BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. BENTUK PRAKTIS MASALAH TRANSPORTASI.

Misalkan ada m buah origin O_1, O_2, O_3, ..., O_m dan n buah destinasi D_1, D_2, D_3, ..., D_n. Misalkan a_i adalah penawaran yang tersedia di origin O_i, b_j adalah permintaan di destinasi D_j, dan c_{ij} adalah biaya pengangkutan untuk satu satuan barang dari origin O_i ke destinasi D_j (i=1,2,3,...,m dan j=1,2,3,...,n), maka yang dikehendaki adalah rencana pengangkutan dari setiap origin ke setiap destinasi sedemikian hingga biaya total minimum dan semua permintaan di destinasi terpenuhi.

Jika x_{ij} adalah kuantitas barang yang diangkut dari origin O_i ke destinasi D_j, maka jumlah barang yang diangkut dari origin O_i ke semua destinasi adalah

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+\dots+x_{in}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$$

dan jumlah barang yang diangkut dari semua origin ke destinasi D_j adalah

$$x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+\dots+x_{mj}=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}$$

Dengan demikian rencana pengangkutan yang dikehendaki adalah berusaha menentukan nilai-nilai $x_{ij} \geq 0$ (i=1,2,3,.....,m dan j=1,2,3,..,n) yang memenuhi kekangan

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+\dots+x_{1n} &= a_1\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+\dots+x_{2n} &= a_2\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+\dots+x_{3n} &= a_3\\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots\\
x_{m1}+x_{m2}+x_{m3}+\dots+x_{mn} &= a_m
\end{aligned}$$

atau

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i=1,2,3,\ldots,m \tag{1}$$

dan

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+\ldots+x_{m1} = b_1$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+\ldots+x_{m2} = b_2$$

$$\vdots$$

$$x_{1n}+x_{2n}+x_{3n}+\ldots+x_{mn} = b_n$$

atau

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j=1,2,3,\ldots,n \tag{2}$$

dimana diasumsikan bahwa

$$\sum_{i=1} a_i = \sum_{j=1} b_j \tag{3}$$

dan meminimalkan

$$z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}$$

$$+\ldots+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}$$

atau

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{4}$$

2.2 TABEL PERSOALAN TRANSPORTASI

Bentuk tabel persoalan transportasi adalah

Tabel-1

	D_1	D_2	. . .	D_j	. . .	D_n	a_i
O_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	. . .	C_{1j} X_{1j}	. . .	C_{1n} X_{1n}	a_1
O_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	. . .	C_{2j} X_{2j}	. . .	C_{2n} X_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	. . .	$\vdots$	. . .	$\vdots$	$\vdots$
O_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}		C_{ij} X_{ij}		C_{in} X_{in}	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	. . .	$\vdots$	. . .	$\vdots$	$\vdots$
O_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	. . .	C_{mj} X_{mj}	. . .	C_{mn} X_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	. . .	b_j	. . .	b_n	$\Sigma a_i=\Sigma b_j$

Dalam Tabel-1 tersebut terdapat mn sel yang bisa diartikan sebagai jalur-jalur transportasi. Jalur transportasi dari origin O_i ke destinasi D_j diwakili sel (i,j). Biaya angkut dan kuantitas barang yang diangkut dicatat dalam sel tersebut. Misal c_{ij} dan x_{ij} akan dicatat dalam sel (i,j). Dengan demikian untuk mengangkut barang kuantitas x_{ij} dari origin O_i ke destinasi D_j diperlukan biaya sebesar $c_{ij}.x_{ij}$.

Penawaran yang tersedia di setiap origin dicatat dalam kolom terakhir dan permintaan di setiap destinasi dicatat dalam baris terakhir. Sedangkan kuantitas total barang yang diangkut yaitu $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ dicatat di sel pojok kanan bawah Tabel-1 .

2.3. STRUKTUR MATRIKS A.

Kekangan-kekangan (1) dan (2) akan menghasilkan suatu sistim persamaan linier dengan m+n persamaan dan mn perubah. Sistim persamaan linier tersebut berbentuk sebagai berikut :

$$
\begin{array}{llllllllll}
x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n} & & & & & & & & & = a_1 \\
 & & & x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n} & & & & & & = a_2 \\
 & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn} & & = a_m \\
x_{11} & & & +x_{21}+ & & & \dots+x_{m1} & & & = b_1 \\
 & x_{12} & & & +x_{22}+ & & & \dots+x_{m2} & & = b_2 \\
 & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\
 & & x_{1n} & & & +x_{2n}+ & & & \dots+x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

Sistim persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai suatu sistim persamaan matriks Ax=b, dengan vektor-vektor kolom

$$
x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}
\qquad\qquad
b = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
A = \underbrace{\begin{bmatrix}
1 \cdots 1 & & & \\
 & 1 \cdots 1 & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & 1 \cdots 1 \\
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\ddots & \ddots & & \ddots \\
1 & 1 & & \cdots\ 1
\end{bmatrix}}_{mn \text{ kolom}}
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ baris} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ baris} \end{array}
\qquad (5)
$$

atau

$$
A = \underbrace{\begin{bmatrix}
1_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1_n & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
I_n & I_n & I_n & I_n & \cdots & I_n
\end{bmatrix}}_{mn \text{ kolom}}
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ baris} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} n \text{ baris} \end{array}
\qquad (6)
$$

dengan : 1_n adalah vektor dengan n buah komponen

I_n adalah matriks berderajat n

Bentuk matriks A seperti (b) dapat dipandang sebagai suatu struktur persoalan transportasi.

Definisi 1.

Suatu persoalan program linier Ax=b, $x \geqslant 0$ yang memaksimalkan atau meminimalkan z=cx disebut persoalan transportasi jika matriks koefisien A mempunyai sistim persamaan linier seperti (b).

Contoh 1.

Misalkan pada suatu keadaan dengan ketentuan bahwa terdapat dua origin dan empat destinasi. Penjabaran Ax=b adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini terlihat bahwa persoalan transpotasi telah dibawa ke bentuk baku persoalan program linier. Sehingga metoda simpleks dapat diterapkan langsung untuk sebarang persoalan transportasi. Meskipun demikian berdasarkan struktur matriks A yang sederhana dan khusus memungkinkan dikembangkan suatu algoritma untuk menyelesaikan persoalan transportasi dengan prosedure yang lebih sederhana dari metoda simpleks.

2.4. SIFAT-SIFAT MATRIKS A.

Matriks A pada (b) mempunyai m+n baris dan m.n kolom. Jika kolom ke $(i-1)n+j$ pada matriks A dilambangkan dengan p_{ij}, maka matriks A pada (b) dapat dinyatakan sebagai

$$A = (p_{11} \dots p_{1n}\ p_{21} \dots p_{2n} \dots p_{m1} \dots p_{mn}) \qquad (7)$$

Setiap p_{ij} dapat ditulis

$$p_{ij} = e_i + e_{m+j} \qquad (8)$$

Baris-baris matriks A terbagi atas dua bagian : m baris pertama berasal dari kekangan origin, dan n baris terakhir berasal dari kekangan destinasi. Selanjutnya masing - masing disebut baris origin dan baris destinasi.

Definisi 2.

Rank matriks A adalah banyaknya baris yang bebas linier dari matriks A.

Teorema 1.

Matriks A mempunyai rank m+n-1.

Bukti

Pandang matriks D yang dibentuk kolom-kolom n,2n,... mn,1,2,...,n-1 dan baris-baris 1,2,...,m+n-1 (baris terakhir matriks A dihilangkan). Maka

$$|D| = \begin{vmatrix} I_m & F \\ 0 & I_{n-1} \end{vmatrix}, \text{ dengan } F = \begin{bmatrix} 1_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Karena matriks D adalah matriks bujursangkar dengan derajat m+n-1 maka jika rank D, r(D)=m+n-1.

Sekarang andaikan baris-baris origin matriks A dinyatakan dengan s^i , i=1,2,3,...,m dan baris-baris destinasi dinyatakan dengan d^j , j=1,2,3,...,n. Maka dari (6) didapatkan hubungan sebagai berikut

$$\sum_{i=1} s^i = 1_{mn} \qquad\qquad \sum_{j=1} d^j = 1_{mn}$$

Sehingga

$$\sum_{i=1} s^i - \sum_{j=1} d^j = 0 \tag{10}$$

Koefisien setiap vektor baris tersebut diatas adalah +1 atau -1, ini berarti baris-baris matriks A tak bebas linier Jadi rank matriks A kurang dari m+n. Dari kedua bukti diatas maka teorema terbukti.

Karena rank matriks A, r(A)=m+n-1, maka sebarang baris A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier m+n-1 baris yang lain. Hal ini berarti hanya m+n-1 kekangan (1) dan (2) yang bebas linier.

Suatu sifat penting dan menarik pada matriks A adalah nilai determinan matriks bagian dari A atau nilai minor matriks A = $\pm$ 1 atau 0. Sifat ini sering disebut sebagai sifat "unimodular" matriks A.

Buktinya adalah sebagai berikut :

Andaikan A_k adalah matriks bagian berderajat k yang dibentuk dari sebarang k kolom yang berbeda-beda dan k baris yang berbeda-beda pula dari matriks A. Akan dibuktikan $|A_k| = \pm 1$ atau $|A_k| = 0$.

Perhatikan bahwa setiap kolom A_k ada yang mempunyai dua komponen 1, satu komponen 1, dan ada yang seluruh komponennya 0.

Jika A_k mempunyai satu atau lebih kolom yang terdiri dari komponen-komponen nol, maka jelas $|A_k| = 0$.

Jika setiap kolom A_k memuat dua komponen 1, maka untuk setiap kolom dalam A_k, satu komponen pasti berada dalam baris origin dan satu komponen 1 yang lain pasti berada dalam baris destinasi. Dengan mengambil jumlah baris-baris origin dikurangi jumlah baris-baris destinasi, diperoleh suatu vektor nol. Jadi baris-baris pada A_k tak bebas linier dan dapat disimpulkan bahwa $|A_k| = 0$.

Jika setiap kolom A_k memuat satu atau lebih komponen 1 dan sekurang-kurangnya terdapat satu kolom yang hanya memuat komponen 1, maka mengingat sifat-sifat determinan, $|A_k|$ dapat diubah menjadi

$$|A_k| = \pm |A_{k-1}|$$

dengan $|A_{k-1}|$ adalah minor berderajat k-1. Dengan jalan yang sama dapat diterapkan pada A_{k-1}, sehingga

$$|A_{k-1}| = 0 \qquad \text{atau } |A_{k-1}| = \pm |A_{k-2}|$$

Jika proses ini dilanjutkan akan diperoleh

$$|A_k| = \pm|A_{k-1}| = \pm|A_{k-2}| = \pm|A_{k-3}| = \ldots = \pm|A_1|$$

Karena setiap elemen matriks A mempunyai nilai 0 atau 1 maka setiap $|A_1| = 0$ atau $|A_1| = 1$. Dengan demikian telah dibuktikan bahwa setiap minor dari matriks A mempunyai nilai ± 1 atau 0.

2.5. VEKTOR-VEKTOR BASIS MATRIKS A.

Dalam pembahasan terdahulu telah dibuktikan bahwa $r(A)=m+n-1$, berarti $m+n-1$ vektor kolom p_{ij} bebas linier. Jika vektor-vektor bebas linier dinyatakan dengan $p^B_{\alpha\beta}$ yang selanjutnya disebut vektor-vektor basis, maka sebarang vektor kolom p_{ij} dari A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis $p^B_{\alpha\beta}$, dinyatakan

$$p_{ij} = y^{iu}_{ij}\, p^B_{iu} + y^{vu}_{ij}\, p^B_{vu} + y^{vt}_{ij}\, p^B_{vt} + \ldots + y^{wj}_{ij}\, p^B_{wj}$$

atau

$$p_{ij} = \sum_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta}_{ij}\, p^B_{\alpha\beta} \tag{11}$$

dengan $\sum_{\alpha\beta}$ adalah jumlahan vektor-vektor baris.

Teorema 2.

Andaikan $p^{B}_{\alpha\beta}$ menyatakan vektor-vektor basis, dan p_{ij} menyatakan suatu vektor sebarang dari A sehingga $p_{ij} = \Sigma\, y^{\alpha\beta}_{ij}\, p^{B}_{\alpha\beta}$ maka $y_{ij} = \pm 1$ atau 0.

Bukti :

Pada matriks A setiap p_{ij} mempunyai m+n komponen. Perhatikan bahwa (11) terdiri atas m+n persamaan linier dengan m+n-1 y_{ij} yang telah diketahui. Persamaan (11) dapat ditulis sebagai

$$R\, y_{ij} = p_{ij} \qquad (12)$$

dengan R adalah simbol matriks yang dibentuk dari m+n-1 kolom bebas linier matriks A. Dari pembahasan 2.4. diatas diketahui bahwa satu diantara baris R dapat dihapus, Jika sebuah baris R dihapus, akan diperoleh suatu matriks bujur - sangkar T berderajat m+n-1 yang "non singular". Sedangkan jika satu baris dari p_{ij} dihapus, misalkan baris ke-i, akan diperoleh vektor satuan e_{j+m-1} yang terdiri atas m+n-1 komponen. Sehingga jika baris ke-i dari (11) dihapus, hubungan (12) menjadi

$$T\, y_{ij} = e_{j+m-1}$$

dan karena T non singular maka

$$\begin{aligned} y_{ij} &= T^{-1}\, e_{j+m-1} \\ &= \tau_{j+m-1} \end{aligned} \qquad (13)$$

dengan τ_{j+m-1} adalah kolom ke-(j+m-1) dari T^{-1}

Bila :

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{k1} & t_{k2} & \cdots & t_{kk} \end{bmatrix}$$

maka

$$T^{-1} = \frac{\text{adj } T}{|T|}$$

dimana

$$\text{adj } T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & \cdots & T_{k1} \\ T_{12} & T_{22} & \cdots & T_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ T_{1k} & T_{2k} & \cdots & T_{kk} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{T_{11}}{|T|} & \frac{T_{21}}{|T|} & \cdots & \frac{T_{k1}}{|T|} \\ \frac{T_{12}}{|T|} & \frac{T_{22}}{|T|} & \cdots & \frac{T_{k2}}{|T|} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{T_{1k}}{|T|} & \frac{T_{2k}}{|T|} & \cdots & \frac{T_{kk}}{|T|} \end{bmatrix}$$

dengan T_{ij} , $i=1,2,3,\ldots,k$, $j=1,2,3,\ldots,k$ adalah kofaktor elemen t_{ij} dari T. Telah diketahui bahwa $\tau_{j+m-1} = T^{-1}e_{j+m-1}$ maka τ_{j+m-1} adalah kolom ke-$(j+m-1)$ dari T^{-1}. Sehingga untuk $k= m+n-1$ diperoleh

$$\tau_{j+m-1} = \begin{bmatrix} \frac{T_{j+m-1\ 1}}{|T|} \\ \frac{T_{j+m-1\ 2}}{|T|} \\ \vdots \\ \frac{T_{j+m-1\ m+n-1}}{|T|} \end{bmatrix}$$

Tetapi setiap komponen dari τ_{j+m-1} adalah matriks minor berderajat $m+n-1$ dari $\frac{T}{|T|}$. Selanjutnya $|T|$ dan matriks minor dari T adalah matriks minor dari A. Akibatnya, menurut pembahasan terdahulu yang menyatakan bahwa determinan matriks bagian bujursangkar atau nilai minor dari A adalah ± 1 atau 0 dan karena T non singular, maka $|T| = \pm 1$. Jadi setiap komponen τ_{j+m-1} adalah ± 1 atau 0, sehingga setiap komponen dari y_{ij} yaitu $y_{ij}^{\alpha\beta}$ bernilai ± 1 atau 0.

2.6. HASIL PENYEDERHANAAN DARI SEMUA $Y_{ij} = \pm 1$ ATAU $Y_{ij} = 0$.

Dalam peninjauan dari suatu tabel simpleks ke tabel simpleks berikutnya, perhatikan rumus transformasi untuk perubah basis berikut

$$\hat{x}_{\alpha\beta}^{B} = x_{\alpha\beta}^{B} - \frac{y_{st}}{y_{st}^{uv}} x_{uv}^{B} \qquad , \alpha\beta \neq uv$$

$$\hat{x}_{st} = \frac{x_{uv}^{B}}{y_{st}^{uv}}$$

dengan p_{st} adalah vektor yang masuk basis, dan p_{uv}^{B} adalah vektor yang meninggalkan basis. Dari pembahasan terdahulu, didapat bahwa $y_{st}^{uv} = 1$, $y_{st} = \pm 1$ atau $y_{st} = 0$ sehingga

$$\hat{x}_{\alpha\beta}^{B} = x_{\alpha\beta}^{B} \pm x_{uv}^{B} \quad \text{atau} \quad \hat{x}_{\alpha\beta}^{B} = x_{\alpha\beta}^{B}$$

Nilai baru perubah didapat dari perubah asal dengan cara ditambah atau dikurangi.

Jika perhitungan secara numerik pada permasalahan ini dilakukan dengan metoda simpleks, maka banyak pekerjaan yang diperlukan untuk menentukan $\hat{y}_{ij}$ dari y_{ij} pada setiap iterasi. Dalam persoalan transportasi, $y_{ij}^{\alpha\beta} = \pm 1$ atau $y_{ij}^{\alpha\beta} = 0$ sehingga dengan adanya transformasi $y_{ij}^{\alpha\beta}$ pada setiap iterasi, maka kesulitan tersebut dapat dikurangi.

Perhatikan hubungan (11). Jika $p_{\alpha\beta}^{B}$ dengan koefisien $y_{ij}^{\alpha\beta} = 0$ diabaikan, maka hubungan tak bebas linier antara vektor-vektor p_{ij} dan $p_{\alpha\beta}^{B}$ dapat disajikan sebagai

$$p_{ij} = \Sigma\,(\pm)\; p^B_{\alpha\beta} \tag{14}$$

Perhatikan bahwa setiap vektor p_{ij}, $p^B_{\alpha\beta}$ mempunyai bentuk seperti (8). Akibatnya setiap $p^B_{\alpha\beta}$ mempunyai koefisien +1 atau -1 maka dalam (14) terdapat suatu vektor basis $p^B_{\alpha\beta}$ berbentuk $p^B_{iu} = e_i + e_{m+u}$, dengan koefisien +1. Perhatikan untuk komponen-komponen ke-i dan ke-(m+u) merupakan juga m komponen pertama dari p_{ij}. Jika $u \neq j$, dalam hubungan (14) terdapat suatu vektor basis $p^B_{\alpha\beta}$ berbentuk

$$p^B_{vu} = e_v + e_{m+u} \quad , \; v \leq m$$

dengan koefisien -1, sehingga elemen 1 pada komponen ke-(m+u) dari p^B_{iu} akan terhapus. Jika cara ini dilanjurkan dalam sejumlah langkah tertentu (m+n-1) akhirnya akan didapatkan suatu vektor basis $p^B_{\alpha\beta}$ berbentuk

$$p^B_{wj} = e_w + e_{m+j}$$

dengan koefisien +1 dalam (14). Elemen 1 pada komponen ke-w dari p^B_{wj} akan terhapus oleh komponen ke-w (elemen 1) dari p^B_{ws} sebelumnya yang mempunyai koefisien -1 dan komponen ke-(m+j) dari p^B_{wj} merupakan komponen ke-(m+j) pula untuk p_{ij}. Pengertian diatas dapat disajikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p_{ij} &= (e_i+e_{m+j}) \\ &= (e_i+e_{m+u})-(e_v+e_{m+u})+(e_v+e_{m+t})-\dots-(e_v+e_{m+s})+ \\ &\quad (e_w+e_{m+j}) \\ &= p^B_{iu} - p^B_{vu} + p^B_{vt} - \dots - p^B_{ws} + p^B_{wj} \end{aligned} \tag{15}$$

Terlihat bahwa bentuk penyajian (15) diatas sangat sederhana. Karena penyajian sebarang vektor A dari vektor-vektor basis adalah tunggal, maka penyajian (15) juga tunggal.

Untuk vektor-vektor basis tunggal dapat dibuktikan sebagai berikut :

Andaikan $p_1, p_2, \ldots, p_k$ adalah vektor-vektor basis dan misalkan pula sebarang vektor p_j dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier atas vektor-vektor basis tersebut dengan 2 cara seperti berikut

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_k p_k = p_j$$

$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \ldots + \beta_k p_k = p_j \quad - \qquad \alpha_i \neq \beta_i$$

$$(\alpha_1-\beta_1)p_1 + (\alpha_2-\beta_2)p_2 + \ldots + (\alpha_k-\beta_k)p_k = 0$$

$\alpha_i - \beta_i \neq 0$, maka $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tak bebas linier.

Kontradiksi.

Contoh 2.

Untuk matriks A yang diberikan dalam contoh 1 pada 2.3. vektor-vektor $p_{11}, p_{12}, p_{23}, p_{24}$ bebas linier, maka sebarang vektor dalam A dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier atas lima vektor tersebut. Perhatikan bahwa tiga buah vektor p_{21}, p_{13}, p_{14} tidak termasuk dalam kelima vektor basis tersebut. Maka dapat dilihat bahwa

$$p_{21} = p_{22} - p_{12} + p_{11}$$

$$p_{13} = p_{12} - p_{22} + p_{23}$$

$$p_{14} = p_{12} - p_{22} + p_{24}$$

Untuk memudahkan pembahasan berikutnya, vektor-vektor kolom dari matriks A disusun sebagai berikut : vektor vektor dengan komponen yang sama untuk m elemen pertama disusun dalam satu baris. Misalnya di baris ke-i tersusun vektor-vektor p_{ij} untuk $j= 1,2,3,\ldots,n$. Sedangkan vektor-vektor dengan komponen yang sama untuk n elemen berikutnya disusun dalam satu kolom. Jadi kolom ke-j tersusun vektor - vektor p_{ij} untuk $i=1,2,3,\ldots,m$.

Susunan vektor-vektor tersebut adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mj} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}$$

bentuk susunan di atas adalah suatu matriks simbol $\|p_{ij}\|$ dengan m baris dan n kolom.

Jika pada m+n-1 vektor bebas linier (vektor basis) dalam matriks $\|p_{ij}\|$ diberi tanda lingkaran, maka akan terlihat secara langsung bagaimana suatu vektor sebarang p_{ij} dapat dinyatakan atas vektor-vektor basis tersebut.

Contoh 3.

Misalkan (15) yang disajikan seperti berikut :

$$p_{ij} = p^B_{iu} - p^B_{vu} + p^B_{vt} - p^B_{mt} + p^B_{ms} - p^B_{ws} + p^B_{wj}$$

dan pandang sebagian matriks simbol p_{ij}

$$\begin{matrix} p_{ij} & p_{ik} & \cdots & p_{is} & \cdots & p_{it} & p_{iu}^{+} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_{mj} & p_{mk} & \cdots & p_{ms}^{+} & \cdots & p_{mt}^{-} & p_{mu} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_{vj} & p_{vk} & \cdots & p_{vs} & \cdots & p_{vt}^{+} & p_{vu}^{-} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_{wj}^{+} & p_{wk} & \cdots & p_{ws}^{-} & \cdots & p_{wt} & p_{wu} \end{matrix}$$

Lintasan diawali dari vektor p_{ij}, lalu bergerak lewat baris ke-i sampai ditemukan vektor basis p_{iu}^B di kolom ke-u. Untuk p_{iu}^B diberikan koefisien +1. Kemudian dari p_{iu}^B bergerak lewat kolom ke-u sampai ditemukan pula suatu vektor basis p_{vu}^B di baris ke-v, dan diberikan koefisien -1 . Selanjutnya, bergerak lewat baris ke-v hingga ditemukan suatu vektor basis p_{vt}^B di kolom ke-t dan diberikan koefisien +1. Jika cara ini dilanjutkan akan didapatkan vektor basis p_{mt}^B di baris ke-m dan diberikan koefisien -1. Dari p_{mt}^B akan ditemukan vektor basis p_{ms}^B di kolom ke-s, dan diberikan koefisien +1. Selanjutnya, dari p_{ms}^B ditemukan vektor basis p_{ws}^B di baris ke-w, dan diberikan koefisien -1. Dari p_{ws}^B akan ditemukan vektor basis p_{wj}^B di kolom ke-j dan diberikan koefisien +1. Lewat kolom ke-j dari p_{wj}^B akhirnya gerakan ini kembali ke p_{ij}, dan terbentuklah suatu lintasan tertutup atau loop.

Lintasan tertutup ini tunggal, sebab p_{ij} dinyatakan atas vektor-vektor basis secara tunggal. Tetapi arah lintasan tertutup tersebut dapat berlawanan dengan arah yang diperoleh diatas, karenanya (15) dapat ditulis seperti berikut :

$$p_{ij} = p_{wj}^B - p_{ws}^B + \ldots + p_{vt}^B - p_{vu}^B + p_{iu}^B$$

Gerakan baris-kolom atau kolom-baris seperti dijelaskan diatas tidak menjamin terbentuknya lintasan tertutup , tetapi yang jelas dalam matriks p_{ij} pasti terdapat suatu lintasan yang tertutup. Perhatikan matriks p_{ij} diatas. Misalkan dari p_{ij} hingga ke vektor basis p_{vu}^B gerakannya sama seperti contoh 3 tetapi langkah selanjutnya dipilih basis p_{vk}^B di baris ke-v dan kolom ke-k. Telah diketahui bahwa di kolom ke-k tidak terdapat vektor basis yang lain. Se hingga langkah ini menemui jalan buntu ("blind alleys") , dan lintasan tertutup tidak terbentuk.

2.7. PENGERTIAN LINTASAN DALAM MASALAH TRANSPORTASI

Dalam pembicaraan yang lalu secara singkat telah diperkenalkan pengertian tentang lintasan dan lintasan tertutup. Berikut ini pengertian-pengertian tersebut akan dibahas secara lebih mendalam.

Definisi 3.

Lintasan Berarah yang menghubungkan dua sel (Directed Path Joining Two Cells) adalah suatu lintasan berarah yang menghubungkan sel (i,j) ke sel (u,v).

Suatu lintasan berarah dari sel (i,j) ke sel (u,v) dalam Tabel-1 didefinisikan sebagai himpunan berurutan dari sel-sel $\{(i,j),(i,k),(q,k),(q,r),\ldots,(v,w)\}$ atau

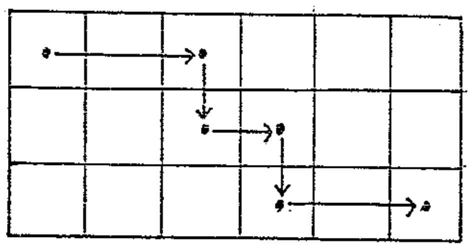
$\{(i,j),(s,j),(s,t),(r,t),\ldots,(v,w)\}$

sedemikian rupa sehingga sebarang dua sel yang berdekatan dalam himpunan berurutan tersebut terletak di baris yang sama atau di kolom yang sama. Sedangkan sebarang tiga sel yang berdekatan tidak terletak di baris yang sama atau kolom yang sama. Setiap sel (kecuali yang terakhir) harus tampak satu kali dalam himpunan tersebut. Sel (i,j) disebut sel permulaan (initial) dan sel (v,w) disebut sel terakhir (terminal).

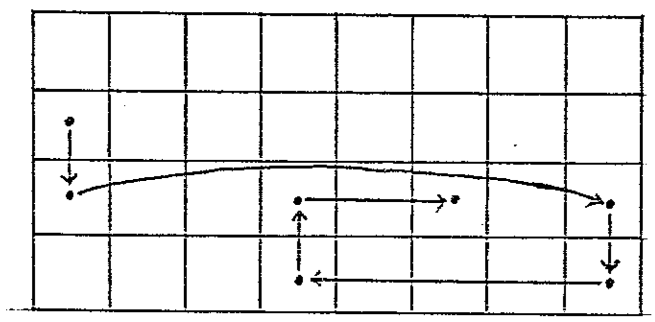
Contoh 4.

Diambil suatu lintasan berarah yang menghubungkan sel (1,1) dengan sel (3,6). Perhatikan gambar 1. Elemen-elemen berurutan yang menyajikan lintasan itu adalah $\{(1,1),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(3,6)\}$. Tentu saja banyak lintasan yang menghubungkan sel (1,1) dengan sel

(3,6). Hal ini juga berlaku untuk suatu lintasan berarah yang menghubungkan sel (2,1) dengan sel (3,6) dalam gambar 2.



Gambar 1



Gambar 2

Definisi 4.

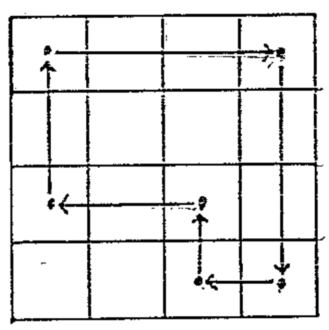
Cabang Berarah (Directed Branch) adalah suatu ruas garis yang menghubungkan suatu pasangan berurutan dari sel-sel yang terletak di baris atau kolom yang sama dalam Tabel-1.

Sel pertama dari pasangan berurutan disebut titik pangkal (initial point) dari cabang, dan sel kedua disebut titik ujung (end point). Jika lintasan berarah memuat lebih dari satu elemen, maka lintasan tersebut dapat dinyatakan sebagai suatu barisan (sequence) dengan satu atau lebih cabang. Setiap cabang tegak lurus terhadap cabang berikutnya.

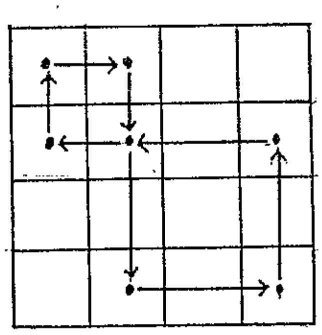
Definisi 5.

Suatu lintasan Tertutup Berarah dalam Tabel-1 ada - lah suatu lintasan berarah sedemikian hingga sel per tama dalam himpunan berurutan sama dengan sel terakhir, dan cabang pertama tegak lurus terhadap cabang terakhir.

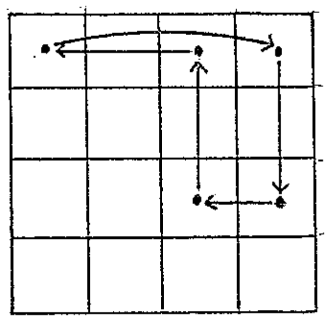
Perhatikan gambar 3,4 dan 5. Pada gambar 3 adalah suatu lintasan tertutup berarah menurut definisi. Sedangkan lintasan-lintasan tertutup pada gambar 4 dan gambar 5 menurut definisi tidak diperbolehkan. Pada gambar 4, sel (2,2) tampak dua kali. Hal ini bertentangan dengan definisi 3. Pada gambar 5, jika sel (1,1) sebagai sel pertama, maka cabang pertama tidak tegak lurus terhadap cabang terakhir, dan jika sebarang sel lain dalam gambar 5 dipilih sebagai sel pertama, maka tidak semua cabang yang berdekatan saling tegak lurus.



Gambar 3



Gambar 4



Gambar 5

Teorema 3.

Vektor-vektor p_{ij} matriks A yang dikaitkan dengan sel-sel dalam suatu lintasan tertutup berarah dalam Tabel-1 adalah tak bebas linier, dan berjumlah $\leqslant m+n$ dan genap.

Bukti

Dipilih suatu sel sebarang dalam suatu lintasan tertutup dalam Tabel-1, misalkan sel (i,j). Untuk vektor p_{ij} dari matriks A yang dikaitkan dengan sel (i,j) ini diberikan koefisien +1. Dari sel (i,j) bergerak ke sel berikutnya di baris ke-i atau kolom ke-j melalui lintasan tertutup berarah tersebut dan secara bergantian diberikan koefisien +1 atau -1, maka didapatkan

$$p_{ij} - p_{rj} + p_{rs} - \dots + p_{vw} - p_{iw} = 0 \qquad (16)$$

yang menyatakan suatu hubungan tak bebas linier.

Dari pembahasan 2.4. diperoleh bahwa jumlah vektor dari matriks A dalam hubungan tak bebas linier paling banyak m+n. Jadi dapat disimpulkan bahwa jumlah sel dalam lintasan tertutup diatas paling banyak m+n dan genap. Teorema terbukti.

Definisi 6.

Lintasan Berarah Sederhana (Simple Directed Path) dari sel (i,j) ke sel (u,v) dalam Tabel-1 adalah su atu lintasan yang di setiap baris atau kolom dalam Tabel-1 tidak terdapat lebih dari dua sel dari himpunan sel-sel yang mendefinisikan lintasan tersebut.

Gambar 1 menunjukkan suatu lintasan berarah sederhana.

Teorema 4.

Setiap lintasan berarah yang menghubungkan dua sel dalam Tabel-1 dapat disederhanakan menjadi lintasan berarah sederhana.

Bukti

Misalkan pada baris ke-k Tabel-1 terdapat lebih dari dua sel dalam satu lintasan.
Misalkan (k,p),(k,q),...,(k,w) adalah sel-sel lintasan tersebut. Selanjutnya, diandaikan pula bahwa urutan yang disajikan diatas sama seperti dalam himpunan berurutan yang mendefinisikan lintasan tersebut. Seka rang semua elemen berurutan yang terletak diantara (k,p) dan (k,w) dilepaskan , sehingga terjadi himpunan berurutan yang baru (k,p), (k,w) yang berdekatan. Langkah ini diulangi untuk setiap baris dan kolom yang mempunyai lebih dari dua sel dalam lintasan tersebut. Akhirnya lintasan yang dihasilkan adalah suatu lintasan berarah sederhana.

Contoh 5.

Perhatikan lintasan berarah dalam gambar 2 yang didefinisikan oleh himpunan berurutan $\{(2,1),(3.1),(3,8),(4,8),(4,4),(3,4),(3,6)\}$. Pada baris ke-3 dalam lintasan itu terdapat empat elemen dengan urutan (3,1),(3,8),(3,4),(3,6) . Menurut teorema 5, jika semua elemen antara (3,1)dan (3,6) dalam lintasan itu dilepaskan, maka dihasilkan lintasan baru $\{(2,1),(3,1),(3,6)\}$ yang sederhana.

Definisi 7.

Lintasan Tertutup Berarah Sederhana (Simple Directed Loop) adalah suatu lintasan tertutup berarah dimana mempunyai tidak lebih dari dua sel di setiap baris dan kolom dalam Tabel-1.

Suatu lintasan tertutup berarah sederhana mempunyai tepat dua elemen di setiap baris dan kolom yang dilaluinya.

2.8. BASIS DALAM TABEL TRANSPORTASI

Pada pembahasan 2.7. telah ditunjukkan bahwa vektor vektor matriks A yang dikaitkan dengan sel-sel yang membentuk suatu lintasan tertutup berarah adalah tak bebas linier. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sebarang himpunan vektor-vektor yang dikaitkan dengan sel-sel tanpa membentuk lintasan tertutup dalam Tabel-1 adalah bebas linier.
Jadi himpunan sel-sel dalam Tabel-1 yang berkorespodensi dengan m+n-1 vektor basis matriks A tidak membentuk lintasan tertutup.

Teorema 5.

Jika diberikan suatu vektor sebarang p_{ij} beserta suatu himpunan atas m+n-1 vektor basis, maka selalu dapat ditemukan suatu lintasan tertutup berarah dalam Tabel-1 dengan melibatkan sel-sel yang berkorespodensi dengan p_{ij} dan vektor-vektor basis tersebut.

Bukti

Pilih suatu himpunan atas m+n-1 vektor basis matriks A dan suatu vektor sebarang p_{ij}. Jelas bahwa himpunan dari m+n vektor ini tak bebas linier, sebab p_{ij} dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier atas vektor-vektor basis tersebut. Dari teorena 3 dapat disimpulkan bahwa suatu lintas an tertutup dapat dibentuk oleh suatu himpunan bagian dari m+n sel yang berkorespodensi dengan vektor-vektor tersebut. Lintasan tertutup tersebut tunggal (kecuali arah yang berlawanan). Dan lintasan tersebut adalah sederhana maka penyajian p_{ij} atas vektor-vektor basis tersebut tunggal. Teorema terbukti.

Definisi 8.

Himpunan Sel-sel yang Terhubung (Connected Set of Cells) adalah jika terdapat lintasan berarah (dan juga lintasan berarah sederhana) dari sel-sel dalam himpunan tersebut yang menghubungkan setiap sel dalam himpunan itu dengan sel lain dalam himpunan itu juga.

Definisi 9.

Sel-sel Basis (Basic Cells) adalah sel-sel dalam Tabel-1 yang berkorespodensi dengan m+n-1 vektor basis.

Definisi 10.

Pohon (Tree) adalah himpunan sel-sel terhubung tanpa memuat lintasan tertutup dalam Tabel-1.

Definisi 11.

Pohon Basis (Basic Tree) adalah suatu pohon yang terdiri atas m+n-1 sel dalam Tabel-1.

Teorema 6.

Suatu himpunan sel-sel basis dalam Tabel-1 membentuk suatu pohon basis. Sebaliknya, vektor-vektor yang dikaitkan dengan sel-sel dalam suatu pohon basis merupakan suatu basis.

Bukti

Dari pembahasan-pembahasan terdahulu diketahui bahwa suatu basis dari matriks A terdiri atas m+n-1 vektor bebas linier, dan sel-sel yang berkorespodensi dengan vektor vektor tersebut dalam Tabel-1 (disebut sel-sel basis) tidak membentuk lintasan tertutup. Telah diketahui bahwa sel sel basis membentuk suatu pohon yang terdiri atas m+n-1 sel. Jadi sel-sel basis tersebut membentuk suatu pohon basis.

Sebaliknya, suatu pohon basis tidak memuat suatu lintasan tertutup. Jadi vektor-vektor yang dikaitkan dengan sel-sel dalam suatu pohon basis merupakan basis. Teorema terbukti.

Teorema 7.

Suatu pohon basis mempunyai sekurang-kurangnya satu sel di setiap baris dan kolom dalam Tabel-1, tetapi tidak mungkin mempunyai dua atau lebih dari dua sel di setiap baris dan kolom dalam Tabel-1.

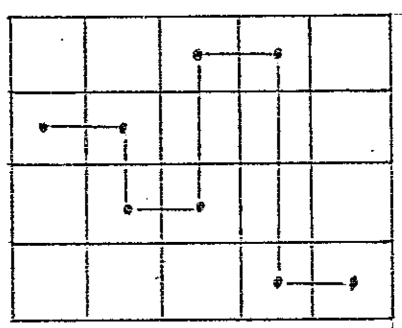
Bukti

Dibentuk suatu pohon basis dalam Tabel-1. Jadi vektor-vektor yang dikaitkan dengan sel-sel dalam pohon basis tersebut membentuk suatu basis. Andaikan baris ke-i dalam Tabel-1 tidak terdapat sel basis, maka tidak mungkin dibentuk suatu lintasan tertutup yang terdiri atas sel-sel basis dan satu sel di baris ke-i. Ini berarti suatu vektor p_{ij} yang dikaitkan dengan sel (i,j) tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier atas vektor-vektor basis. Bertentangan dengan sifat suatu basis. Analog untuk kolom.

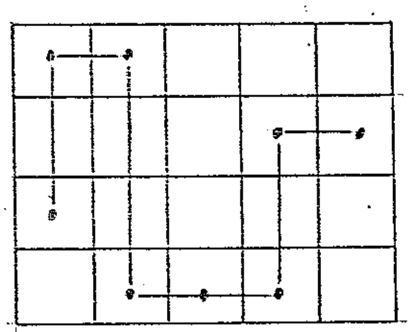
Selanjutnya, andaikan pohon basis tersebut memuat dua atau lebih dari dua sel di setiap baris dan kolom dalam Tabel-1, maka lintasan tertutup akan terbentuk. Ini akan bertentangan dengan definisi suatu pohon. Jadi pengandaian diingkar, dan teorema terbukti.

Contoh 6.

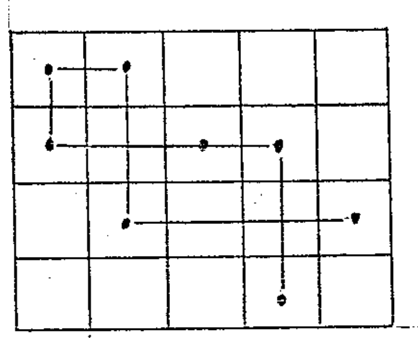
Perhatikan gambar 6, 7 dan 8. Gambar-gambar tersebut menunjukkan tiga contoh pohon basis dari persoalan transportasi dengan 4 buah origin dan 5 buah destinasi. Cabang cabang suatu pohon bisa berpotongan secara tegak lurus asalkan di titik perpotongan tidak ada sel pohon. Perhatikan gambar 8. Cabang-cabang suatu pohon berpotongan tetapi tidak ada lintasan tertutup yang terbentuk, karena tidak ada sel pohon yang terletak di titik perpotongan.



Gambar 6



Gambar 7



Gambar 8

2.9. PENYELESAIAN BASIS

Telah didapatkan bahwa persoalan transportasi dalam bentuk matriks adalah $Ax = b$. Jadi suatu penyelesaian basis untuk persoalan ini terdiri atas $m+n-1$ perubah. Vektor-vektor basis untuk persoalan ini dapat ditentukan dengan membentuk suatu pohon basis dalam Tabel-1. Selanjutnya akan ditentukan nilai-nilai perubah basis yang berkorespodensi dengan vektor-vektor basis tersebut.

Teorema 8.

Nilai perubah-perubah basis suatu persoalan transportasi dapat disajikan sebagai

$$x_{\alpha\beta} = \sum_i a_i - \sum_j b_j \quad , \text{ atau} \tag{17}$$

$$x_{\alpha\beta} = \sum_j b_j - \sum_i a_i$$

dengan $\sum_i$ adalah jumlahan untuk beberapa i

$\sum_j$ adalah jumlahan untuk beberapa j

Bukti

Misalkan dalam Tabel-1 telah ditentukan suatu pohon basis. Selanjutnya dipilih suatu baris atau kolom yang hanya memuat satu sel basis. Jika perubah basis yang berkorespodensi dengan sel basis adalah x_{ij}, maka

$$x_{ij} = a_i \qquad \text{atau} \qquad x_{ij} = b_j \tag{18}$$

tergantung pada pemilihan x_{ij} yang merupakan satu-satunya perubah basis di baris ke-i atau kolom ke-j. Persamaan (18) adalah kejadian khusus dari (17).

Sekarang di misalkan x_{ij} adalah satu-satunya perubah basis di baris ke-i maka $x_{ij} = a_i$. Dengan menghapuskan baris ke-i ini dan menggantikan b_j dengan $b_j - a_i$, Tabel-1 akan tereduksi. Hal ini berarti bahwa setelah diperoleh ni -

lai x_{ij}, persamaan dengan x_{ij} yang telah ditentukan nilainya tersebut dikesampingkan, dan x_{ij} dipindahkan ke ruas kanan untuk memperoleh ruas kanan yang baru bagi persamaan (1) dan (2). Jika x_{ij} adalah satu-satunya perubah basis di kolom ke-j sedemikian hingga $x_{ij} = b_j$, maka dengan menghapuskan kolom ke-j dan menggantikan a_i dengan $a_i - b_j$ akan diperoleh Tabel-1 yang tereduksi.

Tabel-1 yang tereduksi merupakan tabel untuk persoalan transportasi seimbang dengan m-1 buah origin dan n buah destinasi, atau m buah origin dan n-1 buah destinasi. Sehingga sifat-sifat suatu pohon basis berlaku juga untuk Tabel-1 yang tereduksi (Teorema 7). Jadi cara ini dapat diulangi dengan mengambil suatu baris atau kolom yang lain yang memuat satu perubah basis. Misalkan perubah basis ini adalah $x_{i'j'}$ maka

$$x_{i'j'} = a_{i'} \quad \text{atau} \quad x_{i'j'} = b_{j'} \quad \text{atau}$$
$$x_{i'j'} = a_i - b_j \quad \text{atau} \quad x_{i'j'} = b_j - a_i \qquad (19)$$

Persamaan (19) ini juga merupakan bentuk khusus dari (17).

Selanjutnya, dalam Tabel-1 yang tereduksi dapat ditentukan suatu baris atau kolom yang hanya memuat satu perubah basis. Misalkan perubah basis ini adalah $x_{i''j''}$.
Jika perubah basis ini berasal dari baris maka

$$x_{i''j''} = a_{i''} \quad \text{atau}$$
$$x_{i''j''} = a_i - b_j \quad \text{atau} \quad x_{i''j''} = a_{i'} - b_{j'} \qquad (20)$$
$$x_{i''j''} = a_i - b_j - b_{j'} \quad \text{atau} \quad x_{i''j''} = a_{i'} + a_i - b_j$$

Jika perubah basis tersebut berasal dari suatu kolom, maka

$$x_{i''j''} = b_{j''} \quad \text{atau}$$

$x_{i''j''} = b_j - a_i$ atau $x_{i''j''} = b_{j'} - a_{i'}$ (21)

$x_{i''j''} = b_j - a_i - a_{i'}$ atau $x_{i''j''} = b_{j'} + b_j - a_i$

Penyajian-penyajian diatas merupakan kejadian khusus dari (17). Dengan mengulangi langkah-langkah itu, akhirnya akan diperoleh m+n-1 perubah basis dengan nilai

$$\sum_i a_i - \sum_j b_j$$

Jika diperoleh dari baris-baris dalam Tabel-1,dan

$$\sum_j b_j - \sum_i a_i$$

Jika diperoleh dari kolom-kolom dalam Tabel-1. Teorema terbukti.

Akibat 8.1. (Sifat Integralitas)

Jika semua a_i dan b_j merupakan bilangan-bilangan bulat, maka nilai-nilai perubah basis juga merupakan bilangan bulat.

2.10. PENYELESAIAN BASIS YANG FISIBEL

Teorema 9.

Setiap persamaan transportasi seimbang mempunyai penyelesaian fisibel.

Bukti

Misalkan $A = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (persoalan transportasi seimbang).

Dengan mengambil $x_{ij} = \frac{a_i\, b_j}{A}$ didapatkan

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i\, b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i \qquad , \ a_i \geqslant 0 \text{ dan}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i\, b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j \qquad , \ b_j \geqslant 0$$

Karena $x_{ij} \geqslant 0$ dan persamaan (2) dan (3) dipenuhi, maka x_{ij}

merupakan penyelesaian fisibel. Teorema terbukti.

Berdasarkan teorema 8 dan 9, akan ditentukan m+n-1 perubah basis positif[1]. Jika semua syarat di baris dan kolom Tabel-1 dipenuhi oleh m+n-1 perubah x_{ij} positif, maka akan diperoleh suatu penyelesaian fisibel basis. Berikut ini akan diperlihatkan cara-cara untuk mendapatkan penyelesaian fisibel basis tersebut.

Pandang Tabel-1. Selanjutnya dipilih suatu perubah sebarang, misalkan x_{ij} di sel (i,j) sebagai suatu perubah basis, kemudian tentukan

$$x_{ij} = \min (a_i, b_j)$$

Nilai x_{ij} ini dicatat dalam sel (i,j) dalam Tabel-1, jika $a_i < b_j$ maka baris ke-i dikesampingkan dari pembicaraan selanjutnya (semua perubah di baris ke-i selain x_{ij} adalah non basis), dan b_j digantikan $b_j - a_i$. Sebaliknya, jika $b_j < a_i$, maka kolom ke-j dikesampingkan dari pembicaraan selanjutnya (semua perubah di kolom ke-j selain x_{ij} adalah non basis), dan a_i diganti $a_i - b_j$. Jika langkah ini dilanjutkan, akan terdapat satu baris dan satu kolom yang tersisa untuk ditentukan nilai perubah basisnya, sedemikian sehingga kekangan-kekangan di baris dan kolom tersebut terpenuhi. Dengan demikian penentuan perubah-perubah basis positif selesai dan suatu penyelesaian fisibel basis awal dengan m+n-1 perubah basis diperoleh.

---

1) Nilai-nilai perubah basis dalam pembicaraan ini dianggap tidak ada yang bernilai nol. Kejadian perubah basis bernilai nol akan dibicarakan pada sub-sub bab 3.2.3.