c_k - x_i.c_{k-1}$	$c_k = b_{k-1} + x_i.c_{k-1}$
$\vdots$	$\vdots$
$b_{n-2} = c_{n-2} - x_i.c_{n-2}$	$c_{n-1} = b_{n-2} + x_i.c_{n-2}$

$b_{n-1}=c_n \quad -x_i c_{n-1} c_n \quad =b_{n-1}+x_i c_{n-1}$

Secara umum didapat :

$c_1 = 1$ (awal)

$c_k = b_{k-1} + x_i\, c_{k-1}$ $(k=2,3, \ldots)$

(pengulang)

Jika diberikan x_i, suatu nilai pendekatan salah satu akar dari persamaan polynomial $P_n(x)=\emptyset$, maka nilai $P_n(x_i)$ dan $P'_n(x_i)$ yang dibutuhkan dalam rumus iterasi Newton Raphson untuk menghitung x_{i+1} dapat diperoleh.

Secara ringkas proses mencari $P_n(x_i)$ dan $P'_n(x_i)$ adalah :

$$
\begin{array}{llllll}
1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_n \\
 & x_i & x_i b_1 & \ldots & x_i b_{n-3} & x_i b_{n-1} \\
\hline
1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-2} & b_n = P_n(x_i) \\
 & x_i c_1 & x_i c_2 & \ldots & x_i c_{n-2} & \\
\hline
c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n-2} & = P'_n(x_i)
\end{array}
$$

Kemudian menghitung pendekatan akar x_{i+1} dengan rumus Newton Raphson sampai didapat x_{i+1} yang paling mendekati.

2.2.2. METODE NEWTON RAPHSON

Didalam menentukan akar persamaan umum $P(x) = \emptyset$ ....(1)

digunakan suatu metode pendekatan yang meliputi 2 tahap :

1. Menentukan akar pendekatan

2. Akar pendekatan dijabarkan lagi untuk mendapatkan ketelitian yang diinginkan

Bentuk persamaan $f(x)=\emptyset$ dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu :

$$x = g(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sebagai contoh misalnya $f(x) = \emptyset$, dimana $f(x) = x^2 - c$ dengan $c>\emptyset$

Cara yang ke :

1. Dengan menambah x pada kedua ruas dan didapat $x=x^2+x-c$
2. Dengan dibagi x pada kedua ruas $x=c/x$
3. Dengan dibagi 2x kemudian ditambahkan x pada kedua ruas $x=1/2(x+c/x)$
4. Atau dengan cara yang lain

Bila $x_\emptyset$ merupakan harga pendekatan awal dari persamaan (2) maka sebagai nilai pendekatan berikutnya diperoleh $x_1 = g(x_\emptyset)$. Sebagai harga pendekatan berikutnya lagi adalah $x_2 = g(x_1)$ dan seterusnya sehingga untuk pendekatan ke i disebut dengan iterasi ke i yaitu :

$$x_i = g(x_{i-1}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

Metode iterasi akan konvergen apabila pendekatan makin mendekati hasil yang tertentu.

Persamaan (2) didapatkan dari perpotongan antara garis $y = x$ dan kurva $y = g(x)$. Misalkan $x=r$ adalah harga dari titik potong $y = x$ dan $y = g(x)$ maka r adalah akar dari persamaan (2), sehingga :

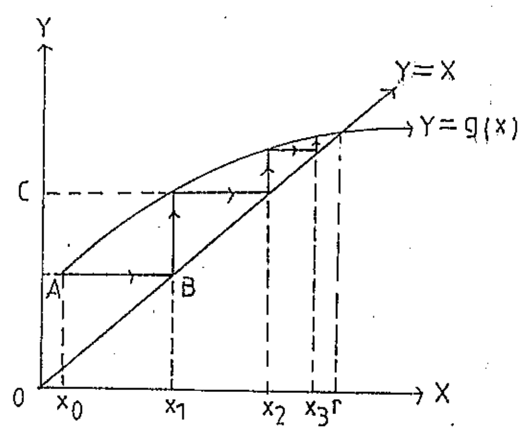
$r = g(r)$

$$\text{....................(3.2)}$$

Nilai r yang dicari merupakan salah satu penyelesaian dari persamaan (1).

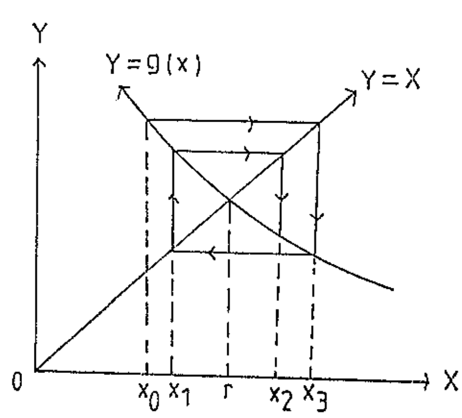
Karena dalam membentuk persamaan (1) menjadi persamaan (2) ada berbagai cara, sehingga akan dijumpai $g'(x)$ yang berbeda.

Hal ini dilukiskan pada gambar - gambar dibawah ini.



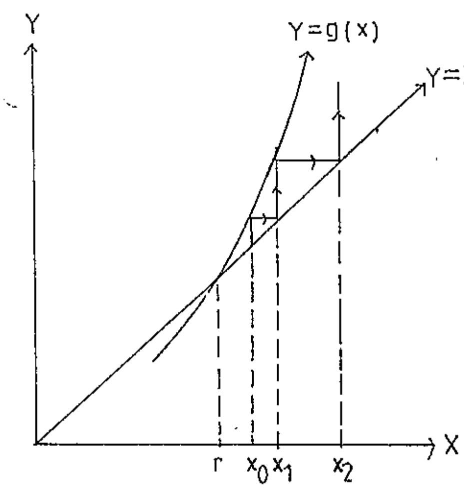
Gambar 1

Iterasi untuk $0 < g'(x) < 1$



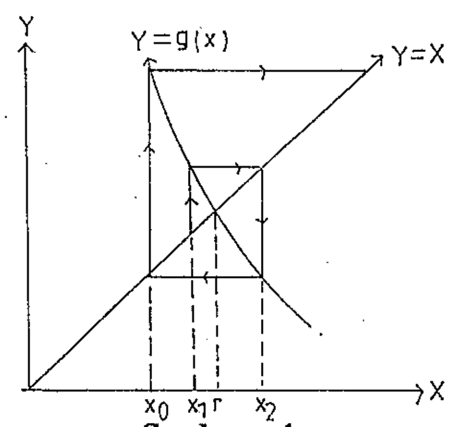
Gambar 2

Iterasi untuk $-1 < g'(x) < 0$



Gambar 3

Iterasi untuk $g'(x) > 1$



Gambar 4

Iterasi untuk $g'(x) < -1$

Pada gambar (1) jika iterasi yang pertama dipilih harga pendekatan awal $x_\emptyset$ maka harga $x_1 = g(x_\emptyset)$ yaitu OA dan dengan menarik garis sejajar sumbu x didapat titik potong B yang memotong garis $y = x$. Harga $g(x_1) = x_2$ diperoleh dengan menarik garis vertikal lewat B dan memotong kurva $y = g(x)$ maka OC = x_2. Ini dilakukan sampai menghasilkan titik potong $y=x$ dan $y=g(x)$ yaitu nilai r.

Pada gambar (3) dan (4) tiap tahapnya semakin menjauhi titik potong $y=x$ dan $y=g(x)$, jadi semakin menjauhi nilai r yang dicari. Maka dikatakan iterasi pada gambar (3) dan (4) divergen, sedang gambar (1) dan (2) konvergen.

Dari ke 4 gambar tersebut bisa diambil kesimpulan bahwa apabila $|g'(x)| < 1$ maka iterasinya adalah konvergen. Ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

$r = g(r)$ dari persamaan (3.2)

$x_i = g(x_{i-1})$ dari persamaan (3.1)

maka

$x_i - r = g(x_{i-1}) - g(r)$

Ruas kanan dikalikan $\dfrac{(x_{i-1} - r)}{(x_{i-1} - r)}$ Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata didapatkan :

$$x_i - r = g'(\varphi).(x_{i-1} - r) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

dimana φ terletak diantara x_{i-1} dan r.

Bila M adalah maksimum mutlak dari $g'(x)$ dengan φ ada dalam interval $x_{\emptyset}, x_1, \ldots x_i, r$ maka :

$|(x_i - r)| \leqslant M\, |(x_{i-1} - r)|$

$|(x_{i-1} - r)| \leqslant M\, |(x_{i-2} - r)|$

Sehingga :

$|(x_i - r)| \leqslant M^2\, |(x_{i-1} - r)|$

Dengan meneruskan cara ini didapat :

$|(x_i - r)| \leqslant M^i\, |(x_{\emptyset} - r)|$

Jika $M < 1$ berapapun nilai $x_{\emptyset}$ akan membuat unsur diruas kanan menjadi kecil, dan x_i menjadi lebih dekat dengan r dan sebaliknya jika $|g'(x)| > 1$, $(x_i - r)$ akan menjadi besar dengan bertambahnya i.

Dapat disimpulkan :

- Bila $|g'(x)| < 1$ proses konvergen
- Bila $|g'(x)| > 1$ proses divergen

Jadi dalam mengubah bentuk (1) menjadi bentuk (2) harus dicari bentuk $g(x)$ sedemikian sehingga syarat konvergensi dipenuhi, karena bisa ditemui proses iterasi pada suatu persamaan mungkin konvergen mungkin divergen. Sebagai contoh dalam mengubah $f(x) = x^2 - c$ ke bentuk $g(x) = x^2 + x - c$ maka didapat $g'(x) < 1$ untuk $-1 < x < \emptyset$ dan prosesnya konvergen.

Jika $f(x)$ diubah ehingga didapat $g(x) = c/x$, maka $g'(x) = -c/x^2$. Untuk $x = \sqrt{c}$ diperoleh $g'(x) = -1$ dan prosesnya divergen.

Pada Gambar 1 terlihat bahwa setiap iterasi lebih mendekati harga tertentu dari iterasi sebelumnya. Maka secara umum proses tersebut dapat ditulis :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \qquad \text{....................(3.4)}$$

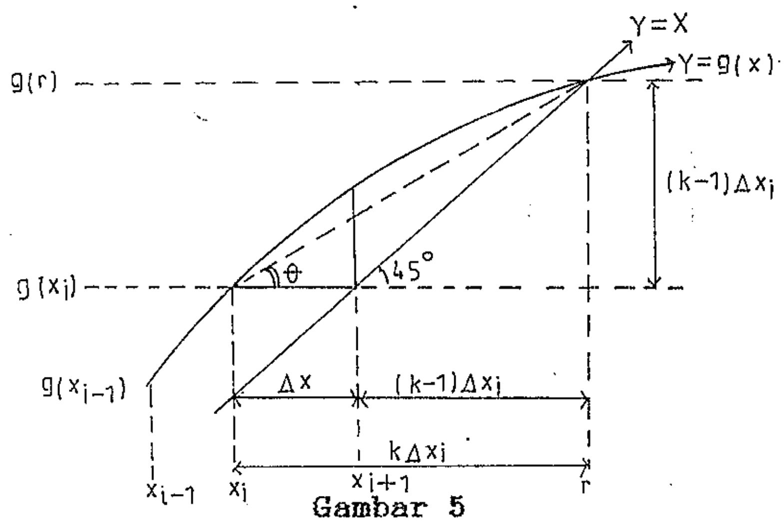
dimana

$\Delta x_i = g(x_i) - x_i$

maka iterasi selanjutnya dapat dipilih :

$x_{i+1} = x_i + k.\Delta x_i$, dimana $k > 1$.

Sebab dengan memilih harga yang tepat akan didapatkan harga $x_{i+1} = r$. Hal ini dilukiskan pada diagram 5 dibawah ini.



Gambar 5

Dari diagram diketahui jarak antara x_{i+1} dan r adalah $(K - 1).\Delta x_i$ dengan $y = x$ bersudut 45^{o}. Maka didapat sudut tangen Ø adalah :

$$tg\ \theta = \frac{(k-1) * \Delta x_i}{k. \Delta x_i} = \frac{k-1}{k}$$

........................(4)

$$tg\ \Theta = \frac{g(r) - g(x_i)}{r - x_i}$$

Dengan menggunakan teorema Nilai Rata - Rata , $tg\ \theta = g'(\xi)$

........................(5)

dimana $x_i \leqslant \xi \leqslant r$.

Dari persamaan (4) dan (5) didapat :

$$k = \frac{1}{1 - g'(\xi)}$$

........................(6)

Yaitu dari :

$$k - 1 = \frac{g'(\xi)}{k}$$

$$k * (1 - g'(\xi)) = 1$$

$$k = \frac{1}{1 - g'(\xi)}$$

Karena harga ξ tak diketahui maka harga $g'(\xi)$ didekati dengan :

$$g'(\xi) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$= \frac{g(x_i) - x_i}{x_i - x_{i-1}}$$

.......................(7)

Harga ini dilukiskan dengan menarik garis antara titik $(x_i , g(x_i))$ dan $(x_{i-1} , g(x_{i-1}))$ dan mencari titik potongnya dengan garis $y = x$.

Untuk kesederhanaan perhitungan, diambil harga $\xi = x_{i-1}$ dimana $x_{i-1} \leqslant \xi \leqslant r$, maka didapat :

$$k = \frac{1}{1 - g'(x_{i-1})}$$

.......................(8)

$$x_i = \frac{g(x_{i-1}) - x_{i-1} * g'(x_{i-1})}{1 - g'(x_{i-1})}$$

.......................(9)

Persamaan (9) didapat dari :

$$x_i = x_{i-1} + k * \Delta x_{i-1}$$

$$x_i = x_{i-1} + \frac{1}{1 - g'(x_{i-1})} * (g(x_{i-1}) - x_{i-1})$$

$$x_i = \frac{g(x_{i-1}) - x_{i-1} * g'(x_{i-1})}{1 - g'(x_{i-1})}$$

Persamaan ini ekwivalen dengan pendekatan berturut-turut yang diberikan oleh :

$x_i = h(x_{i-1})$

dimana :

$$h(x) = \frac{g(x) - x * g'(x)}{1 - g'(x)}$$

.....................(10)

Jika $|h'(x)| < 1$ maka metodenya konvergen, sehingga :

$$h'(x) = \frac{g''(x) * (g(x) - x)}{(1 - g'(x))^2} < 1$$

.....................(11)

Biasanya rumus dari Metode Newton Raphson ditulis dalam bentuk :

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

.....................(12)

dimana,

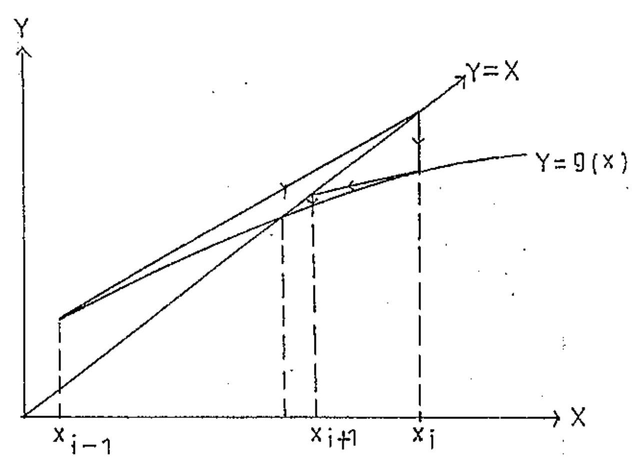
$f(x) = g(x) - x$

.....................(13)

Dengan melihat persamaan (13) ini berarti kita kembali ke persamaan (1), sehingga persamaan (12) akan konvergen apabila :

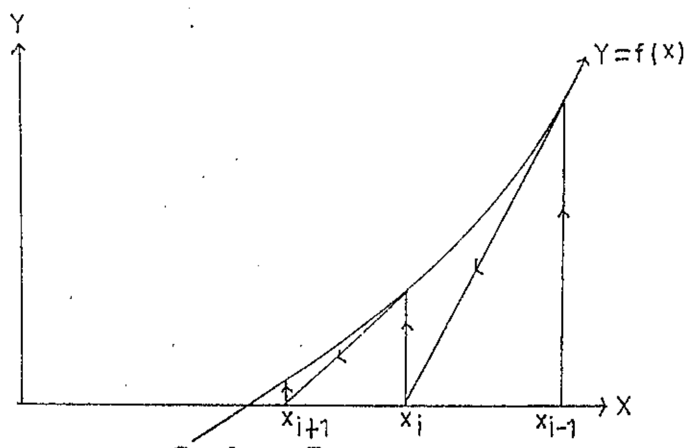
1. Pada iterasi ke i , x_{i-1} cukup dekat dengan akar dari $f(x)=0$
2. $f'(x)$ tidak sama dengan 0

Pada gambar 6, melukiskan iterasi dari metode Newton Raphson untuk $x = g(x)$ dari persamaan (9). Pada titik $(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$ garis singgung $y=g(x)$ mempunyai sudut kemiringan Ø.
Dengan menarik garis singgung kurva $y = g(x)$ dan mencari titik potongnya dengan garis $y = x$, apabila ditarik sejajar sumbu y didapatkan absis x_i.
Titik potong garis vertikal tadi dengan kurva $y = g(x)$ adalah titik $(x_i, g(x_i))$. Di titik ini didapat sudut Ø yang baru yaitu kemiringan dari kurva $y = g(x)$ di $(x_i, g(x_i))$.
Proses ini dilanjutkan sampai mendapatkan akar yang dicari yaitu titik potong dari $y = x$ dan $y = g(x)$.



Gambar 6

Pada gambar 7, melukiskan iterasi dari Metode Newton Raphson untuk $f(x) = Ø$ dengan menggunakan persamaan (12). Garis singgung dari kurva $y = f(x)$ yang mempunyai kemiringan Ø di titik $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ ditarik sehingga memotong sumbu x pada absis x_i. Garis sejajar sumbu y yang melalui (x_i , Ø) diteruskan hingga memotong kurva $y = f(x)$ dititik (x_i , $f(x_i)$). Di titik ini dibuat lagi garis singgung sampai memotong sumbu x. Proses ini diteruskan sampai mendapatkan akarnya yaitu titik potong antara $y = f(x)$ dan $y = Ø$.



Gambar 7

Proses dari Metode Newton Raphson akan diakhiri pada saat $| x_i - x_{i-1} | \leqslant \varphi$ dan $|f(x_i)| = | g(x_i) - x_i | \leqslant \varphi$, dimana φ adalah bilangan positif yang sangat kecil mendekati nol.

2.2.3. CONTOH PROSES PERHITUNGAN METODE BIERGE VIETA

Mencari penyelesaian persamaan polynomial $x^5 - x^4 - 28x^3 + 4Øx^2 + 88x + 32 = Ø$ dengan akar perkiraan : $x_i = -Ø.75ØØØ$ dan φ = 0.00005

1. k	a_k	b_k	c_k
Ø	1	1	
1	-1	-1.75ØØØ	1
2	-28	-26.6875Ø	- 2.5ØØØØ
3	4Ø	6Ø.Ø1563	-24.8125Ø
4	88	42.98828	78.625ØØ
5	32	- Ø.24121	-15.98Ø47

$$x_1 = x_\emptyset - \frac{f_5(x_\emptyset)}{f'_5(x_\emptyset)}$$

$$= -\emptyset.75\emptyset\emptyset\emptyset - \frac{-\emptyset.24121}{-15.98\emptyset47} = -\emptyset.75\emptyset\emptyset\emptyset - \emptyset.15\emptyset94$$

$$= -\emptyset.765\emptyset9$$

2. k	a_k	b_k	c_k
Ø	1	1	
1	-1	-1.765Ø9	1
2	-28	-26.64954	- 2.53Ø99
3	4Ø	6Ø.3894Ø	-24.713Ø9
4	88	41.79643	79.29724
5	32	Ø.218Ø1	-18.87341

$$x_2 = x_1 - \frac{f_5(x_1)}{f'_5(x_1)}$$

$$= -\emptyset.75\emptyset94 - \frac{32.15116}{-74.725\emptyset8} = -\emptyset.765\emptyset9 - \emptyset.\emptyset218\emptyset$$

$$= -\emptyset.76394$$

3. k	a_k	b_k	c_k
Ø	1	1	
1	-1	-1.76394	1
2	-28	-26.65246	- 2.52787
3	4Ø	6Ø.36Ø85	-24.72132
4	88	41.888Ø1	79.24641
5	32	Ø.ØØØ13	-18.65141

$$x_3 = x_2 - \frac{f_5(x_2)}{f'_5(x_2)}$$

$$= -0.76394 - \frac{0.00013}{-18.65141}$$

$$= -0.76393$$

4. k	a_k	b_k	c_k
0	1	1	
1	-1	-1.76248	1
2	-28	-26.65248	- 2.52787
3	40	60.36068	-24.72136
4	88	41.88854	79.24641
5	32	- 0.00000	-18.65009

$$x_4 = x_3 - \frac{f_5(x_3)}{f'_5(x_3)}$$

$$= -0.76393 - \frac{0.00000}{-18.65009}$$

$$= -0.76393 .$$

$f(x_4) = f(-0.76393) = 0$

Jika diambil ϱ = 0.00005, maka pada iterasi yang ke 4 sudah didapatkan salah satu akarnya yaitu = -0.76393.

Untuk mencari akar yang lainnya diambil lagi harga perkiraan yang lain.

2.2.4. EFEK KETIDAK PASTIAN DALAM KOEFISIEN

Seringkali persamaan polinomial (2.1) diperoleh dari perhitungan sebelumnya, oleh karena itu pastilah ada ketidakpastian harga koefisien tersebut.

Misalkan kesalahan a_i adalah δ_i, maka persamaan polinomial yang sebenarnya adalah :

$$P_n^*(x) = (a_o + \delta_o) + (a_1 + \delta_1)x + (a_2 + \delta_2)x^2 + \ldots + (a_n + \delta_n)x^n \qquad \text{(1.a)}$$

Harga kesalahan δ_i tidak diketahui sebab jika diketahui maka akan dapat dicari harga akar sebenarnya dari $P_n^*(x)$, dan bukan lagi harga akar pendekatan dari polinomial $P_n(x)$.

Apabila x adalah akar dari polinomial semula, yaitu persamaan polinomial $P_n(x)$ maka :

$$x^* = x + \varepsilon \qquad \text{(1.b)}$$

adalah merupakan akar dari persamaan (1.a), dimana harga $|\varepsilon|$ kecil sekali dibandingkan harga x.

Jika persamaan (1.b) disubstitusikan ke persamaan (1.a) dengan $P_n^*(x) = \emptyset$ didapatkan :

$$(a_o + \delta_o) + (a_1 + \delta_1)(x + \varepsilon) + (a_2 + \delta_2)(x + \varepsilon)^2 + \ldots + (a_n + \delta_n)(x + \varepsilon)^n = \emptyset.$$

Dengan menguraikan $(x + \varepsilon)^i$ dan mengabaikan suku yang mengandung ε dengan pangkat lebih besar atau sama dengan dua didapatkan :

$(a_o + \delta_o) + (a_1 + \delta_1)(x + \varepsilon) + \ldots +$

$(a_{n-1} + \delta_{n-1})(x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}\ \ ) + (a_n + \delta_n)(x^n$

$+ nx^{n-1}) = \emptyset$. Suku yang mengandung $\delta_i \varepsilon$ diabaikan

dan $P_n{}^*(x^*) = \emptyset$ maka :

$\delta_o + \delta_1 x + \ldots + \delta_{n-1} x^{n-1} + \delta_n x^n + \varepsilon(a_1 + 2a_2 x + \ldots$

$+ (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1} = \emptyset$

sehingga $\sum_{i=\emptyset}^{n} \delta_i\, x^i + \varepsilon P'_n(x) = \emptyset$

Jadi hubungan dalam ε adalah :

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{|\delta_i x^i|}{|P'_n(x)|} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.c)$$

dengan syarat $|P'_n(x)| \neq \emptyset$.

Terdapat 2 kasus yaitu :

1. Koefisien adalah data hasil percobaan, yang mempunyai tempat desimal konstan sebanyak p. Maka $|\delta_i| \leqslant 1/2 * 1\emptyset^{-p}$. Dari persamaan (1.c) diperoleh :

   $$|\varepsilon| \leqslant \frac{1/2*1\emptyset^{-p}}{P'(x)} \quad |\sum_{i=\emptyset}^{n} x^i|$$

   Karena $|\sum_{i=\emptyset}^{n} x^i| \leqslant \sum_{i=\emptyset}^{n} |x|^i$.

   Dengan ketidaksamaan segitiga, ruas kanan dari ketidaksamaan yang terakhir ini, deret geometrinya adalah :

   $$\frac{1 - |x|^{n+1}}{1 - |x|}$$

   dengan syarat $|x| \neq 1$

   Sehingga :

   $$|\varepsilon| \leqslant \frac{1\emptyset^{-p}(1 - |x|^{n+1})}{2|c_1|*(1 - |x|)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.d)$$

dimana harga c_1 menggantikan $P'_n(x)$ dan dihitung dari persamaan (2.9).

2. Jika Koefisien adalah hasil dari kalkulasi "floating point" yang mempunyai jumlah angka yang ditentukan.

Bila setiap a_i diberi t angka utama sebesar t, maka :

$$|\delta_i| \leqslant 5 * 10^{-t} * |a_i| \qquad \text{(1.e)}$$

dan dari (1.c) maka :

$$|\varepsilon_i| \leqslant 5 * 10^{-t} \frac{|a_i x^i|}{|c_i|} \qquad \text{(1.f)}$$

Contoh kasus 1 :

$P_n(x) = x^5 - x^4 - 28x^3 + 40x^2 + 88x + 32 = 0$,misalkan koefisien teliti sampai 5 desimal (p = 5). Salah satu akar yang diperoleh adalah x=-0.76393. Sehingga menurut persamaan (1.d) maka:

$\varepsilon \leqslant 1.9655\ 10^{-10}$ yang menyatakan bahwa $x = -0.76393 \pm 1.9655\ 10^{-10}$.

Contoh kasus 2 :

$P_n(x) = x^5 - x^4 - 28x^3 + 40x^2 + 88x + 32$. Misalkan koefisien adalah angka yang dihitung sampai ketelitian utama (t=4), maka untuk x = -0.76393 :

$$|\varepsilon| \leqslant 5 * 10^{-4} \frac{0.000037721}{18.65009}$$

$$|\varepsilon| \leqslant 0.1 * 10^{-8}$$

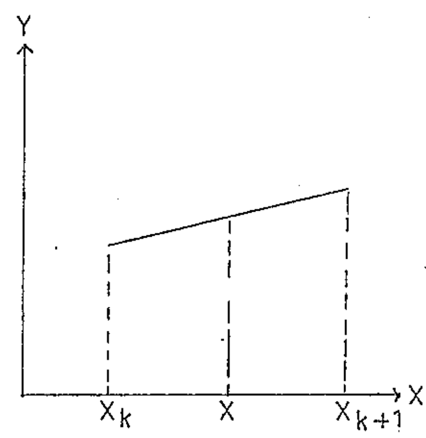
Sehingga $x = -0.76393 \pm 0.1 * 10^{-8}$

Dengan demikian akar dinyatakan sebagai -0.764, dengan kemungkinan kesalahan satu angka dalam tempat terakhir.

2.2.5. KESALAHAN PADA INTERPOLASI DAN EKSTRAPOLASI

Interpolasi :

Misalnya diberikan x, sehingga $x_k < x < x_{k+1}$, dan ingin mencari harga y untuk x, untuk itu digambarkan garis yang menghubungkan titik (x_k, y_k) dan (x_{k+1}, y_{k+1}), kemudian akan diperoleh titik pada garis tersebut pada jarak x dari sumbu y. Interpolasi ini dinamakan Interpolasi Linier Hal ini dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Persamaan garis yang melalui (x_k, y_k) dan (x_{k+1}, y_{k+1}) adalah :

$$y = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (y_{k+1} - y_k)$$

- Kesalahan pemendekan pada interpolasi linier ini ialah :

$$E_t = f(x) - y_k - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (y_{k+1} - y_k)$$

dimana : f(x) adalah harga yang sebenarnya

- Kesalahan Pembulatan pada interpolasi linier

$$F(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_k)(x - x_{k+1})$$

Ekstrapolasi :

- Digunakan untuk penaksiran harga fungsi $f(x)$ untuk x dimana x berada diantara kisaran harga tabel $f(x)$; yaitu dapat dikatakan bahwa disyaratkan $x_k < x < x_{k+1}$ untuk suatu harga k dimana harga $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...$f(x_m)$ diberikan. Apabila $x < x_1$ atau $x > x_m$, maka kita lihat pada interpolasi linier. Jika $x < x_1$ maka dapat digunakan $k = 1$, yaitu :

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$$

dan apabila $x > x_m$ maka diambil $k = m - 1$ atau

$$y = y_{m-1} + \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}(y_m - y_{m-1})$$

karena harga x berada diluar kisaran $x_1 < x < x_n$ maka disebut proses ini ekstrapolasi dan jika x berada dalam kisaran dinamakan intrapolasi

- Kesalahan pembulatan untuk $x < x_1$ adalah :

$$E_t = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_1)(x - x_2)$$

dimana $x < \xi < x_2$

Contoh : 1

Diketahui $y = x^2$

$x_k = 6 \quad y_k = 36$

$x_{k+1} = 7 \quad y_{k+1} = 49$

$x = 6.5$

$y = 36 + 0.5/1\ (49 - 36) = 42.5$

Kesalahan pemendekan :

$E_t = f(x) - y_k - (x-x_k)/(x_{k+1}-x_k) * (y_{k+1}-y_k)$

$42.5 - 42.5 = -0.25$

Contoh : 2

Diketahui log 1.500 dan 1.600 dan digunakan ienterpolasi linier untuk menghitung log 1.530 dengan menggunakan arithmetic floating point 4 digit.

$x_k = 0.1500 * 10^1 \quad y_k = 0.1761 * 10^0$

$x_{k+1} = 0.1600 * 10^1 \quad y_{k+1} = 0.2041 * 10^1$

$x = 0.1530 * 10^1$

Sehingga :

$x-x_k = 0.3000 * 10^1 \qquad x_{k+1}-x_k = 0.1000 * 10^0$

$(x - x_k) / (x_{k+1} - x_k) = 0.3000 * 10^1$

$y_{k+1} - y_k = 0.2800 * 10^{-1}$

$y = 0.1845 * 10^0$

Hasil yang benar :

$y = 0.1847 * 10^0$

Sehingga kesalahan pemendekan :

$E_t = 0.2000 * 10^{-3}$

2.2.6. Fungsi Transedental

Fungsi Transedental adalah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bagian dari R yang bukan fungsi Aljabar. Dimana fungsi Aljabar itu sendiri mempunyai definisi : suatu fungsi yang dipe - roleh melalui sejumlah berhingga operasi Aljabar pada fungsi konstan dan fungsi kesatuan.
Sebagai contoh fungsi Transedental :

* $y = \sin x$
* $y = a^x$

2.2.7. Kesalahan

Dalam suatu hasil numerik, analisa kesalahan merupakan dasar perhitungan yang baik.
Terdapat 2 kesalahan :

1. Kesalahan Absolut : yaitu selisih antara nilai sebenarnya (dengan anggapan telah diketahui) dengan suatu pendekatan pada nilai sebenarnya.
   Ditulis : $x = \bar{x} + e_x$
   dengan x : nilai sebenarnya
   $\bar{x}$: nilai pendekatan
   e_x : kesalahan
   disini e adalah kesalahan Absolut.
2. Kesalahan Relatif
   adalah kesalahan absolut dibagi dengan nilai pendekatan.

Terdapat 3 kesalahan dasar dalam suatu perhitungan numerik yaitu :

1. Kesalahan Bawaan (inheren)
   adalah kesalahan dalam hal nilai data yang disebabkan, kekeliruan atau oleh perlunya pen - dekatan untuk menyatakan suatu bilangan yang yang angkanya tidak dapat secara tepat dapat

di[illegible]tekan dengan banyaknya angka yang tersedia.

2. Kesalahan Pemotongan

yaitu kesalahan yang disebabkan pemotongan suatu proses matematik yang tak berhingga.

3. Kesalahan Pembulatan

Contoh : 1

$f(x) = \log x$

$f''(x) = -1/x^2$

$E_t = -1/2\ (x - x_k)\ (x - x_{k+1})$

dimana x_k [illegible] x_{k+1}

Contoh : 2

$\sin(\ x/2) - 1/3!\ (\ x/2)^3 + 1/5!\ (\ x/2)^5 - \ldots$

$\sin(\ x/2) = (ax+bx^3)\ /\ (1+cx^2)$

$(1+cx^2)(\ x/2) - (\ /2)^3 1/3! x^3 + (\ /5)^5 1/5!\ x^5 - (\ /2)^7 1/7!\ x^7)$

$= ax$ [illegible] bx^3

$a = \ /2$

$c\ /2 - (\ /2)^3 1/3! = b$

$-c(\ /\ )^3 1/3! + (\ /2)^5 1/5! = 0$

$c = 1/20\ (\ /2)^2$

$b = 7/60\ (\ /2)^3$

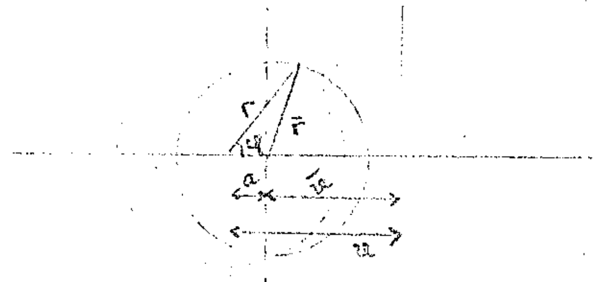
$a = \ /2$

$E_t = ((\ /2)^7 1/7!\ x^7)\ /(1 + 1/20\ (\ /2)^2\ x^2)$

2.3. METODE BRODETSKY AND SMEAL

Metode ini merupakan modifikasi dari metode Graffe. Pada metode Brodetsky - Smeal ini akar - akar real dapat diperoleh dengan tepat, juga untuk akar - akar komplek dapat diperoleh secara langsung. Metode ini merupakan gagasan dari Runge, menurutnya akar - akar komplek dapat ditentukan dengan menggunakan aplikasi dari metode Graffe yang kedua yaitu metode Graffe yang digunakan untuk menentukan akar - akar komplek, dengan cara memindahkan koordinat asal ke koordinat $x = \bar{x} + a$. Untuk $x = r\,e^{\pm r\varphi}$ yang diperoleh dari perhitungan metode Graffe yang kedua dengan jarak r dan $\bar{r}$ pada umumnya berbeda. Akar - akar komplek itu ditentukan oleh titik potong 2 lingkaran yang berpusat O dan $\bar{O}$ dan jari - jari r dan $\bar{r}$ dengan sudut φ yang dihitung dengan rumus cosin untuk segitiga sembarang.

$$\bar{r}^2 = r^2 + a^2 - 2\,a\,r\cos\varphi \qquad \text{.......................(1)}$$



Prosedur ini menimbulkan kesulitan untuk akar - akar komplek dimana lingkaran - lingkaran tersebut berpotongan di banyak titik, sebab posisi dari titik potong menentukan akar secara umum. Hal ini dapat dihindari dengan membuat jarak a antara O dan $\bar{O}$ yang cukup kecil. Brodetsky dan Smeal merubah jarak a dengan α yang sangat kecil, sedemikian hingga :

$$x = \bar{x} + \alpha \qquad \text{.......................(2)}$$

Dengan pengertian bahwa α^2 dan semua pangkat tinggi dari α diabaikan karena sangat kecil jika dibandingkan dengan . Dari pesamaan (1) didapatkan :

$$\bar{r}^2 = r^2 - 2\alpha r \cos \varphi \qquad \text{.......................(3)}$$

untuk polynomial f(x) dan dengan mengabaikan pangkat tinggi dari α serta menggunakan axpansi Taylor diperoleh:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \alpha f'(\bar{x}) \qquad \text{.......................(4)}$$

dimana:

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$$f'(x) = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n \qquad \text{.......................(5)}$$

persamaan (5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(x) = a_o \bar{x}^n + (a_1 + \alpha b_1) \bar{x}^{n-1} + (a_2 + \alpha b_2) \bar{x}^{n-2} + \ldots (a_n + \alpha b_n) \qquad \text{.......................(6)}$$

dimana b_v adalah koefisien dari polynomial f'(x)

$b_1 = n\ a_o$

$b_2 = (n-1)\ a_1$

$b_3 = (n-2)\ a_2$

....

$b_n = a_{n-1}$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

persamaan (6) dibawa keproses Graffe dan dengan mengabaikan pangkat tinggi dari α maka dengan mengkwadratkan a_v dan mengalikan dengan 2 didapat :

$$a_v^2 = (a_v + \alpha b_v)^2 = a_v^2 + 2\alpha a_v\ b_v$$

$$2a_{v-e}\ a_{v+e} = 2(a_{v-e} + \alpha b_{v-e})\ (a_{v+e} + \alpha b_{v+e})$$

$$= 2a_{v-e}\ a_{v+e} + 2\alpha(a_{v-e}\ b_{v+e} + a_{v+e}\ b_{v-e})$$

koefisien-koefisien baru a_v' yang tergantung dari α ditentukan dengan cara yang sama dengan menggunakan metode Graffe biasa . koefisien-koefisien tambahan b_v' dengan faktor 2 dapat dihitung secara lengkap dengan cara yang sama.

Susunan secara lengkap methode Brodetsky - smeal terdapat dalam tabel berikut :

a_o	a_1	a_2	a_3	a_4.......	
o	b_1	b_2	b_3	b_4.......	α

	a_o2	a_12	a_22	a_32	a_42......
a_v		$-2a_oa_2$	$-2a_1a_3$	$-2a_2a_4$	$-2a_3a_5$....
			$2a_oa_4$	$2a_1a_5$	$2a_2a_6$....
					....

	a_1b_1	a_2b_2	a_3b_3	$a_4b4 \ldots\ldots$	
b_v'	$-2a_ob_2$	$-2a_1a_3$	$-2a_2a_4$	$-2a_3a_5 \ldots\ldots$	
		$2a_oa_4$	$2a_1a_5$	$2a_2a_6 \ldots\ldots$	
			$\ldots\ldots\ldots$	$\ldots\ldots\ldots$	
	a_1'	a_2'	a_3'	$a_4' \ldots\ldots$	
	b_1'	b_2'	b_3'	$b_4' \ldots\ldots$	2α
	a_1''	a_2''	a_3''	$a_4'' \ldots\ldots$	
	b_1''	b_2''	b_3''	$b_4'' \ldots\ldots$	4α
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	
A_o	A_1	A_2	A_3	$A_4 \ldots\ldots$	
	B_1	B_2	B_3	$B_4 \ldots\ldots$	$m\alpha$

Kofisien a_v' dicari dengan menggunakan methode Grafe yaitu dengan mengganggap bahwa polynomial - polynomial konyugate complex adalah :

$$f(ix) = a_o\,(ix - x_1)\,(ix - x_2)\,\ldots\ldots\,(ix - x_n)$$

$$f(-ix) = a_o\,(-ix - x_1)\,(-ix - x_2)\,\ldots\ldots\,(-ix - x_n)$$

yang hasil kalinya adalah :

$$f_1(x^2) = f(ix)\;f(-ix) = a_o2\;(x^2 + x_1{}^2).\;(x^2 + x_2{}^2)\;\ldots\ldots\;(x^2 + x_n{}^2).$$

Pada polynomial yang baru ini $x_i{}^2$ berharga o ,

dimana x_i juga berharga o pada polynomial umum f(x).
Polynomial - polynomial f(ix) dan f(-ix) ialah :

$$f(ix) = i^n(a_o x^n - i a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} + ia_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} \ldots\ldots)$$

$$f(-ix) = (-i)^n(a_o x^n + ia_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - ia_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} + \ldots)$$

Jadi polynomial yang baru adalah :

$$\begin{aligned} f_1 (x^2) &= a_o^2 x^{2n} + a_1^2 x^{2n-2} + a_2^2 x^{2n-4} + a_3^2 x^{2n-6} + \ldots - 2a_o a_2 x^{2n-2} - \\ &\quad 2a_1 a_3 x^{2n-4} - 2a_2 a_4 x^{2n-6} - \\ &\quad \ldots + 2a_o a_4 x^{2n-4} + 2a_1 a_5 x^{2n-6} + \\ &\quad \ldots - 2a_o a_6 x^{2n-6} \ldots\ldots \\ &= a_o' x^{2n} + a_1' x^{2n-2} + a_2' x^{2n-4} + a_3' x^{2n-6} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

koefisien - koefisien baru a_v' , b_v' dan koefisien - kofisien a_v'' dan b_v'' dapat dihitung dengan prosedur yang sama. b_v'' dengan faktor 4 , b_v''' pada langkah ke 3 dengan faktor 8 dan seterusnya. Nilai akhir pada lankah ke K adalah $f_k(x)$ yaitu $a_v(k) = A_v$, $b_v(k) = B_v$ dengan factor m dimana $m = 2^k$.

Perhitungan keseluruhan terdiri dari perhitungan Graffe biasa untuk menghitung A_v dan perhitungan tambahan untuk menghitung B_v. Hasil perhitungannya adalah polynomial $f_k(x)$ dengan variabel lama x dan variabel baru x :

$$f_k(x) = A_o x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$= A_o\, x^n + (A_1 + m\alpha B_1)\, x^{n-1} + (A_2 + m\alpha B_2)\, x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n + m\alpha B_n \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

dengan $x = x^m$, $\bar{x} = \hat{x}^m$

Perhitungan $b_v(k)$ yang lainnya dapat menggunakan metode Graffe biasa. Evaluasi dari skema metode Graffe mengikuti cara yang sama seperti sebelumnya. Untuk maksud ini pertama - tama dianggap x_1 sebagai akar real. Disini nampak methode Graffe biasa dalam bentuk :

$$x_1{}^m = \frac{A_{v+1}}{A_v} \qquad \ldots\ldots\ldots(9)$$

Hubungan ini jika dinyatakan dengan koordinat baru didapat :

$$\bar{x}_1{}^m = \frac{A_{v+1} + m\alpha B_{v+1}}{A_v + m\alpha B_v} = \frac{A_{v+1}}{A_v}\;\frac{1 + m\alpha Q_{v+1}}{1 + m\alpha Q_v} \qquad \ldots\ldots\ldots(10)$$

dimana :

$$Q_v = \frac{B_v}{A_v} \qquad \ldots\ldots\ldots(11)$$

Dengan mengabaikan pangkat tinggi dari α , maka dari persamaan (8) dan persamaan (7) :

$$\bar{x}_1{}^m = x_1{}^m(1 + m\alpha \Delta Q_v) \qquad \ldots\ldots\ldots(12)$$

dimana :

$$\Delta Q_v = Q_{v+1} - Q_v \qquad \text{.....................(13)}$$

Dalam bentuk yang lain dan dengan menggunakan persamaan (2) didapat :

$$\bar{x} = x - \alpha$$
$$\bar{x}^2 = x^2 - 2\alpha x$$
$$\bar{x}^4 = x^4 - 4\alpha x^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\bar{x}^m = x^m - m\alpha x^{m-1}$$
$$= x^m \left(1 - \frac{m\alpha}{x}\right) \qquad \text{.....................(14)}$$

Dengan membandingkan persamaan $\overset{12}{(2)}$ dan $\overset{14}{(4)}$ diperoleh akar real :

$$x_1 = \frac{-1}{\Delta Q_v} \qquad \text{...................(15)}$$

Dalam hal ini akar - akar komplek konjugate $re^{\pm i\varphi}$ adalah sederhana.

Jika tidak ada akar - akar real lain yang besarnya sama, hasil dari Metode Grqaffe biasa, besarnya dinyatakan dengan bentuk :

$$r^{2m} = \frac{A_{v+1}}{A_v} \quad , \quad r^2 = \sqrt{\frac{A_{v+2}}{A_v}} = p \qquad \text{..................(16)}$$

Hubungan ini dengan koordinat baru adalah sbagai berikut :

$$r^{2m} = \frac{A_{v+2} + m\alpha B_{v+2}}{A_v + m\alpha B_v} = \frac{A_{v+2}}{A_v} \quad \frac{1 + m\alpha Q_{v+2}}{1 + m\alpha Q_v}$$

................(17)

$$r^{2m} = r^{2m} (1 + m\alpha \Delta 2\ Q_v)$$

................(18)

dimana :

$$\Delta_2 Q_v = Q_{v+2} - Q_v$$

Dengan menggunakan persamaan (3), maka persamaan (17) dalam bentuk lain adalah sebagai berikut :

$$r^{2m} = r^{2m} - 2m\alpha r^{2m-1} \cos \varphi$$

$$= r^{2m}(1 - m\alpha \frac{2r \cos\varphi}{r^2})$$

................(19)

Dengan membandingkan persamaan (17) dan persamaan (19) didapat :

$$-2r \cos \varphi = \Delta 2\ Qvr^2$$

atau menggunakan notasi :

$$-2r \cos \varphi = s$$
$$r^2 = p$$

................(20)

didapat :

$$s = \Delta 2\ Q_v\ p$$

................(21)

Jadi dari persamaan (160 dan persamaan (21) didapat persamaan kwadrat :

$$x^2 + sx + p = 0$$

................(22)

Yang dihubungkan dengan sepasang akar $re^{\pm i\varphi}$.

solusi dari persamaan (22) diberikan oleh akar - akar komplek konjugate dalam bentuk $x = u + iv$. Dalam hal akar real yang kembar $x_1 = x^2 = \pm r$ dipakai kategori dibawah ini dengan $s = \pm 2r$.

Dan sebaliknya terdapat 2 hal yang umum :

$x_{1,2} = \pm r$. berlawanan tetapi merupakan akar - akar yang sama.

$x_{1,2} = \pm ir$, sepasang akar imaginer yang tidak dapat dibedakan dengan metode ini.

Kemudian faktor kwadrat $(x^2 - r^2)$ dan $(x^2 + r^2)$ keduanya diubah dalam bentuk $(x^4 - r^4)$ dengan menggunakan langkah Graffe yang sesuai.

Hasil perhitungan keduanya pada saat $s = \emptyset$ dan dengan mengganti persamaan umum, maka harus dapat dinyatakan dengan dua hal yang mungkin timbul.

Pada kejadian yang lebih lanjut dari 3 dan 4 akar yang besarnya sama dengan 2 dan 3 koefisien tak tentu nampak berturut - turut. Dengan notasi :

$$\Delta k\, Q = Q_{v+k} = Q_v \qquad k = 3,4 \ldots. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

Hasil evaluasinya adalah sebagai berikut :

1. $x_{1,2} = r\, e^{\pm i\varphi}$

   $x_3 = + r$

   dimana :

$$r^{m} = R \quad , \quad \bar{r}^{m} = R \text{ dan menggunakan :}$$

$$\bar{r}_{1,2}^{\,2} = r^2\left(1 - \frac{2\alpha}{r} \cos\varphi\right)$$

$$\bar{r}_3 = r\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)$$

diperoleh :

$$R_{1,2}^{2} = R_2 \left(1 - \frac{2m}{r} \cos \quad \right) r$$

$$R_3 = R\left(1 + \frac{m}{r}\right)$$

Dari sini maka :

$$X_1 X_2 X_3 = R_3 = A_{v+3} : A_v$$

$$\hat{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 = R_3\left(1 - \frac{m\alpha}{r}(2 \cos \varphi + 1)\right)$$

$$= \frac{A_{v+3}}{A_v} (1 + m\alpha \Delta_3 Q)$$

Dengan membandingkan 2 pernyataan terakhir dan $-2 \cos \varphi = s$, $r^2 = p$, maka :

$$s = p \, \Delta_3 \, Q_v \pm r \qquad \text{..................(24)}$$

dimana :

$$p = r^2 \quad , \quad r^{3m} = A_{v+3} : A_v \qquad \text{..................(25)}$$

$$2. \; x_{1,2} = re^{\pm i \varphi_1}$$

$$x_{3,4} = re^{\pm i \varphi_2}$$

Dengan cara yang sama diperoleh suatu hubungan penjumlahan σ dari s_1 dan s_2 yaitu :

$$\sigma = s_1 + s_2 = p \, \Delta_4 \, Q_v \qquad \text{..................(26)}$$

dimana :

$$p = r^2 = \sqrt[2m]{A_{v+4} : A_v} \qquad \text{..................(27)}$$

Jarak masing - masing si ini berkisar antara $-2r$ dan $2r$. dimana $s_1 + s_2 = \sigma$ telah diketahui, karena belum dapat menghitung s_1 dan s_2 maka dapat didekati dengan cara sebagai berikut :

a. Untuk $\sigma \geq \emptyset$, $s_1 = \sigma/2 \ldots\ldots 2r$

b. Untuk $\sigma \leq \emptyset$, $s_1 = -2r \ldots\ldots \sigma/r$

Beberapa perhitungan yang menggunakan skema Horner umum dengan harga percobaan s dari hasil yang diberikan maka akan didapatkan harga s yang lebih teliti.

Ketelitian dari hasilnya disini adalah penting, karena merupakan sifat yang istimewa dari Metode Graffe. Dalam Metode Brodetsky - Smeal ini keuntungannya adalah dapat menghilangkan kesalahan yang ada. Yang pasti dalam menggunakan metode ini dibutuhkan konsentrasi kerja yang tinggi dan ketelitian dalam setiap perhitungan.

CONTOH PERHITUNGAN DENGAN METODE BRODETSKY - SMEAL

Menentukan akar dari persamaan polinomial derajat 5

$x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 4x + 2)(x + 1) = \emptyset$

m	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
1	1	2	5	4	8	8

	Ø	5	8	15	8	8
	1	4	2.5^{1}	1.6^{1}	6.4	6.4
		-1Ø	-1.6	-8.Ø	-6.4	
			1.6	3.2		
	Ø	1Ø	4.Ø	6.Ø	6.4	6.4
		-8	-5.Ø	-1Ø.4	-15.2	
			Ø.8	5.6		
2	1	6	2.5^{1}	-3.2^{1}	Ø	6.4^{1}
	Ø	2	Ø.2	1.2	-8.8^{1}	6.4
	1	3.6^{1}	6.25^{2}	$1Ø.24^{2}$	Ø	$4.Ø96^{3}$
		-5.Ø	-3.84	Ø	$4.Ø96^{3}$	
	Ø	-1.2	-Ø.5Ø	-3.84	Ø	4.Ø96
		Ø.2	1.36	22.ØØ	1.28Ø	
			-Ø.88	-2.56		
4	1	-1.4^{1}	2.41^{2}	2.56^{2}	$4.Ø96^{3}$	$4.Ø96^{3}$
		-1.Ø	-Ø.Ø2	15.6Ø	1.28Ø	4.Ø96
	1	1.96^{2}	$5.8Ø8^{4}$	-6.554^{4}	1.6777^{7}	1.6777^{7}
		-4.82	Ø.717	-197.427	-Ø.2Ø97	
			Ø.819	-3Ø.Ø29		
	Ø	1.4Ø	-Ø.Ø48	39.936	Ø.5243	1.6777
		Ø.Ø2	2.44Ø	-3Ø.Ø29	-Ø.7438	

			0.128	-9.830		
8	1	-2.86^{2}	7.344^{4}	-2.0234^{6}	1.4680^{7}	1.6777^{7}
	0	1.42	2.520	0.0008	-2.2195	
	1	8.180^{4}	5.393^{9}	4.094^{12}	2.1550^{14}	2.8147^{14}
		-14.688	-1.157	-2.156	0.6790	
			0.029	-0.010		
	0	-4.061	1.8507	-0.0016	-0.3222	2.8147
		-2.520	0.2875	-0.2087	0.3393	
			-0.0022	-0.0024		
16	1	-6.508^{4}	4.265	1.928^{12}	2.834^{14}	2.8147^{14}
	0	-6.581	2.136	-0.2127	0.0171	2.8147
	1	4.235^{9}	1.8190^{19}	3.717^{24}	8.032^{28}	7.923^{28}
		-8.530	0.0025	-2.417	-0.109	
	0	4.283	0.9110	-0.4101	0.0485	7.923
		-2.136	0.0113	-0.6126	-0.0483	
32	1	–	1.844^{19}	–	7.923^{28}	7.923^{28}
	0	–	0.9223	–	0	7.923
Q	0	–	0.500	–	0	1.000
1/A	0	–	19.266	–	28.899	28.899
Q		0.500		-0.500	1.000	

lgA	19.266	9.633	Ø
:32	Ø.6Ø2Ø	Ø.3Ø1Ø	Ø
	———	———	———
p; r	4.ØØØ	2.ØØØ	1.ØØØ
s; x	2.ØØØ	-1.ØØØ	-1.ØØØ

2.4 METODE LIN - BAIRSTOW

Metode ini dapat digunakan untuk mementukan akar - akar real maupun akar - akar komplek dari persamaan polinomial $P_n(x) = Ø$, dimana

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (13.a)$$

Pada metode Lin Bairstow ini meliputi menemukan suatu faktor kwadratik

$$x2 + rx + s \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (13.b)$$

dari polinomial dengan proses iterasi Newton Rhapson. Proses iterasi disini hanyalah membantu metode Lin Bairstow untuk mendapatkan akar pendekatan dengan menentukan akar percobaan terlebih dahulu.

Apabila harga pendekatannya telah mendekati hasil yang sebenarnya maka proses akan dihentikan seperti pada metode sebelumnya.

2.4.1. PROSES PEMBAGIAN SINTETIK OLEH FAKTOR KWADRATIK

Jika polinomial $P_n(x)$ dibagi dengan faktor percobaan $x^2 + rx + s$ dan diperoleh hasil bagi suatu polinomial berderajat n-2 dan suatu sisa $Rx + S$, dimana r, s, R dan S bilangan Real, maka persamaan tersebut dapat ditulis :

$$\sum a_k x^{n-k} = (x^2 + rx + s) * \sum b_k x^{n-k-2} + Rx + S \qquad \text{.....................(14)}$$

Dengan menyamakan kedua ruasnya diperoleh :

$a_o=b_o$	$b_o=a_o$
$a_1=b_1+rb_o$	$b_1=a_1-rb_o$
$a_2=b_2+rb_1+sb_o$	$b_2=a_2-rb_1-sb_o$
----------	----------
$a_k =$	$b_k =$
$b_k+rb_{k-1}+sb_{k-2}$	$a_k-rb_{k-1}-sb_{k-2}$
----------	----------
$a_{n-1} =$	$b_{n-1} =$
$R+rb_{n-2} + sb_{n-3}$	$a_{n-1}-rb_{n-2}-sb_{n-3}$
$a_n=S + sb_{n-2}$	$b_n=a_n - rb_{n-1} - sb_{n-2}$
(15.a)	(15.b)

Jika digunakan rumus Pengulangan maka persamaan (15.a) bisa ditulis dalam bentuk :

$$b_k = a_k - rb_{k-1} - sb_{k-2} \quad (k = 0,1,2, \ldots n) \qquad \text{.....................(16)}$$

dengan catatan :

$b_i = 0$ untuk $i = -1,-2,\ldots$

Persamaan (14) dapat diperluas dalam

bentuk :

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$
$$= (x^2 + rx + s) * (b_o x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + b_2 x^{n-4} + \ldots + b_{n-3} x + b_{n-2}) + Rx + S \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

Dapat dilihat dari persamaan (17), perubahan r atau s akan menyebabkan perubahan dalam koefisien b_k dari polinomial hasil bagi $f_{n-2}(x)$ dan koefisien R dan S dari sisa.

Oleh karena itu r dan s dapat dianggap sebagai perubah bebas, sehingga b_k, R dan S dapat dinyatakan sebagai fungsi dari perubah tersebut, yang berupa $b_k(r,s)$, $R(r,s)$, dan $S(r,s)$. Maka r dan s dapat dicari dengan :

$$R(r,s) = \emptyset \qquad S(r,s) = \emptyset \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

menggunakan proses Iterasi Newton Raphson.

Dengan ditemukannya harga-harga r dan s maka faktor kwadratik dari polinomial $f_n(x)$ dapat dihitung. Untuk menentukan r dan s diambil harga pendekatan r_o dan s_o yang dekat dengan harga-harga tersebut. Maka r_o dan s_o perlu dikoreksi sampai memenuhi syarat (18) dengan menggunakan koreksi differensial dr dan ds. Nilai ini dapat diperoleh dari pendekatan orde pertama dari differensial total dR dan dS.

$$dR = Rr\ dr + Rs\ ds$$
$$dS = Sr\ dr + Ss\ ds$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

Yaitu dengan menggunakan expansi Taylor untuk fungsi-fungsi dari 2 variabel dan mengabaikan pangkat lebih tinggi dari satu, karena dianggap $(r - r_o)$ dan $(s - s_o)$ kecil, diperoleh :

$$R(r,s) = R(r_o,s_o) + \partial R/\partial r(r - r_o) + \partial R/\partial s(s - s_o)$$
$$S(r,s) = S(r_o,s_o) + \partial S/\partial r(r - r_o) + \partial S/\partial s(s - s_o)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20a)$$

$$R(r,s) = R(r_o,s_o) + Rr\ dr + Rs\ ds$$
$$S(r,s) = S(r_o,s_o) + Sr\ dr + Ss\ ds$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20b)$$

$$R(r,s) = R(r_o + dr\ ,\ s_o + ds)$$
$$S(r,s) = S(r_o + dr\ ,\ s_o + ds)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Dari persamaan (18) dan (19) maka persamaan (20b) menjadi :

$$Rr\ dr + Rs\ ds = -\ R\ (r_o,s_o)$$
$$Sr\ dr + Ss\ ds = -\ S\ (r_o,s_o)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

Pendekatan orde pertama yaitu hasil dari koreksi pertama dari fungsi-fungsi R(r,s) dan S(r,s) adalah $r_1 = r_o + dr$ dan $s_1 = s_o + ds$. Setelah didapatkan harga r_1 dan s_1 dicari pendekatan berikutnya yaitu $r_2 = r_1 + dr$ dan $s_2 = s_1 + ds$. Dengan cara yang sama dicari pendekatan selanjutnya yang lebih mendekati hasilnya atau memenuhi persamaan (18) maka dikatakan iterasinya konvergen.

Jika diambil harga φ yaitu bilangan positif yang sangat kecil dan harga dari :

$$|r_{k+1} - r_k| \leq \varphi$$

$$|s_{k+1} - s_k| \leq \varphi$$

....................(23)

maka iterasinya dihentikan karena sudah didapatkan pendekatan dari:

$R(r_{k+1}, s_{k+1}) = 0$

$S(r_{k+1}, s_{k+1}) = 0$

....................(24)

jadi r dan s yang dicari sudah didapat maka faktor dari polinomial $P_n(x)$ adalah : $x^2 + r^*x + s^*$

dimana :

$r^* = r_{k+1}$ dan $s^* = s_{k+1}$

maka persamaan (14) menjadi :

$$P_n(x) = (x^2 + r^*x + s^*)(b_o{}^*x^{n-2} + b_1{}^*x^{n-3} + b_2{}^*x^{n-4} + \ldots + b^*_{n-3}x + b^*_{n-2}$$

$$P_n(x) = P_2(x) * P_{n-2}(x)$$

....................(25)

dimana $P_{n-2}(x)$ adalah polinomial berderajat n-2 yang akan dicari faktor kwadratnya pada tahap berikutnya.

Selanjutnya menentukan 4 derivativ parsiil pada persamaan (20b) yaitu Rr, Rs, Sr, Ss, dengan cara menurunkan persamaan (16), didapat :

$$\frac{\partial b_k}{\partial r} = -bk-1 - \frac{r\ \partial b_{k-1}}{\partial r} - \frac{s\ \partial b_{k-2}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial b_k}{\partial s} = -bk-2 - \frac{r\ \partial b_{k-1}}{\partial s} - \frac{s\ \partial b_{k-2}}{\partial s}$$

....................(26)

Pada persamaan (15a) karena $a_o = b_o$ adalah bukan fungsi dari r dan s, maka dari persamaan (26) didapat :

$$\partial b_o/\partial s = \emptyset$$

$$\partial b_o/\partial r = \emptyset \qquad \partial b_1/\partial s = \emptyset$$

$$\partial b_1/\partial r = -b_o \qquad \partial b_2/\partial s = -b_o - r\,\partial b_1/\partial s = -b_o$$

$$\partial b_2/\partial r = \qquad \partial b_3/\partial s =$$

$$-b_1 - r\,\partial b_1/\partial r \qquad -b_1 - r\,\partial b_2/\partial s - s\,\partial b_1/\partial s$$

$$= -b_1 + rb_o \qquad = -b_1 + rb_o$$

untuk $k = \emptyset, 1, \ldots, n$

.....................(27)

$$\partial b_k/\partial r = \partial b_{k+1}/\partial s$$

.....................(28)

Dengan membandingkan persamaan (15a) dan (15.b) dipenuhi :

$$R = b_{n-1}$$

$$S = b_n + rb_{n-1}$$

.....................(29)

maka :

$$Rr = \partial b_{n-1}/\partial r \qquad Rs = \partial b_{n-1}/\partial s$$

$$Sr = \partial b_n/\partial r + r\,\partial b_{n-1}/\partial r + b_{n-1} \qquad Ss = \partial b_n/\partial s + r\,\partial b_{n-1}/\partial s$$

.....................(3∅)

Untuk memudahkan maka notasi turunan parsiil pada persamaan (27) ditulis :

$\partial b_k/\partial r = c_k$ dan $\partial b_k/\partial s = d_k$

untuk $k = 1, 2, \ldots n$

.....................(31)

maka dari persamaan (27) dan diambil $b_o = 1$,

$c_1 = -1$ $\qquad$ $d_1 = \emptyset$

$c_2 = -b_1 + r$ $\qquad$ $d_2 = -1$

$c_3 = -b_2 - rc_2 - sc_1$ $\qquad$ $d_3 = -b_1 + r$

$d_4 = -b_2 - rd_3 - sd_2$

$c_k = -b_{k-1} - rc_{k-1} - sc_{k-2}$ $\qquad$ $d_k = -b_{k-2} - rd_{k-1} - sd_{k-2}$

$c_{n-1} = -b_{n-2} - rc_{n-2} - sc_{n-3}$ $\qquad$ $d_{n-1} = -b_{n-3} - rd_{n-2} - sd_{n-3}$

$c_n = -b_{n-1} - rc_{n-1} - sc_{n-2}$ $\qquad$ $d_n = -b_{n-2} - rd_{n-1} - sd_{n-2}$

$d_{n+1} = c_n$

......................(32)

Dengan mensubstitusikan persamaan (31) ke persamaan (3Ø) didapat :

$Rr = c_{n-1}$ $\qquad$ $Sr = c_n + rc_{n-1} + b_{n-1}$

$Rs = d_{n-1}$ $\qquad$ $Ss = d_n + rd_{n-1}$

......................(33)

Jika persamaan (33) disubstitusikan ke persamaan (22) maka didapatkan suatu persamaan yang disebut " Persamaan Koreksi Differensial " yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & d_{n-1} \\ c_n + rc_{n-1} + b_{n-1} & d_n + rd_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_n - rb_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dengan mempergunakan hubungan yang didapat pada persamaan (32) yaitu dari $d_{n+1} = c_n$ maka persamaan tersebut menjadi :

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n+rc_{n-1}+b_{n-1} & c_{n-1}+rc_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_n-rb_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

Matriks (34) bisa disederhanakan dengan cara :

$$\begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n+b_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n + b_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{n-1} \\ -b_n \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

Secara ringkas proses dari perhitungan persamaan koreksi differensial ;

$$\begin{array}{lllllll}
1 & a_1 & a_2 \;\ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
 & -r & -rb_1 \ldots & -rb_{n-4} & -rb_{n-3} & -rb_{n-2} & -rb_{n-1} \\
\hline
1 & b_1 & b_2 \;\ldots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\
 & rc_1 & rc_2 \ldots & rc_{n-3} & rc_{n-2} & rc_{n-1} & \\
 & & sc_1 \ldots & sc_{n-4} & sc_{n-3} & sc_{n-2} & \\
\hline
-c_1 & -c_2 & -c_3 \;\ldots & -c_{n-2} & -c_{n-1} & -c_n &
\end{array}$$

Apabila hasil dari pendekatan sudah didapat yaitu $x^2 + r^*x + s^*$, maka sekarang tinggal menentukan akar dari faktor-faktor kwadratik yang sudah dicari yaitu dengan mrnggunakan rumus persamaan kwadrat :

$$x_{1,2} = \frac{-r^{*} \pm \sqrt{(r^{*})^{2} - 4s^{*}}}{2}$$