BAB II

MODEL KONVERGENSI

Dalam mempelajari theorema limit, kita mengenal konsep konvergensi.

Definisi : 2.1.:

Misal dipunyai suatu barisan dari bilangan-bilangan riil atau kompleks : X_1, X_2 ... , X_n, ... yang tak berhingga, maka barisan $\{X_n\}$ konvergen terhadap suatu limit A bila untuk setiap bilangan positif ε sebarang dapat ditemukan suatu bilangan positif - n_o sedemikian hingga untuk $n > n_o$ terdapatlah :

$$|X_n - A| < \varepsilon \quad \text{untuk setiap } n > n_o \text{ .... } (2.1.1)$$

Definisi ini secara langsung dapat diterapkan dalam bentuk barisan random variabel; sebab untuk barisan random variabel $\{X_n\}$ konvergen terhadap random variabel X. Selanjutnya didalam teori prababilitas terdapat 3 buah model konvergensi :

1. Konvergen dalam prababilitas.
2. Konvergen dalam distribusi.
3. Konvergen hampir pasti.

II.1. KONVERGEN DALAM PROBABILITAS

Misal, X_1, X_2, ... , X_n ..... merupakan suatu barisan random variabel. Diandaikan bahwa kumpulan variabel-berhingga mempunyai suatu distribusi berserikat.

Definisi : 2.2.

Barisan random-variabel $\{X_n\}$ dikatakan konvergen dalam probabilitas ke random-variabel X, bila untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \qquad (2.1.2)$$

atau bisa ditulis sebagai : $X_n \xrightarrow{P} X$.

Konvergen dalam probabilitas mempunyai sifat konvergensi Cauchy. Jika $\{X_n\}$ suatu barisan random-variabel sedemikian hingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ terdapat suatu n_o sehingga :

$$P(|X_n - X_m| > \varepsilon) < \eta \qquad (2.1.3)$$

Untuk setiap n, m $\geqslant n_o$, maka terdapat suatu random variabel X yang berdistribusi berserikat dengan X_n sedemikian hingga :

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \text{ konvergen ke } 0; \text{ untuk setiap } \varepsilon > 0$$

Jadi barisan $\{X_n\}$ konvergen ke X dalam probabilitas tidaklah berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu n_o yang berhingga sedemikian hingga untuk setiap $n > n_o$ hubungan : $|X_n(w) - X(w)| < \varepsilon$ akan dipenuhi untuk setiap $w \in \Omega$.

Dari definisi konvergen dalam probabilitas, yang berlaku hanya probabilitas dari event $\{|X_n - X| > \varepsilon\}$ mendekati nol untuk $n \to \infty$, maka barisan random-variabel $\{X_n\}$ konvergen stokastik ke nol, bila untuk setiap $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0 \qquad (2.1.4)$$

Contoh : 2.1.

Jika X_n ; n = 1, 2, ... merupakan random variabel terbatas hingga $|X_n| \leqslant c$, maka syarat perlu dan

Cukup bahwa X_n akan konvergen dalam probabilitas ke nol yaitu dipenuhi hubungan.

$$\lim_{n \to \infty} E(|X_n|) = 0$$

Bukti :

Syarat perlu.

Dengan menggunakan pertidaksamaan Markov untuk random variabel $|X_n|$, dipunyai : $P(|X_n| > \varepsilon) \leqslant \frac{E[X_n]}{\varepsilon}$; oleh karena barisan random-variabel $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke - nol, bila $E[X_n] = 0$, maka :

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n| > \varepsilon) \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{E[X_n]}{\varepsilon}$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n| > \varepsilon) \leqslant 0$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$$

Syarat cukup.

Misal $A_n(\delta)$ merupakan event $|X_n| > \delta$; dengan $\delta > 0$ maka di dapat :

$$E(|X_n|) = E(|X_n| \,|\, A_n(\delta)).\ P(A_n(\delta)) + E(|X_n| \,|\, \overline{A_n}(\delta)).\ P(\overline{A_n}(\delta))$$

$$= E\left(\frac{c \cap \delta}{\delta}\right).\ P(A_n(\delta)) + E\left[\frac{c \cap |X_n| \leqslant \delta}{|X_n| \leqslant \delta}\right] P(\overline{A_n}(\delta))$$

$$= E(c).\ P(A_n(\delta)) + E(\delta).\ (1 - P(A_n(\delta)))$$

$$E(|X_n|) = c.\ P(A_n(\delta)) + \delta.(1 - P(A_n(\delta)))$$

$$\lim_{N\to\infty} E(|X_n|) = \lim_{n\to\infty} c \cdot P(A_n(\delta)) + \lim_{n\to\infty} \delta \cdot (1-P(A_n(\delta)))$$

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) \leqslant c \cdot \lim_{n\to\infty} P(A_n(\delta)) + \delta \cdot \lim_{n\to\infty}$$

$$(1 - P(A_n(\delta))) \quad .$$

dengan assumsi : $\lim_{n\to\infty} P(A_n(\delta)) = 0$, maka

$\limsup_{n\to\infty} E(|X_n|) \leqslant \delta$; karena δ dapat se-kecil²nya se - hingga

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = 0$$

Theorema : 2.1.1.

Misal : $f(x)$ merupakan fungsi kontinu dari x dalam - $(-\infty, \infty)$ dan barisan random variabel $\{X_n\}$ konvergen dalam probabilitas ke X, maka barisan $\{f(X_n)\}$ konvergen ke $f(x)$

Bukti :

Untuk ε sebarang > 0 dipilih suatu bilangan η sedemiki an hingga $P(|X_n| > \eta) < \frac{\varepsilon}{2}$ .... (2.1.5)

Kemudian ditentukan 3 himpunan A; B dan C sedemikian hingga :

A : event dimana $|X_n| \leqslant \eta$

B : event dimana $|X_n - X| < \delta(\varepsilon, \eta)$

C : event dimana $|f(X_n) - f(X)| < \varepsilon$

dengan $\delta(\varepsilon, \eta)$ merupakan fungsi sebarang, maka jelaslah - bahwa $C' \subset A' \cup B'$. Karena $B \subset A$, maka $P(B) \leqslant P(A)$ sedemi kian hingga didapat $P(C') \leqslant P(A') + P(B')$ atau

$$P(|f(X_n) - f(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|X_n| > \eta) +$$

$$P(|X_n - X| \geqslant \delta(\varepsilon, \eta)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.1.6)$$

Karena $\{ X_n \}$ konvergen dalam probabilitas ke X, terdapatlah suatu bilangan bulat positif N yang merupakan fungsi dari ε , δ dan η sedemikian hingga untuk $n > N$

$$P (| X_n - X | \geq \delta(\varepsilon , \eta)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad .... \qquad (2.1.7)$$

Dari persamaan (2.1.5) dan (2.1.7), maka persamaan (2.1.6) menjadi :

$$P (| f(X_n) - f(X) | \geq \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P (| f(X_n) - f(X) | \geq \varepsilon) < \varepsilon$$

dengan kata lain : $f(X_n)$ konvergen dalam probabilitas ke - $f(X)$.

Contoh : 2.2.

Misal $\underset{n \to \infty}{\text{limit}} X_n \xrightarrow{P} c$ dan $f(x)$ merupakan suatu fungsi yang terbatas dan kontinu dititik c, maka $\underset{n \to \infty}{\text{limit}} E[f(X_n)] = f(c)$.

Bukti :

Karena barisan random variabel $\{ X_n \}$ konvergen dalam probabilitas ke c, maka dengan menggunakan theorema 2.1.1. - didapat

$$\underset{n \to \infty}{\text{limit}} \left[f(X_n) - f(c)\right] = 0; \text{ jika } X_n \xrightarrow{P} 0 \text{ syarat}$$

perlu dan cukup adalah $\underset{n \to \infty}{\text{limit}} E(X_n) = 0$, maka berlaku

$$\underset{n \to \infty}{\text{limit}} E\left[f(X_n) - f(c)\right] = 0$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{limit}} E\left[f(X_n)\right] = \underset{n \to \infty}{\text{limit}} E\left[f(c)\right]$$

$$\underset{n \to \infty}{\text{limit}} E\left[f(X_n)\right] = f(c)$$

dengan kata lain : $E\left[f(X_n)\right] = f(c)$

II.2. KONVERGEN DALAM DISTRIBUSI

Definisi : 2.3.

Fungsi-fungsi distribusi X_n dan X yaitu $F_n(x)$ dan $F(x)$ dikatakan konvergen dalam fungsi distribusi, jika - $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ untuk $n \longrightarrow \infty$ disetiap titik kontinyu - dari $F(x)$, maka dikatakan suatu barisan konvergen yang lemah terhadap suatu fungsi distribusi $F(x)$.

Definisi : 2.4.

Fungsi-fungsi X_n dan X yaitu $F_n(x)$ dan $F(x)$ dikatakan bahwa suatu barisan $\{ F_n(x) \}$ konvergen lengkap terhadap suatu fungsi $F(x)$ bila $F_n(x)$ konvergen lemah ke $F(x)$ dan jika $F(x)$ merupakan suatu fungsi distribusi yang memenuhi syarat $F(+\infty) = 1$ dan $F(-\infty) = 0$.

Theorema : 2.2.2.

Bila barisan $\{ X_n \}$ konvergen dalam probabilitas ke- X, fungsi distribusi $F_n(x)$ dari X_n mendekati fungsi distribusi $F(x)$ dari X di setiap titik kontinu distribusi $F(x)$.

Bukti :

Misal : A_n event dari $| X_n - X | < \varepsilon$ didapat

$$P[X_n < x] = P[X_n \;\; x \mid A_n] . P(A_n) + P[X_n \;\; x \mid \overline{A_n}] . P(\overline{A_n}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.2.8)$$

karena $\{ X_n \}$ konvergen dalam probabilitas ke X, maka berlaku :

$\lim_{n \to \infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] = 0$, (definisi 2.2) ini berarti

$\lim_{n \to \infty} P(\overline{A_n}) = 0$; sedang $P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n})$ hingga

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - P(\overline{A_n})\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) = 1$$

$$P\left[X_n < x\right] = P\left[X_n < x \mid A_n\right].1 + \frac{P\left[X_n < x \cap |X_n - X| \geqslant \varepsilon\right]}{P\left[|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right]}.P(\overline{A_n})$$

$$P\left[X_n < x\right] = P\left[X_n < x \mid A_n\right] + \frac{P\left[|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right]}{P\left[|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right]}.\ P(\overline{A_n})$$

$$P\left[X_n < x\right] = P\left[X_n < x \mid A_n\right] + P(\overline{A_n}) \text{.... } (2.2.9)$$

Tetapi $P\left[X_n < x \mid A_n\right] \leqslant P\left[X_n < x + \varepsilon \mid A_n\right] = \dfrac{P\left[X_n < x+\varepsilon \cap |X_n - X| < \varepsilon\right]}{P(A_n)}$

$$P\left[X_n < x \mid A_n\right] \leqslant \frac{P\left[X < x + \varepsilon\right]}{P(A_n)} \text{.............. } (2.2.10)$$

sehingga : $\lim_{n\to\infty} P\left[X_n < x \mid A_n\right] \leqslant \lim_{n\to\infty} \dfrac{P\left[X < x + \varepsilon\right]}{P(A_n)}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[X_n < x \mid A_n\right] \leqslant \frac{P\left[X < x + \varepsilon\right]}{\lim_{n\to\infty} P(A_n)}$$

Dari persamaan (2.2.9) dan (2.2.10) didapat

$$\lim_{n\to\infty} P\left[X_n < x\right] \leqslant \frac{P\left[X < x + \varepsilon\right]}{\lim_{n\to\infty} P(A_n)} + \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n})$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[X_n < x\right] \leqslant P\left[X < x + \varepsilon\right] \text{ untuk setiap } \varepsilon > 0 \text{..(2.2.11)}$$

Terbukti bahwa $F_n(x)$ mendekati $F(x)$ dari kanan.

Dari persamaan (2.2.8)

$$P\left[X_n < x\right] = P\left[X_n < x \mid A_n\right] .P(A_n) + P\left[X_n < x \mid \overline{A_n}\right] . P(\overline{A_n})$$

karena $\lim_{n \to \infty} P(\overline{A_n}) = 0$; didapat

$$P[X_n < x] = P[X_n < x \mid A_n] \cdot P(\overline{A_n})$$

$$P[X_n < x] = \frac{P[X_n < x \cap |X_n - X| < \varepsilon] \cdot P(A_n)}{P(A_n)}$$

$$P[X_n < x] = P[X < x]$$

$$P[X_n < x] \geqslant P[X < x - \varepsilon] - P(\overline{A_n}) \quad \ldots\ldots\ (2.2.12)$$

$$\lim_{n \to \infty} P[X_n < x] \geqslant \lim_{n \to \infty} P[X < x - \varepsilon] - \lim_{n \to \infty} P(\overline{A_n})$$

$$\lim_{n \to \infty} P[X_n < x] \geqslant P[X < x - \varepsilon] \text{ untuk setiap } \varepsilon > 0 \quad \ldots\ldots\ (2.2.13)$$

Terbukti bahwa $F_n(x)$ mendekati $F(x)$ dari kiri

Dari persamaan (2.2.11) dan (2.2.13) terbukti bahwa $F_n(x)$ mendekati $F(x)$; karena ε dapat dipilih sebarang kecil, maka persamaan (2.2.11) dan (2.2.13) merupakan suatu pernyataan theorema (2.2.2) yaitu :

$$\lim_{n \to \infty} P[X_n < x] = P[X < x]$$

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

Jadi konvergen dalam probabilitas mengakibatkan konvergen dalam distribusi; sedangkan sebaliknya tidak. Sebab X_n dapat independent dan terdistribusi secara identik. Untuk ini misalkan $P[|X_n - X| \leqslant \varepsilon]$; bila X merupakan distribusi random variabel yang terdistribusi secara identik pada setiap X_n; maka

$$P(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot f(x+y)\, dx\, dy \quad \ldots\ldots\ldots\ (2.2.14)$$

dengan $f(\ .\ )$ merupakan fungsi density dari x dan x_n. untuk setiap ε kecil sebarang > 0

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x + y)\ dy = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u)\ du$$

dengan : $u = x + y$

$du = dy$

Misal : $\int f(u)\ du = F(u) + c$, maka $F'(u) = f(u)$

$$\text{Jadi } \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u)\ du = F(u)\Big]_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} = F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)$$

dengan theorema harga rata-rata yaitu :

$$f(a + h) - f(a) = h.f'(a + \theta h)\ , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

maka $F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) \approx 2\varepsilon .\ F'(x - \varepsilon + \tfrac{1}{2} .\ 2\varepsilon)$ dengan $\theta = \tfrac{1}{2}$

$$F(x + \varepsilon) - F(x) \approx 2\varepsilon .\ F'(x)$$
$$\approx 2\varepsilon .\ f(x)$$

hingga bentuk ruas kanan dari persamaan (2.2.14) dapat didekatkan pada

$$P(\ |X_n - X| \leqslant \varepsilon) \approx \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x).\ f(x + y)\ dy\ dx$$
$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ .\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x + y)\ dy\ dx$$
$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ .\ 2\varepsilon\ .\ f(x)\ dx$$

$$P(\ |X_n - X| \leqslant \varepsilon) \approx 2\varepsilon \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\ dx \ \ldots.\ (2.2.15)$$

dan $P(\ |X_n - X| > \varepsilon) \approx 1 - P(\ |X_n - X| \leqslant \varepsilon)$

$$\approx 1 - 2\varepsilon .\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\ dx$$

Jadi $\{ X_n \}$ tidak konvergen dalam probabilitas ke X

II.3. KONVERGEN HAMPIR PASTI.

Barisan $\{ X_n \}$ konvergen hampir pasti (almost certain / a.c) terhadap X untuk $n \rightarrow \infty$ terdapat probabilitas p = 1 yang membuat setiap barisan x_n akan konvergen ke x. Kriteria ini merupakan kriteria konvergensi yang lebih kuat, yang berguna dalam theori theorema limit probabilitas yang dikenal sebagai - " hukum bilangan besar ". Kriteria ini equivalen dengan syarat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P (\sup_{m > n} | X_n - X | > \varepsilon) \longrightarrow 0 \; ..... \qquad (2.3.16)$$

dengan perkataan lain, untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P (| X_n - X | > \varepsilon \text{ untuk } m > n) = 0 \; .... \qquad (2.3.17)$$

Syarat equivalen ini tidak tergantung secara explisit pada X untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} P (| X_m - X_n | > \varepsilon) \longrightarrow 0 \; .... \qquad (2.3.18)$$

Ini disebut konvergen yang setara dalam probabilitas, secara simbol dapat di tulis sebagai : $X_n \xrightarrow{a.c} X$. Tampak bahwa pada persamaan (2.3.16) equivalent dengan

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) = X(w) \right] = 1 \quad \text{untuk setiap } w \in \Omega$$

dengan Ω merupakan ruang sampel sebarang.

Theorema : 2.3.3.

Misalkan $F_n(x)$; n = 1,2, ... merupakan fungsi distribusi dari random-variabel X_n.

Barisan $\{X_n\}$ konvergen stokastik ke nol bhb barisan $\{F_n(x)\}$ memenuhi hubungan.

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0 & \text{untuk } x \leq 0 \\ \qquad\quad\; = 1 & \text{untuk } x > 0\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (2.3.19)$$

Bukti ($\Longrightarrow$)

Jika barisan $\{X_n\}$ konvergen stokastik ke 0, maka setiap $\varepsilon > 0$ terdapat : $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$ .... (2.3.20)

Dari persamaan (2.3.20) yaitu $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \to \infty$ didapat : $|X_n| > \varepsilon$ bhb $X_n < -\varepsilon$ atau $X_n > \varepsilon$

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n < -\varepsilon) + P(X_n > \varepsilon)$$

$$P(X_n < x) = F_n(x)$$

untuk $x = -\varepsilon < 0$, maka $P(X_n < -\varepsilon) = F_n(-\varepsilon)$.. (2.3.21)

dan $P(X_n > \varepsilon) = 1 - P(X_n \leq \varepsilon)$

$$P(X_n > \varepsilon) = 1 - P(X_n < \varepsilon) + P(X_n = \varepsilon)$$

$$P(X_n > \varepsilon) = 1 - F_n(\varepsilon) - P(X_n = \varepsilon) \longrightarrow 0 \ \ldots \quad (2.3.22)$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat ε_1 sedemikian hingga $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, selanjutnya dari hubungan persamaan (2.3.20) untuk $\varepsilon > 0$ didapat $P(X_n = \varepsilon) \longrightarrow 0$; maka persamaan(2.3.22) didapat

$$1 - F_n(\varepsilon) \longrightarrow 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.3.22)$$

Selanjutnya dengan mengganti ε dengan $-x$ pada persamaan (2.3.21) dan mengganti ε dengan x pada persamaan (2.3.23) di mana $x > 0$ didapat persamaan (2.3.19) sehingga ($\Longrightarrow$) terbukti

Sekarang jika persamaan : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0 \text{ untuk } x \leqslant 0 \\ \phantom{\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)} = 1 \text{ untuk } x > 0\end{array}\right\}$ terpenuhi.

maka harus dibuktikan bahwa : $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$

Bukti : ($\Longleftarrow$)

$$P(X_n < -\varepsilon) = F_n(-\varepsilon) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n < -\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} F_n(-\varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} P(X_n \geqslant \varepsilon)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 - P(X_n < \varepsilon)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) \leqslant 1 - \lim_{n\to\infty} P(X_n < \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) \leqslant 1 - \lim_{n\to\infty} F_n(\varepsilon) = 1 - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.24)$$

Maka $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$

Karena ($\Longleftarrow$) terpenuhi, maka theorema terbukti.

Catatan.

Random-variabel X dipilih sedemikian hingga $P(X = 0) = 0$ mempunyai distribusi : $\left.\begin{array}{l}F(x) = 0 \text{ untuk } x \leqslant 0 \\ = 1 \text{ untuk } x > 0\end{array}\right\}$

dan fungsi distribusi ini kontinu pada setiap titik $x \neq 0$. Dari persamaan (2.3.21) dan (2.3.23) tampak bahwa setiap titik $x \neq 0$ barisan distribusi $F_n(x)$ konvergen ke fungsi distribusi $F(x)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan fungsi distribusi random variabel $F_n(x)$ konvergen stokastik ke 0

Theorema : 2.3.4. (Tanpa bukti)

Barisan random variabel $\{ X_n \}$ konvergen secara stokastik ke 0 bhb barisan fungsi distribusi random variabel $F_n(x)$ konvergen ke fungsi distribusi random variabel $F(x)$ pada setiap titik kontinu dari fungsi distribusi $F(x)$.

Theorema : 2.3.5.

Jika barisan suatu fungsi distribusi random variabel: $X_1, X_2, X_n, \ldots\ldots$ yang bernilai integralnya positif konvergen ke suatu distribusi probabilitas sehingga jika : $\lim_{n \to \infty}$

$$P_{nk} = P_k \ ; \ (k = 0, 1, 2 \ldots\ldots) \qquad (2.3.25)$$

$$\text{dan} \quad \sum_{k=0}^{n} P_k = 1 \qquad (2.3.26)$$

benar untuk $P_{nk} = P(X_n = k)$; $k = 0,1,2,$ ....(2.3.27)

maka fungsi generator dari X_n

$$G_n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} \cdot u^k \qquad (2.3.28)$$

konvergen ke fungsi generator dari distribusi $\{ P_k \}$

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot u^k \qquad (2.3.29)$$

dalam lingkaran satuan yang tertutup.

Sebaliknya :

Jika barisan $G_n(u)$ mendekati suatu limit $G(u)$ untuk setiap u dimana $|u| \leqslant 1$, maka persamaan (2.3.25) dan (2.3.26) berlaku yaitu $G(u)$ merupakan fungsi generator dis-

tribusi $\{P_k\}$ dan dis -
tribusi $\{P_{nk}\}$ konvergen ke distribusi $\{P_k\}$

Bukti :

$$\lim_{n\to\infty} P_{nk} = P_k \text{ dan } \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} G_n(u) = G(u) \text{ untuk } |u| \leqslant 1$$

$(\Longrightarrow)$

$$\text{Jika } \lim_{n\to\infty} P_{nk} = P_k \text{ dan } \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} G_n(u) = G(u) \quad \ldots\ldots (2.3.30)$$

Misal : $\varepsilon > 0$, dipilih N sedemikian hingga

$$\sum_{k=N}^{\infty} P_k < \frac{\varepsilon}{4} \quad \ldots\ldots (2.3.31)$$

dimana P_k memenuhi persamaan (2.3.25) dan persamaan(2.3.26)
Dipilih bilangan lain n yang cukup besar hingga berlaku.

$$|P_{nk} - P_k| < \frac{\varepsilon}{4N} \; ; \; (k = 0,1,2,\ldots, N-1)\ldots(2.3.32)$$

yang merupakan sebagai akibat dari persamaan (2.3.25), karena $\sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} = 1$; berikutnya dari persamaan (2.3.31) dan (2.3.32) untuk n yang sangat besar, maka

$$|P_{nk} - P_k| < \frac{\varepsilon}{4N} \text{ bhb } -\frac{\varepsilon}{4N} < P_{nk} - P_k < \frac{\varepsilon}{4N}$$

$$|P_{nk} - P_k| < \frac{\varepsilon}{4N} \text{ bhb } P_k - \frac{\varepsilon}{4N} < P_{nk} < P_k + \frac{\varepsilon}{4N}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_{nk} \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left(P_k - \frac{\varepsilon}{4N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{4N}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_{nk} \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} P_k - \frac{\varepsilon}{4N} \cdot N = \sum_{k=0}^{N-1} P_k - \frac{\varepsilon}{4} \quad \cdot (-1)$$

$$-\sum_{k=0}^{N-1} P_{nk} \leqslant -\sum_{k=0}^{N-1} P_k + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_{nk} \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{N-1} P_k + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} - \sum_{k=0}^{N-1} P_{nk} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P_k - \sum_{k=0}^{N-1} P_k + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} P_{nk} \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} P_k + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\therefore \sum_{k=N}^{\infty} P_{nk} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\therefore \sum_{k=N}^{\infty} P_{nk} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.33).$$

Dengan menggunakan persamaan (2.3.31), (2.3.32) & (2.3.33).

Tanpak bahwa :

$$\left| G(u) - G_n(u) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left| P_k - P_{nk} \right| + \sum_{k=N}^{\infty} P_k + \sum_{k=N}^{\infty} P_{nk}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant \varepsilon$$

Jadi $\lim_{n \to \infty} \left[\, |G_n(u) - G(u)| \leq \varepsilon \, \right] = 0$

$$\lim_{n \to \infty} G_n(u) = G(u) \text{ untuk } |u| \leq 1$$

$(\Longleftarrow)$ jika $\lim_{n \to \infty} G_n(u) = G(u) \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P_{nk} = P_k$ dan

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

Dari assumsi : $\lim_{n \to \infty} G_n(u) = G(u)$ untuk $|u| \leq 1$ dan

$$|G_n(u)| \leq G_n(1) = 1$$

untuk $|u| \leq 1$; $n = 1,2,3,$ ....(2.3.34)

Dari persamaan (2.3.34) berlaku bahwa $G(u)$ tetap untuk $|u| < 1$ dan $G_n(u)$ konvergen uniform ke $G(u)$ dalam lingkaran tertutup $|u| \leq r < 1$.

Dengan menyatakan $G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot u^k$ dan menuliskan τ untuk lingkaran.

$|u| = r < 1$ didapat :

$$\int_{\tau} \frac{G_n(u)}{u^{k+1}} \, du = 2 \pi i \sum R_{\tau}$$

$$\int_{\tau} \frac{G_n(u)}{u^{k+1}} \, du = 2 \pi i \cdot P_{nk}$$

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_{\tau} \frac{G_n(u)}{u^{k+1}} \, du = P_{nk}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 \pi i} \int_{\tau} \frac{G_n(u)}{u^{k+1}} \, du = \lim_{n \to \infty} P_{nk}$$

$$P_k = \lim_{n \to \infty} P_{nk}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} P_{nk} = P_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.3.35)$$

Dengan demikian persamaan (2.3.25) berlaku :

$$G(u) = \lim_{n \to \infty} G_n(u)$$

$$G(1) = \lim_{n \to \infty} G_n(1) = 1$$

Jadi :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot 1^k = 1$$

$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$; maka didapat pula persamaan (2.3.26), sehingga theorema terbukti.

Catatan :

Barisan fungsi-fungsi generator konvergen ke suatu limit fungsi distribusi $\{ P_k \}$ memberikan persamaan (2.3.25) dan (2.3.26) berlaku jika persamaan (2.3.25) berlaku, sedangkan persamaan (2.3.26) tidak berlaku, maka $\lim_{n \to \infty} G_n(u)$ berlaku hanya dalam interior lingkaran satuan ($|U| < 1$)

Contoh : 2.3

Dengan menggunakan theorema : 2.3.5 buktikan bahwa distribusi binomial konvergen ke suatu distribusi poisson bila n mendekati tak hingga.

Bukti :

Jika P kecil dan n sangat besar berlaku $n.P = \lambda$. Jika $G_n(u)$ merupakan fungsi generator distribusi binomial, maka.

$$G_n(u) = (q + P.u)^n \quad \text{dengan } P + q = 1, \text{ maka } q = 1 - P$$

$$G_n(u) = (1 - P + P.u)^n = (1 + P(u-1))^n$$

karena : $n.P = \lambda$, maka $P = \frac{\lambda}{n}$; sehingga didapat

$$G_n(u) = \left[1 + \frac{\lambda}{n}(u-1)\right]^n = \left[1 + \lambda\frac{(u-1)}{n}\right]^n$$

$$G_n(u) = \left[1 + \frac{\lambda(u-1)}{n}\right]^{\frac{n}{\lambda(u-1)}\,\lambda(u-1)}$$

Misal : $\frac{n}{\lambda(u-1)} = W$

$$\therefore \; G_n(u) = \left[\left(1 + \frac{1}{W}\right)^W\right]^{\lambda(u-1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} G_n(u) = \lim_{W \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{W}\right)^W\right]^{\lambda(u-1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} G_n(u) = e^{\lambda(u-1)}$$

karena : $e^{\lambda(u-1)}$ merupakan fungsi generator dari distribusi poisson, dengan theorema : 2.3.5 disimpulkan bahwa distribusi binomial konvergen ke distribusi poisson untuk n - yang besar.

II.4. HUKUM BILANGAN BESAR

Theorema : Berneolli : 2.4.6

Dalam sejumlah experimen yang independen, frekwensi relatif event A mendekati secara stokastik probabilitas P (A)-

dari A bila jumlah dari experimen mendekati tak terhingga.

Bukti :

Misal $X_n = \frac{k}{n}$ merupakan frekwensi relatif event A dalam sejumlah experimen, dengan mean = n.p dan varian = n.p.q. sebagai akibat dari pertidaksamaan Chebyshev didapat

$$P\left[(k - n.P)^2 \geq \lambda . \sqrt{n.\ P.\ q}\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P\left[(n.X_n - n.P)^2 \geq \lambda . \sqrt{n.\ P.\ q}\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P\left[n.|X_n - P| \geq \lambda . \sqrt{n.\ P.\ q}\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P\left[|X_n - P| \geq \lambda . \frac{\sqrt{n.\ P.\ q}}{n}\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P\left[|X_n - P| \geq \lambda . \sqrt{\frac{n.\ P.\ q}{n^2}}\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P\left[|X_n - P| \geq \lambda . \left(\frac{P\ .\ q}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4.36)$$

bila diambil $\lambda = \varepsilon \left(\frac{n}{P.q} \right)^{\frac{1}{2}}$ .... (2.4.37)

maka persamaan (2.4.36) menjadi

$$P\left[|X_n - P| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \frac{n}{P.q}}$$

$$P\left[|X_n - P| > \varepsilon\right] \leq \frac{P\ .\ q}{n\ .\ \varepsilon^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4.38)$$

Selanjutnya bila n mendekati ∞ , maka

$$P\left[|X_n - P| > \varepsilon\right] = 0 \quad \text{Terbukti.}$$

Hukum ini dapat diinterpretasikan sebagai berikut; bila dilakukan n experimen sesuai aturan Berneolli dengan probabilitas event A = P, maka hukum bilangan besar menyatakan bah wa untuk nilai besar n probabilitas frekwensi relatif event A akan berbeda kecil dari P dan mendekati 0.

Theorema : Chebyshev : 2.4.7.

Jika : X_1, X_2 ......, X_n merupakan suatu barisan pasangan random variabel independent dengan varian berhingga yang dibatasi oleh konstanta yang sama sedemikian hingga : $\sigma^2 X_1 \leq C$; $\sigma^2 X_2 \leq C$, ... $\sigma^2 X_n \leq C$, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, berlaku

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\,|Y_n - P| < \varepsilon\,\right] = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4.39)$$

$$\text{dengan } Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n} \quad \text{dan} \quad P = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4.40)$$

Bukti :

$$\text{Var } Y_n = E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]^2 - \left[E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right]^2 \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4.41)$$

$$\text{Var } Y_n = \frac{1}{n^2}\left\{ E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]^2 - \left(E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right)^2\right\}$$

$$\text{Var } Y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{ E[X_k]^2 - (E[X_k])^2\right\}$$

$$\text{Var } Y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \text{Var } X_k$$

Akibatnya :

$$\text{Var } Y_n = \frac{1}{n^2}\left\{ \text{Var } X_1 + \text{Var } X_2 + \ldots\ldots + \text{Var } X_n\right\}$$

$$\text{Var } Y_n \leqslant \frac{1}{n^2}\left\{\sigma^2 X_1 + \sigma^2 X_2 + \cdots\cdots + \sigma^2 X_n\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}\left\{ C + C + \cdots\cdots\cdots\cdots + C \right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}\left\{ n \cdot C \right\}$$

$$\text{Var } Y_n \leqslant \frac{C}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.4.42)$$

Menurut pertidaksamaan Chebyshev

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\right]\right| < \varepsilon\right] \geqslant 1 - \frac{\text{Var } Y_n}{\varepsilon^2}$$

$$P\left[\,\left| Y_n - P \right| < \varepsilon\right] \geqslant 1 - \frac{\frac{C}{n}}{\varepsilon^2}$$

$$P\left[\,\left| Y_n - P \right| < \varepsilon\right] \geqslant 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.4.43)$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\,\left| Y_n - P \right| < \varepsilon\right] \geqslant \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2} \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\,\left| Y_n - P \right| < \varepsilon\right] \geqslant 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.4.44)$$

Karena probabilitas tidak melebihi 1, maka persamaan (2.4.44) menjadi :

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\,\left| Y_n - P \right| < \varepsilon\right] = 1$$

Akibatnya :

Jika suatu barisan pasangan random-variabel independent $X_1, X_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, X_n$ dengan $E\left[X_1\right] = E\left[X_2\right] = \cdots = E\left[X_n\right] = L$ dan $\sigma^2 X_1 \leqslant C$; $\sigma^2 X_2 \leqslant C, \cdots \sigma^2 X_k \leqslant C$

maka untuk $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n \to \infty} P(|Y_n - L| < \varepsilon) = 1$.. (2.4.45)

Ini menunjukkan bahwa, menurut hukum bilangan besar untuk n yang sangat besar dengan suatu probabilitas mendekati 1 bisa didapat suatu nilai yang mendekati kwantitas L yang diinginkan dan ini mendekati mean hasil observasi : $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Selanjutnya pandang pasangan random variabel independen X_k dengan distribusi yang sama.

Misal M menyatakan expektasi X_k yang berhingga. Kint Chine- menunjukkan bahwa nilai mean dari $Y_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ mendekati probabilitas ke M bila n bertambah, meskipun varian dari X_k tidak ada asalkan meannya ada.

<u>Theorema : Kint Chine : 2.4.8</u>

Jika X_k merupakan pasangan random-variabel independen yang terdistribusi secara identik dan misalkan $E[X_k] = M$ ada, maka untuk konstanta ε sebarang $\lim\limits_{n \to \infty} P(|Y_n - M| > \varepsilon)$

$\longrightarrow 0$ .... (2.4.46)

yang dapat ditulis sebagai : $Y_n \xrightarrow{P} M$

Bukti :

Diassumsikan M = 0 dan didefinisikan random variabel baru.

$$\left.\begin{aligned} X_k^* &= X_k \quad \text{untuk} \quad |X_k| \leq k \\ &= 0 \quad \text{untuk} \quad |X_k| > k \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4.47)$$

bila $F_X(x)$ merupakan fungsi distribusi dari random variabel X_k didapat :

$$E[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E[X_k^*] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} X_k^* \, dF(x)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{-\infty}^{-k} 0 \cdot dF(x) + \int_{-k}^{k} x \cdot dF(x) + \int_{k}^{\infty} 0 \cdot d\,F(x) \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{-k}^{k} x \cdot d\,F(x) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2.4.48)$$

karena diassumpsikan $E\left[X_k\right] = \lim_{n \to \infty} \int_{-k}^{k} x.d\,F(x) =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,.d\,F(x) = M = 0$$

maka didapat : $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} E\left[X_k^{*}\right] = 0 \ldots\ldots (2.4.49)$

Selanjutnya ditentukan varian dari X_k^{*}

$$\mathrm{Var}\,(X_k^{*}) = E\left[X_k^{*2}\right] - \left(E\left[X_k^{*}\right]\right)^2$$

$$\mathrm{Var}\,(X_k^{*}) = E\left[X_k^{*2}\right] - M^2$$

$$\mathrm{Var}\,(X_k^{*}) \leq E\left[X_k^{*2}\right] = \int_{-k}^{k} x^2 \,.\, dF(x) \;\ldots (2.4.50)$$

$$\mathrm{Var}\,Y_n = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k^{*})$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_k^{*}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{-k}^{k} x^2 .d\,F(x)$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_k^{*}) \leq \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left| \frac{x}{\sqrt{n}} \right| dF\,(x) +$$

$$\int |\,x\,|\;\; d.F(\,x\,)\;;\; |\,x\,| > \sqrt{n}\,.$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k^*) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} |x| \, d\,F(x) \; +$$

$$\int_{|x|>\sqrt{n}} |x| \, dF(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2.4.51)$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k^*) \leqslant 0 + 0$$

Akibatnya :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k^*) = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2.4.52)$$

Ditentukan random variabel lain $Y_{n,r}^*$ sedemikian hingga :

$$Y_{n,r} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{r} X_k + \sum_{k=r+1}^{n} X_k^*\right) \ldots\ldots \; (2.4.53)$$

$$\lim_{n \to \infty} Y_{n,r} = \lim_{n \to \infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{r} X_k + \sum_{k=r+1}^{n} X_k^*\right)\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left[\frac{1}{n}\left(\int_{k=1}^{r} x.\, dF(x) + \int_{k=r+1}^{n} x\, dF(x)\right)\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{k=1}^{r} x \,.\, dF(x) + \operatorname{limit}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{k=r+1}^{n} x.\, dF(x)$$

$$\operatorname{limit}_{n \to \infty} Y_{n,r} = 0 + 0$$

$\operatorname{limit}_{n \to \infty} Y_{n,r} = 0$, maka dengan theorema.2.2.2 didapat

$$\lim_{n \to \infty} Y_{n,r} \xrightarrow{P} 0$$

Pada sisi lain didapat :

$$P(Y^*_{n,r} \neq Y_n) \leq \sum_{k=r+1}^{n} P(Y^*_{n,r} \neq X^*_k)$$

$$= \sum_{k=r+1}^{n} \int_{|x|>k} dF(x)$$

$$\leq \int_{|x|>r} |x| \, dF(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.54)$$

Bila r sangat besar, maka untuk $\delta > 0$, pertidaksamaan dari

$P(Y^*_{n,r} \neq Y_n) < \delta$; sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(|Y_n| > \varepsilon ; Y^*_{n,r} \neq Y_n) + P(|Y_n| > \varepsilon ; Y^*_{n,r} = Y_n)$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \lim_{n \to \infty} P(|Y_n| > \varepsilon ; Y^*_{n,r} \neq Y_n) +$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|Y_n| > \varepsilon ; Y^*_{n.r} = Y_n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.55)$$

$$\lim_{n \to \infty} P(|Y_n| > \varepsilon) < \delta + 0$$

Akibatnya :

$$\limsup_{n \to \infty} P(|Y_n| > \varepsilon) < \delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.56)$$

Karena δ tertentu, maka berlaku

$\lim\limits_{n \to \infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$, sehingga theorema terbukti.

Bila barisan random variabel : $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ bukan-hanya pasangan tetapi benar-benar independen, theorema ini dapat dibuktikan dengan sifat-sifat fungsi karakteristik.

Theorema : 2.4.9.

Jika $\{X_k\}$; $k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$ merupakan suatu barisan random-variabel independen dengan distribusi yang sama, dengan nilai expektasi $E[X_k] = M$, maka barisan $\{Y_n\}$ dengan $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots + X_n}{n}$ konvergen stokastik ke M

Bukti :

Misalkan $\phi_X(t)$ merupakan fungsi karakteristik random-variabel X_k; karena X_k independent maka fungsi karakteristik Y_n adalah :

$$\phi_{Y_n}(t) = E\left[e^{it.Y_n}\right] = E\left[e^{it\frac{(X_1 + X_2 + \ldots. X_n)}{n}}\right]$$

$$= E\left[e^{it\frac{X_1}{n} + it\frac{X_2}{n} + \ldots\ldots + it.\frac{X_n}{n}}\right]$$

$$= E\left[e^{it.\frac{X_1}{n}}\right] . E\left[e^{it.\frac{X_2}{n}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E\left[e^{it.\frac{X_n}{n}}\right]$$

$$= \phi_{\frac{X_1}{n}}(t) . \phi_{\frac{X_2}{n}}(t) \ldots\ldots\ldots \phi_{\frac{X_n}{n}}(t)$$

$$\phi_{Y_n}(t) = \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \phi_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) \cdots\cdots \phi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$\phi_{Y_n}(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4.57)$$

Karena nilai expektasi $E\left[X_k\right] = M$ ada, maka $\phi_X(t)$ dapat diex pansikan dalam persekitaran di titik $t = 0$ menurut rumusan Max Laurin :

$$\phi_X(t) = E\left[e^{it\,X}\right]$$

$$= E\left[1 + \frac{it\,X}{1\,!} + \frac{(it\,X)^2}{2\,!} + \frac{(it\,X)^3}{3\,!} + \ldots\right]$$

$$= E\left[1 + it.X - \frac{t^2\,X^2}{2!} - \frac{it^3\,X^3}{3\,!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\phi_X(t) = E\left[1 + it.\,X + O\,(t)\right]$$

dengan $O(t) = \dfrac{(it\,X)^2}{2\,!} + \dfrac{(it\,X)^3}{3\,!} + \ldots\ldots\ldots$

$$\phi_X(t) = 1 + it.\,E\left[X\right] + O\,(t)$$

$$\phi_X(t) = 1 + it.\,M + O(t)$$

Jadi $\phi_X\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + i\,.\,\frac{t}{n}\,.\,M + O\left(\frac{t}{n}\right)$ .... (2.4.58)

Substitusikan persamaan (2.4.58) kedalam persamaan (2.4.57)

$$\phi_{Y_n}(t) = \left[\phi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

$$\phi_{Y_n}(t) = \left[1 + M \cdot \frac{it}{n} + 0\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \quad \ldots\ldots (2.4.59).$$

$$\ln \phi_{Y_n}(t) = \ln \left[1 + M \cdot \frac{it}{n} + 0\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

$$\ln \phi_{Y_n}(t) = \ln \left[1 + M \cdot \frac{it}{n} + 0\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

$$\ln \phi_{Y_n}(t) = n \ln \left[1 + M \cdot \frac{it}{n} + 0\left(\frac{t}{n}\right)\right] \ldots (2.4.60).$$

$$\ln \phi_Y(t) = n \ln (1 + Z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.61)$$

dengan $Z = M \cdot \frac{it}{n} + 0\left(\frac{t}{n}\right)$

untuk Z sangat besar berlaku : $\ln (1 + Z) \approx Z$; hingga

$$\ln \phi_Y(t) = n \cdot Z = n \left[M. \frac{it}{n} + 0 \cdot \left(\frac{t}{n}\right)\right]$$

$$\ln \phi_Y(t) = M\, it + n \cdot 0\left(\frac{t}{n}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.62)$$

untuk t sebarang : $\lim_{n \to \infty} n \cdot 0\left(\frac{t}{n}\right) = 0$, maka didapatkan

$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Y(t) = \lim_{n \to \infty} M.\, it + \lim_{n \to \infty} n \cdot 0\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \ln \phi_Y(t) = M \cdot it$$

$$\lim_{n \to \infty} \phi_Y(t) = e^{Mit}$$

atau :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\phi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = e^{Mit} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.63)$$

Contoh : 2.4. (Hukum bilangan besar tidak berlaku)

Jika random variabel X_k semuanya independent & mempunyai distribusi Cauchy yang sama dengan

$f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$; maka $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ juga mempunyai fungsi distribusi yang sama

Bukti :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \ ; \quad -\infty < X < \infty$$

Fungsi karakteristik dari random variabel X_k yaitu

$\phi_X(t)$ dengan $-\infty < t < \infty$

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f(x)\,dx$$

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\,dx$$

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i.t.X} \frac{1}{(1 + x^2)}\,dx$$

Sedangkan $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i.t.X} \frac{1}{(1 + x^2)}\,dx = 2\pi i \sum R^+$

dengan $\sum R^+$: jumlah semua residu dari $f(x)$ di semua kutubnya yang terletak di setengah bidang atas.

Kutub-kutub dari $f(Z) = \dfrac{1}{(1 + Z^2)}$ adalah $Z_1 = i$ dan $Z_2 = -i$

keduanya merupakan kutub-kutub tingkat satu.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}\frac{1}{(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(2\pi i \ \text{Res}\ \frac{e^{itZ}}{(1+Z^2)};\ Z = i\right)$$

$$= \text{limit } 2i\,(Z-i)\,\frac{e^{itZ}}{(Z+i)(Z-i)}$$

$$= 2i\,\frac{e^{i.t.i}}{2\,i} = e^{-t}$$

karena $-\infty < t < \infty$ berarti $|t| < \infty$ jadi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itX}}{(1+x^2)}\,dx = e^{-|t|}$$

Kesimpulan :

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itX}}{(1+x^2)}\,dx = e^{-|t|}$$

Ini berarti fungsi karakteristik dari random variabel $X_k = e^{-|t|}$; dan akibatnya fungsi karakteristik dari random variabel Y_n yaitu :

$$\phi\, Y_n(t) = \phi\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(t)$$

$$\phi Y_n(t) = \phi\sum_{k=1}^{n} X_k\left(\frac{t}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\phi\, X_k\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$\phi\, Y_n(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}$$

$$\phi\, Y_n(t) = e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\cdot e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\ \ldots\ldots.\ e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}$$

$$\emptyset\, Y_n(t) = \left[e^{-\left|\frac{t}{n}\right|} \right]^n = e^{-|t|}$$

Jadi hukum bilangan besar tidak dapat diterapkan pada barisan $\{ Y_n \}$. Ini berarti bila diambil suatu sampel dari populasi yang mempunyai distribusi cauchy dengan

$$f = \frac{1}{\pi\,(1 + (x - m)^2\,)}$$

tak dapat diambil informasi lebih lanjut mengenai besarnya m dari mean suatu sampel betapapun besarnya X.