BAB II
INTERPOLASI

II.1. INTERPOLASI DENGAN JARAK SAMA

Rumus-rumus Interpolasi dengan jarak sama :

II.1.1. Interpolasi Gregory Newton forward (Interpolasi Depan):

$$y_k = y_o + \Delta y_o \frac{k^{(1)}}{1!} + \Delta^2 y_o \frac{k^{(2)}}{2!} + \Delta^3 y_o \frac{k^{(3)}}{3!} + \ldots\ldots \quad \ldots\ldots(2.1)$$

II.1.2. Interpolasi Gregory Newton backward (Interpolasi Belakang) :

$$y_k = y_o + \Delta y_{-1} \frac{k^{(1)}}{1!} + \Delta^2 y_{-2} \frac{(k+1)^{(2)}}{2!} + \Delta^3 y_{-3} \frac{(k+2)^{(3)}}{3!} + \ldots \quad \ldots\ldots(2.2)$$

II.1.3. Interpolasi Gauss' :

$$y_k = y_o + \Delta y_o \frac{k^{(1)}}{1!} + \Delta^2 y_{-1} \frac{k^{(2)}}{2!} + \Delta^3 y_{-1} \frac{(k+1)^{(3)}}{3!} +$$

$$\Delta^4 y_2 \frac{(k+1)^{(4)}}{4!} + \ldots\ldots$$

$$y_k = y_o + \Delta y_{-1} \frac{k^{(1)}}{1!} + \Delta^2 y_{-1} \frac{(k+1)^{(2)}}{2!} + \Delta^3 y_{-2} \frac{(k+1)^{(3)}}{3!} +$$

$$\Delta^4 y_{-2} \frac{(k+2)^{(4)}}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.3)$$

II.1.4. Interpolasi Stirling's :

$$y_k = y_o + \frac{1}{2}(\Delta y_{-1} + \Delta y_o) \frac{k^{(1)}}{1!} +$$

$$\Delta^2 y_{-1} \frac{1}{2}\left(\frac{k^{(2)}}{2!} + \frac{(k+1)^{(2)}}{2!}\right) +$$

$$\frac{1}{2}(\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}) \frac{(k+1)^{(3)}}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4)$$

II.1.5. Interpolasi Bessel's :

$$y_k = \frac{1}{2}(y_o+y_1) + \Delta y_o \left[\frac{1}{2}\left(\frac{k^{(1)}}{1!} + \frac{(k-1)^{(1)}}{1!}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{2}(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_o)\frac{k^{(2)}}{2!} +$$

$$^3 y_{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(k+1)^{(3)}}{3!} + \frac{k^{(3)}}{3!}\right)\right] + \dots\dots\dots\dots (2.5)$$

II.1.6. Interpolasi - Everett's :

$$y_U = v\, y_o + \frac{v(v^2-1)}{3!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{v(v^2-1)(v^2-4)}{5!}\Delta^4 y_{-2} + \dots$$

$$+ \frac{v(v2_{-1})(v^2-4)\ \dots .(v^2-k^2)}{(2k+1)\ !}\Delta^{2k} y_{-k} + \dots\dots\dots$$

$$+ Uy_1 + \frac{U(U^2-1^2)}{3!}\Delta^2 y_o + \frac{U(U^2-1)(U^2-4)}{5!}\Delta^4 y_{-1} + \dots$$

$$+ \frac{U(U^2-1^2)\ (U^2-4)\ \dots .\ (U^2-k^2)}{(2k+1)\ !}\Delta^{2k} y_{1-k} + \dots\dots$$

$$= v\, y_1 + {}^{v+1}C_1\, \delta^2 y_o + {}^{v+2}C_2\, \delta^4 y_o + \dots\dots\dots$$

$$+ U\, y_1 + {}^{v+1}C_3\, \delta^2 y_1 + {}^{U+2}C_3\, \delta^4 y_1 + \dots \quad (2.6)$$

dengan $v = 1-U$ atau $v = 1-k$

Rumus-rumus diatas bisa dilihat pada Lozenge Diagram hal.6

Untuk persamaan diferensinya bisa dilihat pada hal.5, dengan keterangan sbb. :

Diferensi I :

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2$

$\vdots$

$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

Untuk persamaan diferensinya dapat dilihat dalam tabel diagonal sbb. :

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	
x_o	y_o					
		Δy_o				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_o$	$\Delta^3 y_o$		
		Δy_1			$\Delta^4 y_o$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$		dst.
		Δy_2			$\Delta^4 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$			
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

Diferensi II :

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$$

$$\vdots$$

$$\Delta^3 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

Diferensi ke - n :

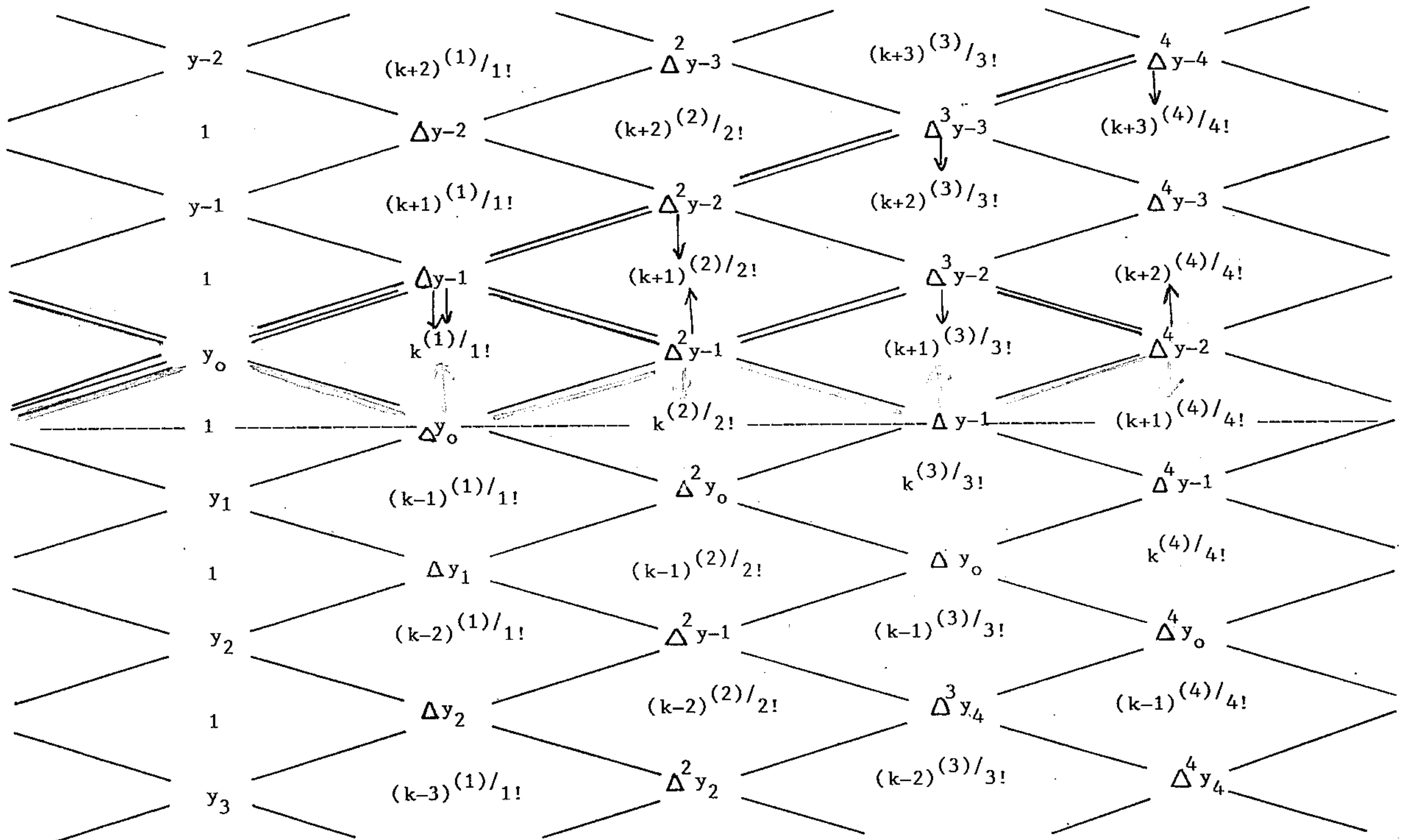
$$\Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} - \Delta y_n$$

$$\Delta^n y_2 = \Delta^{n-1} y_n - \Delta^{n-1} y_2$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y_n = \Delta^{n-1} y_{n+1} - \Delta^{n-1} y_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.7)$$

II.2.1. INTERPOLASI DENGAN JARAK SAMA DAPAT DILIHAT MELALUI LOZENGE DIAGRAM Sbb. :



Gambar.1

KETERANGAN LOZENGE DIAGRAM :

Aturan-aturan berikut ini untuk mendapat sebuah rumus interpolasi :

1. Sebuah suku ditambahkan bilamana sebuah kolom berisikan diferensi diseberangkan dari kiri ke kanan kolom I ditentukan untuk diferensi dari order nol.
2. Bila alur memasuki sebuah kolom diferensi dari kiri dengan arah (slope) positip (mis. : y_0 ke Δy_{-1}), suku yang ditambahkan = hasil kali diferensi dalam koefisien yang terletak langsung dibawah diferensi.
3. Bila alur memasuki sebuah kolom diferensi dari kiri dengan arah negatif (mis.: Δy_{-1} ke $\Delta^2 y_{-1}$) , suku yang harus ditambahkan = hasil kali diferensi dan koefisien yang terletak langsung diatas diferensi.
4. Bila alur memasuki sebuah kolom diferensi dengan arah nol (mis. : dari 1 ke y_0), suku yang ditambahkan = hasil kali diferensi dan rata-rata jumlah koefisien yang terletak langsung diatas dan dibawah diferensi.
5. Bila alur menyeberangi sebuah kolom antara 2 diferensi dengan arah nol (mis.: y_0 ke $\Delta^3 y_{-1}$), suku yang harus ditambahkan = hasil kali koefisien antara 2 diferensi dan rata-rata jumlah kedua diferensi tersebut.
6. Kebalikan dari alur merubah suku yang harus ditambahkan.

ALUR ZIG-ZAG dalam LOZENGE DIAGRAM untuk memperoleh rumus Bessel dan Rumus Gauss ke II :

a). Kita ikuti alur yang bergaris terputus dalam gambar karena alur mulai dengan 1 dalam kolom I tabel diferensi yaitu suku I dari rumus interpolasi dengan aturan 5 digandakan dengan rata-rata bilangan y_0 dan y_1 diatas dan dibawah 1, yaitu :

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_1)$$

Begitu pula dengan aturan 4, karena alur melalui Δy_0 maka suku yang harus ditambahkan adalah Δy_0 dikalikan rata-rata koefisien yang langsung diatas dan dibawah, yaitu :

$$\Delta y_0 \frac{1}{2}\left(\frac{k^{(1)}}{1!} + \frac{(k-1)^{(1)}}{1!}\right)$$

Kemudian menggunakan aturan 5, sebab alur melalui koefisien, suku selanjutnya yang harus ditambahkan adalah $k^{(2)}/_{2!}$, dikalikan dengan rata-rata diferensi diatas dan dibawah koefisien tersebut yaitu :

$$\frac{k^{(2)}}{2!}\ \frac{1}{2}\ (\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0)$$

Dengan meneruskan aturan ini didapat rumus Bessel :

$$y_k = \frac{1}{2}(y_0+y_1) + \Delta y_0 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{k^{(1)}}{1!} + \frac{(k-1)^{(1)}}{1!}\right) +$$
$$\frac{1}{2}(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0)\frac{k^{(2)}}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) Dengan aturan 2 bila kita memasuki y_0 dengan arah negatip maka suku ke 1 y_0 dikalikan dengan koefisien 1 yang terletak langsung diatasnya, maka suku ke 1 menjadi :

$$y_0 \cdot 1 = y_0$$

Suku yang sama didapat bila diasumsikan alur yang memasuki y_0 dengan arah positip / arah negatip.

Dengan aturan 3, karena alur memasuki Δy_{-1} dengan arah positip, suku ya ng kedua adalah Δy_{-1} dikalikan koefisien yang terletak langsung dibawahnya, yaitu :

$$\Delta y_{-1} \frac{k^{(1)}}{1!}$$

Kemudian menggunakan aturan 2, karena alur memasuki $\Delta^2 y_{-1}$ dengan arah negatip, suku yang ketiga adalah $\Delta^2 y_{-1}$ dikalikan koefisien yang terleta k langsung diatasnya, yatu :

$$\Delta^2 y_{-1} \frac{(k+1)^{(2)}}{2\ !}$$

Demikian seterusnya sehingga didapat rumusa Gauss ke II sbb.:

$$y_k = y_0 + \Delta y_{-1} \frac{k^{(1)}}{1\ !} + \Delta^2 y_{-1} \frac{(k+1)^{(2)}}{2!} + \Delta^3 y_{-2} \frac{(k+1)^{(3)}}{3!}$$

$$+ \ldots\ldots$$

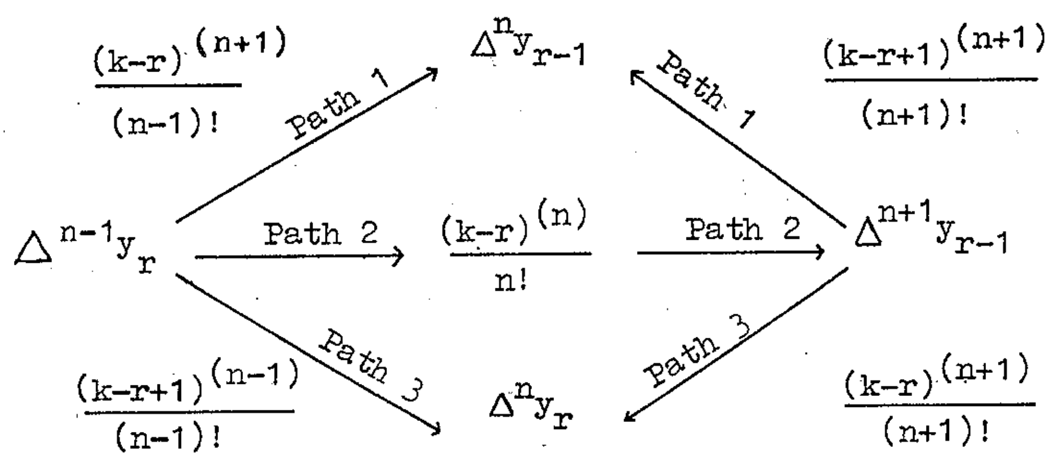
II.2.2. Dari Lozenge Diagram dapat dibuktikan hal-hal sbb.:

1. Misalkan P menyatakan sebuah alur zig-zag sekitar Lozenge tertentu dalam gambar 1 , yaitu alur yang mulai dan berakhir pada diferensi yang sama.

Buktikan bahwa sesuai dengan aturan-aturan dimuka.

Kontribusinya = 0

Lozenge umum digambarkan sbb. :



Dengan aturan 6 kebalikan dari sebuah alur merubah untuk suku yang ditambahkan. Jadi hanya diperlukan untuk membuktikan bahwa kontribusi yang bersangkutan ke 3 alur dari $\Delta^{n-1} y_r$ ke $\Delta^{n+1} y_{r-1}$ dalam gambar diatas semua sama.

Bila alur 1 dipilih kontribusinya adalah :

$$c_1 = \Delta^n y_{r-1} \frac{(k-r)^{(n)}}{n!} + \Delta^{n+1} y_{r-1} \frac{(k-r+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \ldots \quad \ldots.(2.8)$$

Begitu pula bila alur 2 dan 3 dipilih, maka kontribusinya adalah :

$$c_2 = \frac{1}{2} (\Delta^n y_{r-1} + \Delta^n y_r) \frac{(k-r)^{(n)}}{n!} + \Delta^{n+1} y_{r-1} \frac{1}{2} \quad \frac{(k-r+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} + \frac{(k-r)^{(n+1)}}{(n+1)!} \ldots.. \quad \ldots.(2.9)$$

$$c_3 = \Delta^n y_r \frac{(k-r)^{(n)}}{n!} + \Delta^{n+1} y_{r-1} \frac{(k-r)^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad \ldots\ldots (2.10)$$

Dari persamaan (2.8) dan (2.10) didapat :

$$c_1 - c_3 = \frac{(k-r)^{(n)}}{n!}(\Delta^n y_{r-1} - \Delta^n y_r) + \Delta^{n+1} y_{r-1}\left(\frac{(k-r+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} + \frac{(k-r)^{(n+1)}}{(n+1)!}\right)$$

$$= \frac{(k-r)^{(n)}}{n!}(\Delta^{n+1} y_{r-1}) +$$

$$\Delta^{n+1} y_{r-1} \frac{(k-r)^{(n)}}{n!}\left(\frac{(k-r-1) - (k-r-n)}{n+1} \right) \ldots (2.11)$$

$$= \frac{-(k-r)^{(n)}}{n!} \Delta^{n+1} y_{r-1} + \Delta^{n+1} y_{r-1} \frac{(k-r)^{(n)}}{n!}$$

$$= 0$$

Jadi $c_1 = c_3$

Maka harga rata-rata dari c_1 dan c_3 adalah :

$$\frac{1}{2}(c_1 + c_3) = \frac{(k-r)^{(n)}}{n!} \frac{1}{2}(\Delta^n y_{r-1} + \Delta^n y_r) +$$

$$\Delta^{n+1} y_{r-1} \frac{1}{2}\left(\frac{(k-r+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} + \frac{(k-r)^{(n+1)}}{(n+1)!} \right) \ldots$$

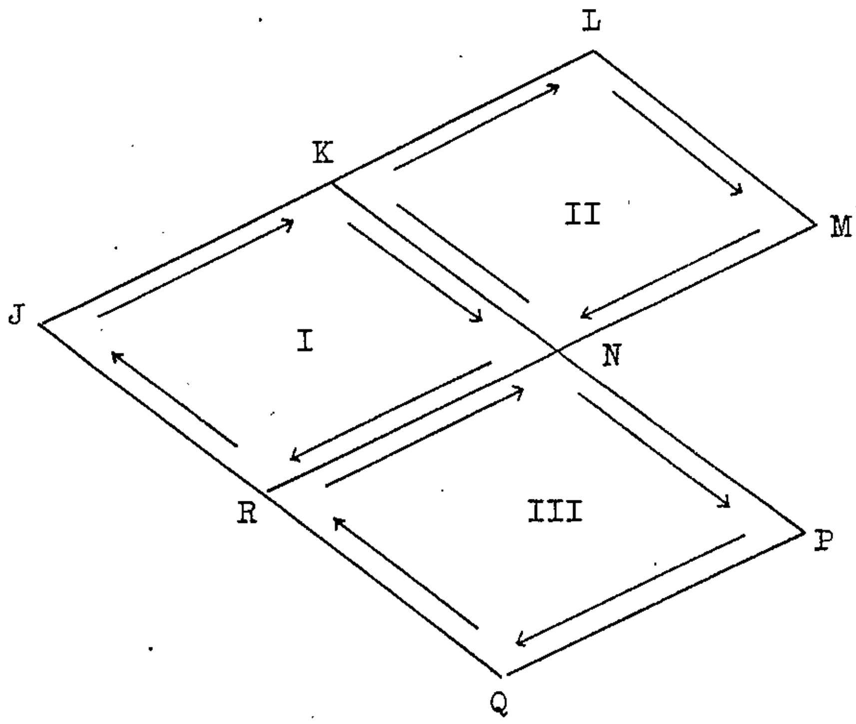
$$= c_2 \quad \ldots\ldots\ldots (2.12)$$

Jadi $c_1 = c_2 = c_3$

(2) Buktikan bahwa jumlah kontribusi sekitar alur zig-zag tertutup dalam diagram Lozenge adalah nol.

Akan dibuktikan hasil alur tertutup seperti JKLMNPQRJ dalam gambar dibawah.

Hal ini memuat 3 alur, yaitu I, II, III



Bila kontribusi diambil dari alur ke JK, yaitu melalui kontribusi C_{jk} dan kontribusi total sekitar sel (alur) I yaitu C_1, maka :

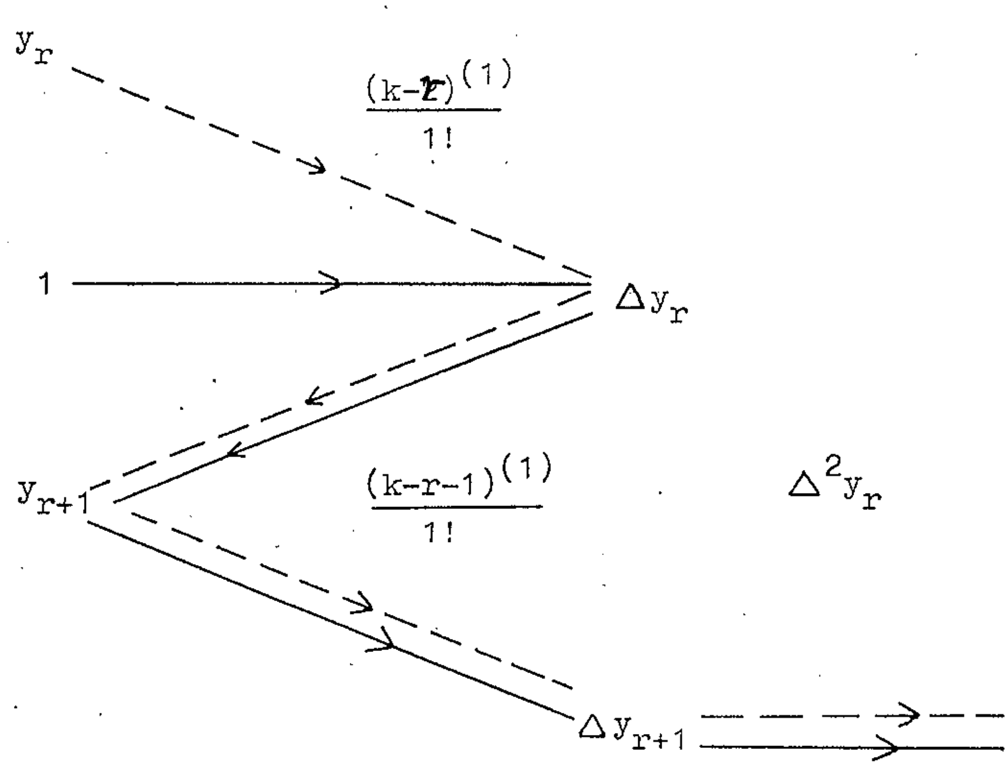
$$
\begin{aligned}
C_I + C_{II} + C_{III} &= (C_{JK} + C_{KN} + C_{NR} + C_{RJ}) + \\
&\quad (C_{KL} + C_{LM} + C_{MN} + C_{NK}) + \\
&\quad (C_{RN} + C_{NP} + C_{PQ} + C_{QR}) \\
&= (C_{JK} + C_{KL} + C_{LM} + C_{MN} + C_{NP} + C_{PQ} + \\
&\quad C_{QR} + C_{RJ} + (C_{KN}+C_{NK}) + (C_{RN}+C_{NR}) \\
&= CJKLMNPQRJ
\end{aligned}
$$

Karena $C_{KN} = -C_{NK}$ & $C_{RN} = -C_{NR}$, sehingga :

$C_{I} = 0$, $C_{II} = 0$, $C_{III} = 0$, maka sesuai dengan soal (1), $C_{JKLMNPQRJ} = 0$

3) Buktikan bila 2 alur zig-zag berakhir pada tempat yang sama dalam diagram Lozenge maka rumus interpolasi yang didapat adalah sama/identik.

Misalkan 2 alur zig-zag yang ditunjukkan oleh garis-garis putus dan garis utuh dalam gambar dibawah dua alur ini berakhir pada tempat yang sama meskipun mulai dari tempat yang berbeda.



Kontribusi total ke rumus interpolasi dari alur garis putus diberikan sebagai :

$$y_r + \Delta y_r \frac{(k-r)^{(1)}}{1!} - \Delta y_r \frac{(k-r-1)^{(1)}}{1!} + R \quad \ldots\ldots\ldots (2.13)$$

dengan R adalah sisa.

Begitu pula kontribusi total pada rumus interpolasi dalam garis utuh adalah :

$$\frac{1}{2}(y_r + y_{r+1}) + \Delta y_r \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{(k-r)^{(n)}}{1!} + \frac{(k-r-1)^{(1)}}{1!}\right) -$$

$$\Delta y_r \frac{(k-r-1)^{(1)}}{1!} + R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

Tanda negatip (-) dalam persamaan (2.13) dan (2.14) digunakan karena aturan 6.

Untuk membuktikan bahwa hasil (2.13) dan (2.14) sama , haruslah dibuktikan bahwa diferensinya adalah nol.

Diferensi tersebut adalah :

$$\frac{1}{2} y_{r+1} - \frac{1}{2} y_r + \frac{1}{2}\Delta y_r \frac{(k-r-1)^{(1)}}{1!} \quad \frac{1}{2}\Delta y_2 \frac{(k-r)^{!}}{1!} \ldots\ldots\ldots\ldots (2.15)$$

Karena $y_{r+1} = y_r + \Delta y_r$, maka persamaan (2.15) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{1}{2}\Delta y_r \left[1 + \frac{(k-r-1)^{(1)}}{1!} - \frac{(k-r)^{(1)}}{1!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Delta y_r \left[1 + k-r-1-(k-r)\right] = 0 \quad \text{terbukti.}$$

II.2. INTERPOLASI LAGRANGE :

Bentuk Umum :

$$y = A_o + A_1x + A_2x^2 + \dots\dots\dots\dots A_nx^n.$$

- Rumus dua titik dari Lagrange :

$$y(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_o - x_1)} y_o + \frac{(x - x_o)}{(x_1 - x_o)} y_1$$

- Rumus tiga titik dari Lagrange yang equivalen dengan polynomial :

$$y = A_o + A_1x + A_2x^2$$

$$y(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_o - x_1)(x_o - x_1)} \cdot y_o + \frac{(x - x_o)(x - x_2)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_o)(x - x_1)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)} \cdot y_2$$

- Rumus empat titik dari Lagrange ya ng equivalen deng- a n polynomial :

$$y = A_o + A_1x + A_2x^2 + \dots\dots\dots A_nx^n$$

$$y(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots\dots\dots\dots(x - x_n)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)\dots\dots\dots\dots(x_o - x_n)} \cdot y_o + \frac{(x - x_o)(x - x_2)\dots\dots\dots\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)\dots\dots\dots\dots(x_1 - x_n)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_o)(x - x_1)(x - x_3)\dots\dots(x - x_n)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots\dots(x_2 - x_n)} \cdot y_2$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{(x - x_o)(x - x_1)\dots\dots\dots\dots(x - x_{n-i})}{(x_n - x_o)(x_n - x_1)\dots\dots\dots\dots(x_n - x_{n-1})} \cdot y_n \qquad \dots\dots (2.16)$$

II.3. INTERPOLASI DENGAN PEMBAGI DIFERENSI

II.3.1. INTERPOLASI DENGAN PEMBAGI DIFERENSI TINGKAT I : (INTERPOLASI GARIS LURUS)

BENTUK UMUM :

$$y = f(x) = Ax+B \quad \text{atau} \quad Ax+B-f(x) = 0$$

Dititik tertentu (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) didapat :

$$Ax_1+B-y_1 = 0 \qquad Ax_2+B-y_2 = 0 \quad \ldots (2.17)$$

Dibentuk :

$$\left[y_1, y_2\right] = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y = f(x)$$

$$\text{misalkan} : f\left[x_1, x_2\right] = \left[y_1, y_2\right]$$

$$f\left[x_1, x_2\right] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f\left[x_1, x_2\right] = f\left[x_2, x_1\right]$$

Interpolasinya :

$$f(x) = f(x_1) + (x-x_1)f\ x_1, x_2$$

$$f(x) = f(x_1) + \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}\left\{f(x_2) - f(x_1)\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x_2-x_1}\left\{(x_2-x_1)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2) - (x-x_1)f(x_1)\right\}$$

$$= \frac{1}{x_2-x_1}\left\{(x_2-x\ )f(x_1) - (x-x_1)f(x_2)\right\}$$

$$F(x) = \frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} f(x_1) & x-x_1 \\ f(x_2) & x_2-x \end{vmatrix}$$

$f(x) = y$

$f(x_1) = y_1$

$f(x_2) = y_2$

$$y = \frac{1}{x_2-x_1} \begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots(2.18)$$

$\therefore$ Garis lurus pada suatu pembagi diferensi adalah :

$$f(x) = y_1 + (x-x_1)\left[y_1, y_2\right] \quad \ldots\ldots\ldots(2.19)$$

II.3.2. INTERPOLASI DENGAN PEMBAGI DIFERENSI TINGKAT II :

BENTUK UMUM :

$y = f(x) = Ax^2+Bx+C$

Dititik tertentu (x_1, y_1) , (x_2, y_2) dan (x_3, y_3) didapat persamaan :

$$\begin{aligned} Ax^2+Bx+C-f(x) &= 0 \\ Ax_1^2+Bx_1+C-y_1 &= 0 \\ Ax_2^2+Bx_2+C-y_2 &= 0 \\ Ax_3^2+Bx_3+C-y_3 &= 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ (2.20)$$

$y = f(x)$

$\left[y_1, y_2, y_3\right] = f\left[x_1, x_2, x_3\right]$

$$f\left[x_1, x_2, x_3\right] = \frac{f\left[x_2, x_3\right] - f\left[x_1, x_2\right]}{x_3-x_1}$$

$$f\left[x_1, x_2, x\right] = f\left[x_1, x_2, x_3\right]$$

$$f[x_2, x_1, x] = \frac{f[x_2, x] - f[x_1, x_2]}{x-x_1}$$

$$f[x_2, x_1, x] = \frac{f[x_1, x] - f[x_2, x_1]}{x-x_1}$$

$$f[x_1, x_2, x] = \frac{1}{x-x_1}\left\{\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{x-x_2}\left\{\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x} \quad \frac{(x-x_1)}{x-x_1} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2-x_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{x-x}\left\{\frac{x_2-x_1)\ f(x) + (x-x_2)\ f(x_1)}{(x-x_1)\ (x_2-x_1)} + \frac{[(x_2-x_1) + (x-x_2)]\ f(x_2)}{(x-x_1)\ (x_2-x_1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{x-x_2}\left\{\frac{x_2[f(x) - f(x_1)] - x_1 f(x) + xf(x_1)}{(x-x_1)\ (x_2-x_1)} - \frac{(x-x_1)\ f(x_2)}{(x-x_1)\ (x_2-x_1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{x-x}\left\{\frac{x_2[f(x) - f(x_1)] - x\ [f(x) - f(x_1)}{(x-x_1)\ (x_2-x_1)} - \frac{x_o\ \ f(x) - f(x_1) - x_1\ f(x) - xf(x_1)}{(x-x_1)\ (x_2-x_1)} - \frac{f(x_2)}{x_2-x_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{x-x_2}\left\{\frac{f(x) - f(x_1)}{x-x_1} + \frac{xf(x_1) - x\ f(x_1)}{(x-x_1)\ (x_2-x_1)} - \frac{f(x_2)}{x_2-x_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{x-x_2}\left\{\frac{f(x) - f(x_o)}{x-x_1} \quad \frac{xf(x_1) - f(x_1)}{x_2-x_1}\right\}$$

$$= \frac{1}{x-x_2}\left\{f[x, x_1] - f[x_2, x_1]\right\}$$

$$= f\ [x_2, x_1, x] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

$\therefore\ f(x) = f(x_1) + (x-x_1)\ f[x_1, x_2] + (x-x_1)\ (x-x_2)\ f[x_1, x_2, x_3]$

$y = f(x)$, maka :

$f(x) = y_1 + (x-x_1)\ [y_1, y_2] + (x-x_1)\ (x-x_2)\ [y_1, y_2, y_3]$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.22)$$

Pandang Determinasi Berikut :

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & f(x) \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Derivative/turunan dari determinan diatas adalah hanya membedakan baris yang paling atas

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & f'(x) \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

dengan cara yang sama maka didapat :

$$f'(x) = \left[y_1, y_2\right] + (2x-x_1-x_2) \left[y_1, y_2, y_3\right] \quad \ldots\ldots (2.23)$$

II.3.3. INTERPOLASI DENGAN PEMBAGI DIFERENSI TINGKAT-n :

$$\left[a, b, c, \ldots, n\right] = \frac{\left[a, b, c, \ldots, n - b, c, \ldots, n\right]}{a - n} \quad \ldots\ldots (2.24)$$

II.4. INTERPOLASI PADA INTEGRASI

Untuk interpolasi pada integrasi ada beberapa cara. Salah satu caranya adalah dengan Simphson 1/3 :

Pandang bentuk determinan berikut :

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 & f(x) \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan mengganti baris paling atas dengan integral, dimana integral dari fungsi interpolasi antara a dan b adalah :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

maka determinan diatas menjadi :

$$\begin{vmatrix} \int_a^b x^2 & \int_a^b x\, dx & \int_a^b dx & \int_a^b f(x)\, dx \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[b_4-b_2]{b_3-b_1} \begin{vmatrix} \int_a^b x^2\, dx & \int_a^b x\, dx & \int_a^b dx & \int_a^b f(x)\, dx \\ x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2-x_1^2 & x_2-x_1 & 0 & y_2-y_1 \\ x_3^2-x_2^2 & x_3-x_2 & 0 & y_3-y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[b_4:(x_3-x_2)]{b_3:(x_2-x_1)} \begin{vmatrix} \int_a^b x^2\,dx & \int_a^b x\,dx & \int_a^b dx & \int_a^b f(x)\,dx \\ x_1^{\,2} & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2+x_1 & 1 & 0 & [y_1,y_2] \\ x_3+x_2 & 1 & 0 & [y_2,y_3] \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{b_4-b_3} \begin{vmatrix} \int_a^b x^2\,dx & \int_a^b x\,dx & \int_a^b dx & \int_a^b f(x)\,dx \\ x_1^{\,2} & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2+x_1 & 1 & 0 & [y_1,y_2] \\ x_3-x_1 & 1 & 0 & [y_2,y_3]-[y_1,y_2] \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{b_4:(x_3-x_1)} \begin{vmatrix} \int_a^b x^2\,dx & \int_a^b x\,dx & \int_a^b dx & \int_a^b f(x)\,dx \\ x_1^{\,2} & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2+x_1 & 1 & 0 & [y_1,y_2] \\ 1 & 0 & 0 & [y_1,y_2,y_3] \end{vmatrix} = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dx \,.\, y_1 + \left(\int_a^b x\,dx - x_1\right)[y_1,y_2] +$$

$$\left(\int_a^b x^2\,dx - x_1\int_a^b x\,dx - x_2\int_a^b x\,dx + x_1x_2\right)[y_1,y_2,y_3]$$

Untuk $a = x_1 = 0$; $x_2 = h$; $b = x_3 = 2h$, maka :

$$[y_1,y_2] = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{h} \;;$$

$$[y_2,y_3] = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{y_3-y_2}{2h-h}$$

$$\left[y_2, y_3\right] = \frac{y_3 - y_2}{h}$$

$$\left[y_1, y_2, y_3\right] = \frac{y_2, y_3 \; - \; y_1, y_2}{x_3 - x_1} = \frac{\left(\frac{y_3 - y_2}{h} - \frac{y_2 - y_1}{h}\right)}{2h}$$

$$= \frac{y_3 - 2y_2 - y_1}{2h^2}$$

$$\int_a^b dx = \int_0^{2h} dx = 2h \; ; \; \int_a^b x \, dx = \int_0^{2h} x \, dx = 2h$$

$$\int_a^b x^2 \, dx = \int_0^{2h} x^2 \, dx = \frac{8}{3} h^3 \quad \text{..................(2.25)}$$

Sehingga didapat :

$$\int_0^{2h} f(x) \, dx = 2h(y_1) + 2h^2\left(\frac{y_2 - y_1}{h}\right) + \left(\frac{8}{3}h^3 - 2h^3\right)\left(\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}\right)$$

$$= 2h(y_1) + 2h(y_2 - y_1) +$$

$$\left(\frac{8h^3 - 6h^3}{3}\right) \left(\frac{1}{2h^2}\right) (y_3 - 2y_2 + y_1)$$

$$= 2h(y_1) + 2h(y_2 - y_1) + \left(\frac{h}{3}\right) (y_3 - 2y_2 + y_1)$$

$$= 2h(y_2) + \frac{h}{3} (y_3 - 2y_2 + y_1)$$

$$= \frac{h}{3} (y_1 + 6y_2 - 2y_2 + y_3)$$

$$\therefore \int_0^{2h} f(x) \, dx = \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3), \quad \text{....... (2.26)}$$

yang mana rumus ini dikenal sebagai Eumus Simphson $^1/_3$