BAB. III

KONVERGENSI SUATU BARISAN FUNGSI DISTRIBUSI

DEFINISI : 3.1.

Barisan fungsi distribusi $\{ F_n(X) \}$ dari random variabel $\{ X_n \}$ dikatakan konvergen terhadap suatu fungsi distribusi F(x) sedemikian hingga untuk setiap titik kontinu- dari F(x) berlaku $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$ .... (3.1.1)

F(x) merupakan fungsi distribusi. Di titik-titik diskontinu dari F(x) barisan $\{ F_n(x) \}$ tak perlu konvergen ke - F(x).

Disini dibahas konvergensi barisan fungsi distribusi yang konvergen ke fungsi distribusi, walaupun kadang-kadang terjadi bahwa suatu barisan fungsi distribusi fungsi distribusi konvergen terhadap suatu fungsi yang bukan fungsi dis - tribusi.

Dalam bab sebelumnya telah disinggung mengenai fungsi karakteristik dan fungsi distribusi dari suatu random - variabel tunggal. Disini diperluas untuk barisan random variabel. Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan suatu barisan - random variabel dengan fungsi distribusi $F_n(x)$; n = 1,2,.. ..... Mengingat bahwa barisan fungsi distribusi $\{ F_n(x) \}$ konvergen bila terdapat suatu fungsi distribusi F(x) sedemikian hingga untuk setiap titik kontinu dari F(x) dipenuhi : $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$

Dengan cara yang sama seperti pada random variabel tung - gal, terdapat hubungan antara suatu barisan fungsi distribusi dan barisan fungsi karakteristik. Theorema LEVY-CRAMER menggambarkan hubungan ini sebagai berikut.

III.1. THEOREMA LEVY-CRAMER : 3.1.1.

Bila suatu barisan fungsi distribusi $\{ F_n(x) \}$; $n = 1,2, \ldots\ldots$ konvergen terhadap fungsi distribusi $F(x)$, maka korespondensi barisan fungsi karakteristik $\{ \phi_n(t) \}$ konvergen terhadap fungsi $\phi(t)$ disetiap titik t $(-\infty < t < \infty)$ yang merupakan fungsi karakteristik dari limit distribusi $F(x)$ dan konvergen ke $\phi(t)$ uniform terhadap t dalam setiap interval berhingga pada sumbu t.

Bukti :

$$\begin{array}{ccc} F_1(x) & \longrightarrow & \phi_1(t) \\ \vdots & & \vdots \\ F_n(x) & \longrightarrow & \phi_n(t) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ F(x) & & \phi(t) \end{array}$$

Dengan definisi fungsi karakteristik didapat

$$\left.\begin{aligned} \phi_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \cdot d\, F_n(x) \\ \phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \cdot d\, F(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (3.1.2)$$

Misal : a dan b titik kontinu dari fungsi distribusi $F(x)$ sedemikian hingga $a < b$, maka didapat :

$$\phi_n(t) = \int_{-\infty}^{a} e^{itx} \cdot dF_n(x) + \int_{a}^{b} e^{itx} \cdot dF_n(x) + \int_{b}^{\infty} e^{itx} \cdot dF_n(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1.3)$$

misal ketiga integral diatas dinyatakan sebagai : J_1; J_2 ; J_3 sehingga dapat ditulis :

$$\phi_n(t) = J_1 + J_2 + J_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1.4)$$

demikian pula :

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{a} e^{itx} \cdot dF(x) + \int_{a}^{b} e^{itx} \cdot dF(x) + \int_{b}^{\infty} e^{itx} \cdot dF(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1.5)$$

$$\phi(t) = I_1 + I_2 + I_3$$

$$J_2 - I_2 = \int_{a}^{b} e^{itx} \cdot dF_n(x) - \int_{a}^{b} e^{itx} \cdot dF(x) \ldots\ldots\ldots \quad (3.1.6)$$

$$= \left[e^{itx} \cdot F_n(x) - \int_{a}^{b} F_n(x)\, d\, e^{itx} \right] - \left[e^{itx} \cdot F(x) - \int_{a}^{b} F(x)\, d\, e^{itx} \right]$$

$$= \left[e^{itx} \cdot F_n(x) - it \int_{a}^{b} F_n(x) \cdot e^{itx}\, dx \right] - \left[e^{itx} \cdot F(x) - it \int_{a}^{b} F(x) \cdot e^{it.x}\, dx \right]$$

$$= \left[e^{it.x} . F_n(x) - e^{itx} . F(x) \right]_a^b - it \int_a^b \left[F_n(x) - F(x) \right] e^{itx} . dx$$

$$J_2 - I_2 = \left[e^{itX} \left\{ F_n(x) - F(x) \right\} \right]_a^b - it \int_a^b \left[F_n(x) - F(x) \right] e^{itx} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.7).$$

$$\left| J_2 - I_2 \right| \leqslant \left| \left[e^{itx} \left\{ F_n(x) - F(x) \right\} \right]_a^b \right| + \left| it \int_a^b \left[F_n(x) - F(x) \right] e^{itx} dx \right|$$

$$\leqslant \left| \left[F_n(x) - F(x) \right]_a^b \right| + |t| \int_a^b \left| F_n(x) - F(x) \right| dx$$

$$\leqslant \left| F_n(b) - F(b) \right| + \left| F_n(a) - F(a) \right| + |t| \int_a^b \left| F_n(x) - F(x) \right| dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.1.8).$$

Misal : $\varepsilon > 0$ merupakan konstanta sebarang, karena - $a < b$ merupakan titik-titik kontinu dari $F(x)$, maka untuk n cukup besar.

$$\left.\begin{array}{l} \left| F_n(b) - F(b) \right| < \frac{\varepsilon}{9} \\ \left| F_n(a) - F(a) \right| < \frac{\varepsilon}{9} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.9).$$

Oleh karena $\left| F_n(x) - F(x) \right|$ terbatas secara uniform dalam setiap interval di dapat

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| F_n(x) - F(x) \right| dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} \left| F_n(x)-F(x) \right| dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.10)$$

Karena fungsi dibawah tanda intgral pada ruas kanan dari persamaan (3.1.10) sama dengan nol, kecuali pada dekat sejumlah titik-titik terukur; sekarang misalkan t terbatas antara T_1- dan T_2 sedemikian hingga $T_1 < t < T_2$ dengan T_1 dan T_2 merupakan bilangan-bilangan tertentu sebarang dan misalkan k lebih besar dari bilangan-bilangan $|T_1|$ dan $|T_2|$ yaitu - $k = \max (|T_1| , |T_2|)$, maka untuk n cukup besar dan untuk setiap t yang telah di tetapkan tadi didapat

$$|t| \int_a^b \left| F_n(x) - F(x) \right| dx \leqslant k. \int_a^b \left| Fn(x) - F(x) \right| dx = \frac{\varepsilon}{9}$$

$$|t| \int_a^b \left| F_n (x) - F(x) \right| dx \leqslant \frac{\varepsilon}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.11).$$

Sehingga didapat :

$$\left| J_2 - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9}$$

$$\left| J_2 - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1.12).$$

dengan jalan yang sama didapat :

$$J_1 - I_1 = \int_{-\infty}^{a} e^{it.X} . d\, F_n(x) - \int_{-\infty}^{a} e^{i.t.X} . dF(x)$$

$$= \left[e^{i.t.X} . F_n(x) - it \int_{-\infty}^{a} F_n(x) . e^{itX} dx \right] - \left[e^{itx} . F(x) - it \int_{-\infty}^{a} F(x) . e^{it.X} dx \right]$$

$$= \left[e^{itX} \left\{ F_n(x) - F(x) \right\} \right]_{-\infty}^{a} - it \int_{-\infty}^{a} \left[F_n(x) - F(x) \right] e^{itX} dx$$

$$\left| J_1 - I_1 \right| \leqslant \left| \left[e^{it.X} \left\{ F_n(x) - F(x) \right\} \right]_{-\infty}^{a} \right| + \left| it \int_{-\infty}^{a} \left[F_n(x) - F(x) \right] e^{itX} \right| dx$$

$$\leqslant \left| \left[F_n(a) - F(a) - F_n(-\infty) + F(-\infty) \right] \right| + |t| \int_{-\infty}^{a} \left| F_n(x) - F(x) \right| dx$$

$$\leqslant \left| F_n(a) - F(a) \right| + |t| \int_{-\infty}^{a} \left| F_n(x) - F(x) \right| dx$$

$$\leqslant F_n(a) + F(a) + |t| \int_{-\infty}^{a} \left| F_n(x) - F(x) \right| dx$$

$k = \max (| T_1 | , | T_2 |)$, maka untuk n sangat besar dan untuk setiap t ; $T_1 < t < T_2$ berlaku

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{a} \left| F_n(x) - F(x) \right| dx = \int_{-\infty}^{a} \lim_{n \to \infty} \left| F_n(x) - F(x) \right| dx = \int_{-\infty}^{a} 0 = 0$$

Jadi : $\left| J_1 - I_1 \right| < F_n(a) + F(a)$ .... (3.1.13).

Jadi bila a cukup besar dalam nilai absolut, maka dengan - assumpsi dan kontinuitas dari $F(x)$ pada a didapat harga n - yang cukup besar sehingga : $F_n(a) < \frac{\varepsilon}{6}$ dan $F(a) < \frac{\varepsilon}{6}$ ... . (3.1.14)

Jadi untuk setiap t dan nilai n sangat besar.

$$\left| J_1 - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| J_1 - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1.15)$$

begitu pula : $\left| J_3 - I_3 \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ .... (3.1.16)

sehingga didapat : $\left| \phi_n(t) - \phi(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$$\left| \phi_n(t) - \phi(t) \right| < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.1.17)$$

III.2. KEBALIKAN THEOREMA LEVY-CRAMER

Theorema : 3.2.1.

Jika barisan fungsi karakteristik $\phi_n(t)$ konvergen untuk setiap t ($-\infty < t < \infty$) terhadap suatu fungsi $\phi(t)$ kontinu pada interval ($-T < t < T$), maka korespondensi barisan fungsi distribusi $\{ F_n(x) \}$ konvergen ke fungsi distribusi $F(x)$ yang sesuai dengan fungsi karakteristik $\phi(t)$

Bukti :

$$\begin{array}{ccc}
\phi_1(t) & \longrightarrow & F_1(x) \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\phi_n(t) & \longrightarrow & F_n(x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\phi(t) & & F(x)
\end{array}$$

Misal : $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ..., $\phi_n(t)$ merupakan suatu barisan fungsi-fungsi karakteristik dan $F_1(x)$; $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ merupakan korespondensi barisan fungsi distribusi. untuk membuktikan theorema ini akan dipakai theorema HELLY'S yang menyatakan bahwa setiap barisan fungsi distribusi $\{F_n(x)\}$ mem uat - sub barisan $\{F_{nk}(x)\}$ yang konvergensi ke fungsi tak turun - $F(x)$. Dalam hal ini, misalkan fungsi $F(x)$ kontinu dari kiri. Fungsi $F(x)$ dapat berubah pada titik-titik diskontinu sehingga menjadi kontinu dari kiri. Tetapi theorema HELLY'S tidak memastikan bahwa $F(x)$ adalah fungsi distribusi. Karena $F(x)$ merupakan limit fungsi distribusi didapat $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$; tetapi tak diketahui bahwa $F(-\infty) = 0$ dan $F(\infty) = 1$.

Bila hal ini tak demikian, maka perlu ditetapkan untuk fungsi-limit $F(x)$, hubungan $F(-\infty) = 0$ dan $F(\infty) = 1$ haruslah dipenuhi.

Akan dibuktikan bahwa relasi ini benar.

$$\text{Misal : } \eta = F(\infty) - F(-\infty) < 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.2.18)$$

karena $\phi_n(t) \longrightarrow \phi(t)$ dan

$$\phi_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it.o}\, dF_n(x) = F_n(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= F_n(\infty) - F_n(-\infty) = 1-0=1$$

didapat :

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it.0}\, dF(x) = F(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty)$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Dengan hipotesa fungsi $\phi(t)$ kontinu, sehingga dalam persekitaran di titik $t = 0$ berbeda sedikit dari 1; maka untuk r yang sangat kecil di dapat pertidaksamaan :

$$\frac{1}{2\,r}\left|\int_{-r}^{r} \phi(t)\, dt\right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} > \eta + \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots.(3.2.19)$$

dengan ε dipilih sedemikian hingga $\varepsilon < 1 - \eta$

$$\frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it.X} . d F(x) \right] dt \right| > \eta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \left[e^{itX} . F(x) - it \int_{-\infty}^{\infty} e^{it.X} F(x)\, dx \right] dt \right|$$

$$> \eta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left[\left| e^{itX} . F(x) \right| + \left| it \right| \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it.X} . F(x)\, dx \right| \right] dt$$

$$> \eta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left[F(x) + |t| \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx \right] dt > \eta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left[F(\infty) - F(-\infty) + |t| \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx \right]$$

$$dt > \eta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left[(1 - 0 + k.0 \right] dt > \eta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} dt = \frac{1}{2r} \left[t \right]_{-r}^{r} = \frac{1}{2r} . 2r = 1 > \eta + \frac{\varepsilon}{2}$$

karena sub barisan $\{ F_{nk}(x) \}$ konvergen ke $F(x)$, dengan persamaan (3.2.18) dapat dipilih $\lambda > \frac{4}{(\varepsilon . r)}$ sedemikian hingga λ dan $-\lambda$

merupakan titik-titik kontinu dari fungsi limit distribusi - dan untuk k sebarang sedemikian hingga untuk $k > K$

$$\eta_k = F_{nk}(\lambda) - F_{nk}(-\lambda) < \eta + \frac{\varepsilon}{4} \quad \ldots\ldots\ (3.2.20)$$

karena $\phi_n(t) \longrightarrow \phi(t)$, untuk k sangat besar didapat

$$\frac{1}{2r}\left| \int_{-r}^{r} \phi_{nk}(t)\, dt \right| > \eta + \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.2.21)$$

Sedangkan : $\displaystyle\int_{-r}^{r} \phi_{nk}(t)\, dt = \int_{-r}^{r}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i.t.X} . d F_{nk}(x)\right] dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-r}^{r} e^{i.t.X} .dt\right] dF_{nk}(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.2.22)$$

karena $\left| e^{itX} \right| = \left| \cos tX + i \sin tX \right| = \cos^2 tx + \sin^2 tx$

$= 1$ di dapat

untuk $|X| \leqslant \lambda$

$$\left| \int_{-r}^{r} e^{itX} dt \right| \leqslant 2r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.2.23)$$

Untuk $|X| > \lambda$

$$\left| \int_{-r}^{r} e^{it.X} .dt \right| = \left| \left[\frac{e^{itX}}{iX} \right]_{-r}^{r} \right| = \frac{\left| e^{irX} - e^{irX} \right|}{|X|}$$

$$\sin rX = \frac{e^{irX} - e^{irX}}{2i} \Longrightarrow e^{irX} - e^{-irX} = 2i \sin rX$$

Jadi $\displaystyle\left| \int_{-r}^{r} e^{itX} dt \right| = \frac{1}{|X|} \left| e^{irX} - e^{-irX} \right|$

$$= \frac{1}{|X|} \left| 2i \sin rX \right| = \frac{2}{|X|} \left| \sin rX \right|$$

Karena $|\operatorname{Sin} rX| < 1$, maka $\left| \int_{-r}^{r} e^{itX}\, dt \right| = \frac{2}{|X|} < \frac{2}{\lambda}$ ....

..... (3.2.24)

Dari persamaan (3.2.21)

$$\frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \phi_{nk}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \phi_{nk}(t)\, dt \right|_{|X| \leqslant \lambda} +$$

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \phi_{nk}(t)\, dt \quad {}_{|X| > \lambda}$$

$$\frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} . dF_{nk}(x) \right] dt \right| \leqslant \frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} . dF_{nk}(x) \right] dt \right.$$

$$+ \frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} . dF_{nk}(x) \right] dt \right.$$

$$\frac{1}{2r} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-r}^{r} e^{itX} . dt \right] dF_{nk}(x) \right| \leqslant \frac{1}{2r} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-r}^{r} e^{itX} . dt \right] dF_{nk}(x) \right|$$

$$+ \frac{1}{2r} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-r}^{r} e^{itX} . dt \right] dF_{nk}(x) \right| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2.25).$$

dengan menggunakan pertidaksamaan (3.2.23) untuk $|X| \leqslant \lambda$ dan pertidaksamaan (3.2.24) untuk $|X| > \lambda$ didapat

$$\frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^{r} \phi_{nk}(t) dt \right| \leqslant \frac{1}{2r} \left| \int_{-\infty}^{\infty} 2rd\, F_{nk}(x) \right|_{|X| \leqslant \lambda}$$

$$+ \frac{1}{2r} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\lambda}\, dF_{nk}(x) \right|_{|X| > \lambda}$$

$$\frac{1}{2r}\left|\int_{-r}^{r}\phi_{nk}(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{\substack{-\infty \\ |x|\leqslant\lambda}}^{\infty} dF_{nk}(x)\right| + \frac{1}{r\lambda}\left|\int_{\substack{-\infty \\ |x|>\lambda}}^{\infty} dF_{nk}(x)\right|$$

$$\frac{1}{2r}\left|\int_{-r}^{r}\phi_{nk}(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{|x|\leqslant\lambda} dF_{nk}(x)\right| + \frac{1}{r\lambda}\left|\int_{|x|>\lambda} dF_{nk}(x)\right|$$

$$\frac{1}{2r}\left|\int_{-r}^{r}\phi_{nk}(t)\,dt\right| \leqslant \eta_k + \frac{1}{r\lambda}$$

Sedangkan menurut persamaan (3.2.18) dapat dipilih $\lambda > \frac{4}{\varepsilon . r}$,
maka $\frac{1}{r.\lambda} < \frac{\varepsilon}{4}$

Jadi : $\frac{1}{2.r}\left|\int_{-r}^{r}\phi_{nk}(t)\,dt\right| \leqslant \eta + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \eta + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{1}{2\ r}\left|\int_{-r}^{r}\phi_{nk}(t)\,dt\right| \leqslant \eta + \frac{\varepsilon}{2} \quad ......(3.2.26)$$

Pertidaksamaan (3.2.26) dan (3.2.21) berlawanan. Sehingga fungsi $F(x)$ merupakan fungsi distribusi. Dengan theorema : 3.1.1. didapat $\phi(t)$ merupakan fungsi karakteristiknya.

Sekarang akan dibuktikan bahwa barisan $\{F_n(x)\}$ konvergen ke $F(x)$.

Bukti :

Andaikan barisan $\{F_n(x)\}$ tidak konvergen ke $F(x)$, maka terdapat barisan lain $\{F_{n_1}'(x), F_{n_2}'(x), ..., F_{nk}'(x)\}$ yang konvergen ke $F_1(x)$; dengan $F_1(x) \neq F(x)$. Telah dibuktikan bahwa $F_1(x)$ suatu fungsi distribusi dengan fungsi karakteristik -

$\emptyset(t)$; sedangkan $F(x)$ fungsi distribusi dengan $\emptyset(t)$ sebagai - fungsi karakteristiknya. Berarti $F_1(x) = \emptyset(t)$ dan $F(x) = \emptyset(t)$ jadi $F_1(x) = F(x)$ kontradiksi. Akibatnya Barisan $\{F_n(x)\}$ konvergen ke $F(x)$.

Sehingga theorema terbukti.

Akan diberikan penggunaan theorema : 3.1.1. dan theorema : 3.2.1. untuk membuktikan theorema penting dalam teori - probabilitas yaitu theorema limit pusat.

III.3. THEOREMA LIMIT PUSAT.

Misalkan : $\{X_n\}$ merupakan barisan random variabel dengan distribusi binomial, dalam probabilitas fungsi massa - yang diberikan sebagai

$$P(X_n = r) = \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.3.27)$$

dengan : $p + q = 1$ dan $0 < p < 1$

mengingat bahwa mean dan varian dari random variabel X_n diberikan :

$$\left.\begin{aligned} E[X_n] &= n.p \\ Var(X_n) &= n.p.q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.28)$$

ditentukan barisan random variabel standart $\{Y_n\}$ sebagai

$$Y_n = \frac{X_n - n.p}{\sqrt{n.p.q}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.29)$$

THEOREMA : DEMOIVRE-LAPLACE : 3.3.1

Jika $\{F_n(y)\}$ merupakan barisan fungsi distribusi random variabel Y_n yang dinyatakan oleh persamaan (3.3.29) dengan X_n mempunyai distribusi binomial (3.3.28), maka untuk setiap y didapat relasi :

$$P\left(\frac{X_n - n.p}{\sqrt{n.p.q}} < y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \ldots (3.3.30).$$

Bukti :

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{r} . b^{n-r} = (a + b)^{n}$$

Tampak fungsi karakteristik $\phi_X(t)$ dari random variabel X_n ber bentuk

$$\phi_X(t) = E\left[e^{it.X_n}\right] = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} . p^{r} . q^{n-r} . e^{itr}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (p.e^{it})^{r} . q^{n-r} = (pe^{it} + q)^{n} \ldots\ldots \ldots\ldots (3.3.31)$$

maka fungsi karakteristik dari Y_n diberikan sebagai :

$$\phi_Y(t) = E\left[e^{it.Yn}\right] = E\left[\exp . it . \frac{X_n - n.p}{\sqrt{n.p.q}}\right]$$

$$= e^{\frac{-it.np}{\sqrt{n.p.q}}} . E\left[e^{it.\frac{X_n}{\sqrt{n.p.q}}}\right]$$

$$= e^{\frac{-it.np}{\sqrt{n.p.q}}} . \phi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n.p.q}}\right)$$

$$= e^{\frac{-it.n.p}{\sqrt{n.p.q}}} . \left(q + p . e^{\frac{it}{\sqrt{n.p.q}}}\right)^{n}$$

$$= \exp.\left(\frac{-np.it}{\sqrt{n.p.q}}\right)\left(q + p.\exp . \frac{it}{\sqrt{n.p.q}}\right)^{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.32)$$

$$= \exp\left(\frac{-p.it}{\sqrt{n.p.q}}\right)^n \left(q + p.\exp . \frac{it}{\sqrt{n.p.q}}\right)^n$$

$$= \left[\exp .\left(\frac{-pit}{\sqrt{n.p.q}}\right)\left(q + p.\exp . \frac{it}{\sqrt{n.p.q}}\right)\right]^n$$

$$= \left[q. \exp .\left(\frac{-pit}{\sqrt{n.p.q}}\right) + p.\exp\left(\frac{it}{\sqrt{n.p.q}} - \frac{pit}{\sqrt{n.p.q}}\right)\right]^n$$

$$= \left[q. \exp . \frac{-pit}{\sqrt{n.p.q}} + p.\exp\left\{(1-p) . \frac{it}{\sqrt{n.p.q}}\right\}\right]^n$$

$$\phi_Y(t) = \left[q.\exp .\left(\frac{-pit}{\sqrt{n.p.q}}\right) + p.\exp .\left(\frac{q.\ it}{\sqrt{n.p.q}}\right)\right]^n$$

.... (3.3.33).

Dengan mengekpansikan bentuk exponensiil dalam bentuk e^{iZ} pada persekitaran $Z = 0$ menurut rumus Max Laurin didapat

$$e^{iZ} = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{iZ}{j!}\right)^j + 0\left(Z^k\right) \quad \text{.........} \quad (3.3.34)$$

$$e^{\left(\frac{-pit}{\sqrt{n.p.q}}\right)} = 1 - \frac{pit}{\sqrt{n.p.q}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{-pit}{\sqrt{n.p.q}}\right)^2 + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

$$= 1 - it\sqrt{\frac{p}{n.q}} - \tfrac{1}{2}\ \frac{p^2 . t^2}{n.p.q} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

$$= 1 - it .\sqrt{\frac{p}{n.q}} - \tfrac{1}{2} . \frac{p. t^2}{n.q} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

$$q. e^{\frac{-pit}{\sqrt{n.p.q}}} = q - qit\sqrt{\frac{p}{n.q}} - \frac{q . p. t^2}{2. n. q} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

$$= q - it\sqrt{\frac{p.q}{n}} - \frac{p \cdot t^2}{2\,n} + 0\,(\frac{t^2}{n}) \;\ldots.\; (3.3.35)$$

$$e^{\left(\frac{qit}{\sqrt{n.p.q}}\right)} = 1 + \frac{qit}{\sqrt{n.p.q}} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{q\,.\,t}{\sqrt{n.p.q}}\right)^2 + 0\,(\frac{t^2}{n})$$

$$p.e^{\left(\frac{qit}{\sqrt{n.p.q}}\right)} = p + \frac{p.q\ i\ t}{\sqrt{n.p.q}} - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{p.q^2.t^2}{n.p.q} + 0\,(\frac{t^2}{n})$$

$$= p + it\,.\,\frac{\sqrt{p.q}}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{q.t^2}{n} + 0\,(\frac{t^2}{n})$$

$$= p + it\,.\sqrt{\frac{p.q}{n}} - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{q.t^2}{n} + 0\,(\frac{t^2}{n})$$

$$\ldots\ldots\ldots\quad (3.3.36)$$

dan untuk setiap t didapat :

$$\lim_{n \to \infty} n\,.\,0\,(\frac{t^2}{n}) = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (3.3.37)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.35) dan (3.3.36) ke dalam persamaan (3.3.33) didapat :

$$\phi_Y(t) = \left[\, q - it\sqrt{\frac{p.q}{n}} - \frac{p.t^2}{2\,n} + p + it\sqrt{\frac{p.q}{n}} - \frac{q.\,t^2}{2n} + 0\,(\frac{t^2}{n})\right]^n$$

$$= \left[\, p + q - \frac{(p+q)\,t^2}{2\,n} + 0\,(\frac{t^2}{n})\right]^n$$

$$= \left[\, 1 - \frac{t^2}{2\,n} + 0\,(\frac{t^2}{n})\right]^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3.3.38).$$

dengan : p + q = 1; sehingga

$$\ln \phi_Y(t) = \ln \left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n$$

$$\ln \phi_Y(t) = n \ln \left[1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]$$

$$\ln \phi_Y(t) = n \ln (1 + Z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.39).$$

dengan $Z = -\frac{t^2}{2\,n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)$

Tampak bahwa untuk z besar dan untuk setiap t tertentu; $|Z| < 1$

$$\ln (1 + Z) = Z$$

Jadi $\ln \phi_Y(t) = n \ln (1 + Z) = n.Z = \cancel{n}\left(- \frac{t^2}{\cancel{n}.2} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)$

$$\ln \phi_Y(t) = -\frac{t^2}{2} + n\, 0\left(\frac{t^2}{n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.40)$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Y(t) = \lim_{n \to \infty} \left[-\frac{t^2}{2} + n \,.\, 0\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]$$

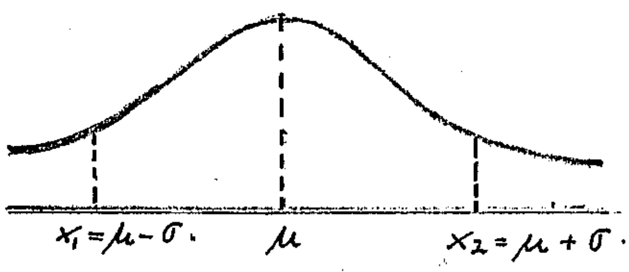
$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Y(t) = \lim_{n \to \infty} -\frac{t^2}{2} + \lim_{n \to \infty} n \,.\, 0\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Y(t) = -\frac{t^2}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \phi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.41)$$

Persamaan (3.3.41) ini merupakan fungsi karakteristik random - variabel normal. Sehingga barisan fungsi karakteristik random-variabel standart Y_n yaitu $\{ \phi_Y(t) \}$ konvergen ke fungsi karakteristik random variabel dengan suatu distribusi normal - yang mempunyai mean 0 dan varian 1 bila $n \longrightarrow \infty$

Perlu dicatat bahwa ke konvergenan ke distribusi normal-berlaku untuk setiap y, karena fungsi distribusi dari distribusi normal tak mempunyai titik-titik diskontinu.



F(X) Simetris terhadap $X = \mu$ maka $F(\mu - X) = F(\mu + X)$ dan $F(X)$ mencapai max pada $X = \mu$ dengan max $F(X) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma}$

Akibatnya :

Dengan menggunakan theorema DEMOI VRE-LAPLACE dapat di buktikan bahwa untuk n yang besar

$$P(x_1 < X_n < x_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}} \, . \, dy. \qquad \text{..........} \qquad (3.3.42)$$

dengan $x_1 = y_1 \sqrt{n.p.q} + n.p$

$x_2 = y_2 \sqrt{n.p.q} + n.p$

Bukti :

Misalkan y_1 dan y_2 merupakan dua titik sebarang dengan $y_1 < y_2$. Dari Solusi :

$$P\left(\frac{X_n - n.p}{\sqrt{n.p.q}} < y \right) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\lim_{n \to \infty} P(y_1 < Y_n < y_2) = \lim_{n \to \infty} \left[F_n(y_2) - F_n(y_1) \right]$$

$$\lim_{n \to \infty} P(y_1 < Y_n < y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy$$

$$\text{..............} \quad (3.3.43)$$

Sedangkan menurut definisi :

$$Y_n = \frac{X_n - n.p}{\sqrt{n.p.q}}, \quad \text{sehingga}$$

$$P(y_1 < Y_n < y_2) = P\left(y_1 < \frac{X_n - n.p}{\sqrt{n.p.q}} < y_2\right)$$

$$P(y_1 < Y_n < y_2) = P(y_1 . \sqrt{n.p.q} + np < X_n < y_2 \sqrt{n.p.q} + np) \text{ ....}(3.3.44)$$

Jadi didapat :

$$\lim_{n \to \infty} P(y_1 \sqrt{n.p.q} + n.p < X_n < y_2 \sqrt{n.p.q} + n.p)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y_2}{2}} .dy \text{ ....}(3.3.45)$$

atau :

$$P(x_1 < X_n < x_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y_2}{2}} . dy\text{...}$$

$$\text{..............}(3.3.46)$$

Contoh : 3.1.

Misal : lemparan sebuah coin. Coin dilempar 200 kali ; misalkan probabilitas mendapatkan gambar dan angka adalah p dan q. Ditanyakan berapakah probabilitas gambar akan timbul-lebih dari 140 kali dan kurang dari 150 kali dengan p-q =0,5 Dalam hal ini random variabel X_n dapat bernilai 0 sampai 200

Diketahui bahwa mean dan varian dari distribusi binomial diberikan oleh : $E\left[X_n\right] = n.p = 100$

$$Var\left[X_n\right] = n.p.q = 50$$

Jawab :

Dengan menggunakan persamaan (3.3.46) didapat

$$P(140 < X_n < 150) = P\left(\frac{140-100}{\sqrt{50}} < \frac{X_n - 100}{\sqrt{50}} < \frac{150-100}{\sqrt{50}}\right)$$

$$P(140 < X_n < 150) = P\left(\frac{140-100}{5\sqrt{2}} < \frac{X_n - 100}{5\sqrt{2}} < \frac{150-100}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$P(140 < X_n < 150) = P\left(4\sqrt{2} < \frac{X_n - 100}{5\sqrt{2}} < 5\sqrt{2}\right)$$

$$P(140 < X_n < 150) \simeq \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{4\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} .dt$$

Contoh : 3.2.

Misal : $\{U_n\}$ merupakan suatu random variabel yang didefinisikan sebagai : $U_n = \frac{X_n}{n}$; dengan X_n mempunyai distribusi binomial. Hitung : mean dan varian dari random variabel U_n dan buktikan bahwa :

$$P(U_1 < U_n < U_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

dengan $Z_n = \dfrac{U_n - p}{\sqrt{\dfrac{p.q}{n}}}$

Jawab :

Misalkan ditentukan barisan random variabel $\{ X_k \}$ yang terdistribusi secara identik dan independent dengan k = 1,2.. ..... Ditentukan bahwa momen order pertama dan kedua ada. Misalkan m dan σ^2 merupakan mean dan varian dari X_k; kemudian di misalkan suatu random variabel lain Y_n yang diberikan sebagai :

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3.3.47)$$

maka :

$$\begin{aligned} E[Y_n] &= E[X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n] \\ &= E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] \\ &= m + m + \dots\dots + m \\ &= n \cdot m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[Y_n] &= \mathrm{Var}[X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n] \\ &= \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + \dots\dots + \mathrm{Var}[X_n] \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 + \dots\dots\dots + \sigma^2 \\ &= n \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

Sehingga dengan theorema yang sama didapat untuk random variabel.

$$Z_n = \frac{(Y_n - n \cdot m)}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$P(Z_1 < Z_n < Z_2) = P\left(Z_1 < \frac{Y_n - n.\,m}{\sigma\sqrt{n}} < Z_2\right)$$

$$P(Z_1 < Z_n < Z_2) = P(Z_1 . \sigma\sqrt{n} + n.m < Y_n < Z_2 .$$
$$\sigma\sqrt{n} + n.m)$$

Jadi didapat :

$$\lim_{n \to \infty} P\left(Z_1 . \sigma\sqrt{n} + n.m < Y_n < Z_2 . \sigma\sqrt{n} + n.m\right) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} e^{-\frac{Z^2}{2}} . dZ$$

atau :

$$P\left(u_1 < \mathrm{Un} < u_2 \right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} e^{-\frac{Z^2}{2}} . dZ$$

dengan : $u_1 = Z_1 . \sigma\sqrt{n} + n . m$

$u_2 = Z_2 . \sigma\sqrt{n} + n . m$

Theorema : Lindberg - Levy : 3.3.2.

Jika : $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ merupakan random variabel independent yang terdistribusi secara identik dengan momen kedua berhingga ($\sigma^2 \neq 0$), maka barisan fungsi distribusi random varian Z_n yaitu $\{ F_n(Z) \}$ diberikan sebagai :

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - n.m}{\sigma\sqrt{n}}$$; yang memenuhi persamaan :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(Z) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$; untuk setiap Z.

Bukti :

Diberikan $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - n.m}{\sigma\sqrt{n}}$

$$Z_n = \frac{X_1 - m + X_2 - m + \ldots\ldots\ldots + X_n - m}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n - (m + m + \ldots + m) \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} . \left[\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} m \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \text{ .... } (3.3.48).$$

Random variabel (X_k - m) mempunyai distribusi sama; sehingga mempunyai fungsi karakteristik $\emptyset_Z(t)$ yang sama pula; dengan definisi :

$$\emptyset_Z(t) = E\left[e^{it.Z_n}\right] = E\left[\exp .\left\{ it \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - m)}{\sigma\sqrt{n}} \right\}\right]$$

$$\emptyset_Z(t) = E\left[\exp .\left\{ \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \right\}\right] \text{...} (3.3.49)$$

karena random variabel X_k independent dengan k = 1,2, ...,
maka :

$$\emptyset_Z(t) = E\left[\exp . \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \left\{ (X_1 - m) + (X_2 - m) + \ldots + (X_n - m) \right\}\right]$$

$$= E\left[\exp . \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} . n (X_k - m)\right]$$

$$= E\left[\exp . \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} . (X_k - m)\right]^n$$

$$= \left[\emptyset_X \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n \text{ .... } (3.3.50).$$

Selanjutnya diassumpsikan terdapat momen pertama dan kedua sehingga didapat : $E\left[X_k - m\right] = 0$

$$\text{Var}\left[X_k - m\right] = \sigma^2$$

maka fungsi : $\emptyset_X(t)$ dapat diexpansikan dalam persekitaran di titik t = 0 menurut Max Laurin.

$$\phi_X(t) = E\left[e^{it(X_k-m)}\right]$$

$$= E\left[1 + it\,(X_k - m) + \frac{\{it\,(X_k - m)\}^2}{2!} + 0\,(t)^2\right]$$

$$= 1 + it\,E\left[X_k - m\right] - \frac{t^2}{2}\,E\left[X_k - m\right]^2 + 0\,(t^2)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2}\,.\,\sigma^2 + 0\,(t^2) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3.3.51).$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.3.51) kedalam persamaan (3.3.50) didapat :

$$\phi_Z(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$\phi_Z(t) = \left[1 - \frac{\sigma^2}{2}\,.\,\frac{t^2}{\sigma^2\,n} + 0\,.\,\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2\,n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3.3.52)$$

Untuk setiap t syarat (3.3.37) berlaku. Dengan mengambil logaritma kedua ruas dari persamaan (3.3.52) didapat

$$\ln\;\phi_Z(t) = \ln\left[1 - \frac{t^2}{2\,n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n$$

$$\ln\;\phi_Z(t) = n\,\ln\left[1 - \frac{t^2}{2\,n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]$$

$$\ln\;\phi_Z(t) = n\,\ln\,(1 + Z)$$

dengan $Z = \left(-\frac{t^2}{2\,n} + 0\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)$

Untuk Z sangat besar berlaku : $\ln\,(1 + Z) = Z$

Jadi $\ln \phi_Z(t) = n \ln (1 + Z) = n.Z = n \left(- \frac{t^2}{2\,n} + 0 \left(\frac{t^2}{n}\right)\right)$

$$\ln \phi_Z(t) = - \frac{t^2}{2} + n \ . \ 0 \left(\frac{t^2}{n}\right) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.3.53)$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Z(t) = \lim_{n \to \infty} \left[- \frac{t^2}{2} + n \ . \ 0 \left(\frac{t^2}{n}\right)\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Z(t) = - \frac{t^2}{2} + \lim_{n \to \infty} n \ . \ 0 \left(\frac{t^2}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Z(t) = - \frac{t^2}{2}$$

Sehingga : $\lim_{n \to \infty} \phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ .... (3.3.54)

Jadi fungsi karakteristik distribusi normal mempunyai mean 0 dan varian 1; sehingga dengan theorema : 3.1.1.

$$\lim_{n \to \infty} F_n(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{Z'^2}{2}} .dZ'. \ \ldots \ (3.3.55)$$

maka theorema terbukti.

Untuk mencari distribusi Y_n dapat digunakan theorema 3.1.1. sebagai berikut.

Diberikan : $Z_n = \frac{Y_n - n \ . \ m}{\sigma \sqrt{n}}$ .... (3.3.56)

misalkan : Z_1 dan Z_2 merupakan dua bilangan sebarang dengan - $Z_1 < Z_2$

maka :

$$\lim_{n \to \infty} F_n(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{Z'^2}{2}} \, dZ'$$

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_1 < Z_n < Z_2) = \lim_{n \to \infty} \left[F_n(Z_2) - F_n(Z_1) \right]$$

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_1 < Z_n < Z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} e^{-\frac{Z'^2}{2}} \, dZ' \qquad \text{............ (3.3.57)}$$

Dengan persamaan (3.3.56), maka ruas kiri dari persamaan(3.3.57) menjadi :

$$P(Z_1 < Z_n < Z_2) = P\left(Z_1 < \frac{Y_n - n.m}{\sigma\sqrt{n}} < Z_2\right)$$

$$P(Z_1 < Z_n < Z_2) = P(Z_1.\sigma\sqrt{n} + n.m < Y_n < Z_2.\sigma\sqrt{n} + n.m)$$

Sehingga didapat :

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_1.\sigma\sqrt{n} + n.m < Y_n < Z_2.\sigma\sqrt{n} + n.m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} e^{-\frac{Z'^2}{2}} \, dZ' \qquad \text{............. (3.3.58)}$$

yang dapat ditulis sebagai

$$P(y_1 < Y_n < y_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_1}^{Z_2} e^{-\frac{Z'^2}{2}} \, dZ'$$

dengan : $y_1 = Z_1.\sigma\sqrt{n} + n.m$

$y_2 = Z_2.\sigma\sqrt{n} + n.m$

Jadi random variabel Y_n mempunyai distribusi normal assimptotik dengan mean = n.m dan varian = n. σ^2

Akibatnya :

Misalkan random variabel : $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ indenpendent dan terdistribusi secara identik dengan standart deviasi $\neq 0$. Misalkan random variabel Y_n didefinisikan sebagai :

$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$; dan misalkan F_n (V) merupakan fungsi distribusi random variabel Vn yang didefinisikan sebagai

$$Vn = \frac{Y_n - E\left[Y_n\right]}{\sqrt{\operatorname{Var}\ Y_n}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.59)$$

Maka limit fungsi distribusi $F_n(V)$ merupakan distribusi normal.

Bukti :

Karena random variabel Y_n independent dan terdistribusi secara identik, maka didapat :

$$E\left[Y_n\right] = m$$

$$\operatorname{Var}\left[Y_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Sehingga $$Vn = \frac{Y_n - E\left[Y_n\right]}{\sqrt{\operatorname{Var}(Y_n)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$Vn = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n.\,m}{\frac{n\,.\,\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\,.\,m}{\sigma\,.\sqrt{n}}$$

$$= Z_n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.60).$$

pada hal barisan fungsi distribusi $\{ F_n(Z) \}$ memenuhi relasi

$$\lim_{n \to \infty} F_n(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{Z'^2}{2}} \quad dZ'$$

Maka barisan fungsi distribusi $\{ F_n(V) \}$ juga memenuhi relasi

$$\lim_{n \to \infty} F_n(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{V} e^{-\frac{V'^2}{2}} .dV' \;\ldots\ldots \quad (3.3.61)$$

Misal : V_1 dan V_2 merupakan bilangan sebarang dengan $V_1 < V_2$, maka didapat :

$$\lim_{n \to \infty} P\,(V_1 < V_n < V_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_1}^{V_2} e^{-\frac{V'^2}{2}} .\,dV' \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad (3.3.62)$$

dengan $P\,(V_1 < V_n < V_2) = P\,(V_1 < \frac{Y_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} < V_2)$

$$P\,(V_1 < V_n < V_2) = P\,(\,V_1 \,.\, \sigma/\sqrt{n} + m < Y_n < V_2 \,.\, \sigma/\sqrt{n} + m\,)$$

maka $P\,(v_1 < V_n < v_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V_1}^{V_2} e^{-\frac{v'^2}{2}} \quad dv'$

dengan kata lain, untuk n yang besar.

$$P(y_1 < Y_n < y_2) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{v'^2}{2}} \cdot dv'$$

dengan $y_1 = v_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m$

$y_2 = v_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m$

Contoh : 3.3.

Misalkan random variabel : $X_1, X_2 \ldots\ldots, X_n$ independent dan mempunyai distribusi uniform dengan

$f(x) = 1$ untuk x dalam interval $[0,1]$

$= 0$ untuk $x > 0$ dan $x < 1$

jika $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$. Hitunglah probabilitas bahwa Y_n akan lebih kecil 0,4 untuk n = 50.

Jawab :

Karena random variabel X_k independent dan terdistribusi secara identik, maka $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$

$$E[Y_n] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n} E[X_1 + X_2 \ldots + X_n]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[E[X_1] + E[X_2] + \ldots\ldots + E[X_n]\Big]$$

$$= \frac{1}{n}[m + m + \ldots\ldots\ldots + m]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot m$$

$$= m.$$

$$\mathrm{Var}[Y_n] = E[Y_n]^2 - \{E[Y_n]\}^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]^2 - \left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right\}^2$$

$$= E\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \; E\left[X_1^2 + X_2^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2\right]$$

$$\mathrm{Var}\left[Y_n\right] = \frac{1}{n^2}\left[E(X_1^2) + E(X_2^2) + \ldots + E(X_n^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots\ldots + \sigma^2\right]$$

$$= \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

Distribusi Y_n yaitu $V_n = \dfrac{Y_n - m}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}} = \dfrac{Y_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Jadi $P(v_1 < V_n < v_2) = P\left(v_1 < \dfrac{Y_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < v_2\right)$

$$= P\left(v_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m < Y_n < v_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + m\right)$$

$$= P\left(v_1 \cdot \frac{\sigma}{5\sqrt{2}} + m < Y_n < v_2 \cdot \frac{\sigma}{5\sqrt{2}} + m\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{v'^2}{2}} \, dv'$$

dengan : n = 50

$$y_1 = v_1 \cdot \frac{\sigma}{5\sqrt{2}} + m$$

$$y_2 = v_2 \cdot \frac{}{5\sqrt{2}} + m$$

maka $P(y_1 < y_n < y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{v'^2}{2}} dv'$;

hingga probabilitas lebih kecil dari 0,4 untuk n = 50 dengan

$f(x) = 1$ untuk x dalam interval $[0,1]$

$= 0$ untuk $x > 0$ dan $x < 1$.

adalah : $P(0 < Y_n < 0{,}4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{v'^2}{2}} .dv'$

Tampak bahwa mean arit metic n random variabel independent dan terdistribusi secara identik mempunyai suatu distribusi normal asimptetik bila momen keduanya ada.

Contoh : 3.4.

Jika $\{ X_k \}$ merupakan barisan random variabel X_k yang independent dan mempunyai distribusi Cauchy dengan $k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

Di tanyakan : Fungsi karakteristik dari distribusi Cauchy?

jawab :

$$f(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)} \quad ; \quad -\infty < X < \infty$$

Fungsi karakteristik dari random variabel X_k yaitu $\phi_x(t)$ dengan $-\infty < t < \infty$

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \cdot f(x)\, dx$$

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \cdot \frac{1}{\pi (1 + x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)}\, dx$$

sedangkan $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \cdot \frac{1}{(1 + x^2)}\, dx = 2 \pi i \sum R^+$

dengan $\sum R^+$: jumlah semua residu dari f(x) di semua kutub nya yang terletak di setengah bidang atas.

Kutub-kutub dari $f(Z) = \dfrac{1}{(1 + Z^2)}$ adalah $Z_1 = i$ dan $Z = -i$

keduanya merupakan kutub tingkat satu

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itX}}{(1 + x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi} \left(2 \pi i \ \text{Res} \ \frac{e^{itZ}}{(1 + Z^2)} \ ; \ Z = i \right)$$

$$= \lim_{Z \to i} 2i\, (Z - i) \cdot \frac{e^{itZ}}{(Z+i)(Z-i)}$$

$$= 2i \ \frac{e^{iti}}{2i}$$

$$= e^{-t}$$

karena $-\infty < t < \infty$ berarti $|t| < \infty$

jadi : $$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itX}}{(1+x^2)}\,dx = e^{-|t|}$$

Kesimpulan :

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itX}}{(1+x^2)}\,dx = e^{-|t|}$$

Ini berarti fungsi karakteristik random variabel $X_k = e^{-|t|}$ dan akibatnya fungsi karakteristik random variabel Y_n dengan

$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ adalah

$$\phi_{Yn}(t) = \phi_{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \phi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}\left(\frac{t}{n}\right)$$

karena untuk fungsi karakteristik berlaku : $\phi_{aX}(t) = \phi_X(at)$

$$\phi_{Yn}(t) = \phi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$\phi_{Yn}(t) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{Xk}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$\phi_{Yn}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\left|\frac{t}{n}\right|} = e^{-\left|\frac{t}{n}\right|} \cdot e^{-\left|\frac{t}{n}\right|} \ldots\ldots e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}$$

$$\phi_{Yn}(t) = \left[e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\right]^n = e^{-|t|}$$

Ini menunjukkan bahwa random variabel X_k tidak mempunyai distribusi normal asymtotik, demikian pula untuk random variabel Y_n; karena momen pertama yaitu :

$$E\left[Y_n\right] = \frac{d}{dt}\,\phi_{Yn}(t)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\,e^{-|t|}\Big]_{t=0}$$

dan momen kedua : $E\left[Y_n^2 \right] = \frac{d^2}{dt^2} \phi_{Yn}(t) \Big]_{t=0}$

$$E\left[Y_n^2 \right] = \frac{d^2}{dt^2} e^{-|t|} \Big]_{t=0}$$

semuanya tidak ada.