

BAB III

GRAPH

Pertama akan didefinisikan suatu graph adalah pasangan berurutan $\langle G, R \rangle$ dimana $G \neq \emptyset$ dan R adalah himpunan bagian dari $G \times G$.

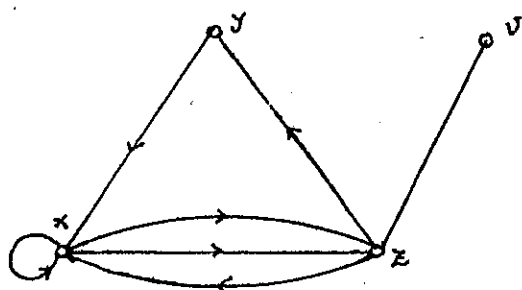
G adalah himpunan yang anggotanya berupa vertex-vertex yang selanjutnya kita sebut sebagai titik karena secara geometris sebuah vertex ini diwakili oleh sebuah titik sedangkan R adalah himpunan edge yang selanjutnya kita sebut sebagai garis, secara geometris jika $(x, y) \in R$, kita menggambar suatu segmen garis yang menghubungkan titik x ke y dengan kepala anak panah menunjukkan dari x ke y . Titik x ini disebut juga source sedangkan y disebut target.

3.1. DIRECTED DAN UNDIRECTED GRAPH

Definisi 3.1.1.

Suatu graph $\langle G, R \rangle$ disebut directed graph apabila terdapat 2 buah titik dihubungkan oleh satu atau lebih garis yang berarah atau dengan kata lain titik-titiknya merupakan source dan target.

Contoh :



$$G = \{ x, y, z, u \}$$

$$(y, x) \in R$$

$$(z, y) \in R$$

$$(z, u) \in R$$

$$(x, z) \in R$$

$$(z, x) \in R$$

$$(x, x) \in R$$

Keterangan :

$(x, x) \in R$, source dan target dari garis ini adalah sama, jika terjadi demikian disebut loop. Atau dengan kata lain, jika $(x, y) \in R$, dimana $x = y$, maka disebut loop dari graph $\langle G, R \rangle$

Jika $(x,y) \in R$ dan $(y,x) \in R$, secara sederhana dapat digambarkan suatu segmen garis penghubung x dan y tanpa anak panah. Maka (x,y) atau (y,x) disebut *undirected edge* (garis tanpa arah) dari graph $\langle G,R \rangle$, sedangkan untuk suatu loop $(x,x) \in R$ dapat digambarkan sebagai garis tertutup dari x ke x .

Untuk $(x,y) \notin R$ dan $(y,x) \notin R$ digambarkan secara geometris sebagai dua buah titik tanpa penghubung.

Definisi 3.1.2.

Suatu graph $\langle G,R \rangle$ sedemikian sehingga setiap $x,y \in G$, terdapat $(x,y) \in R$ (-bhb- $(y,x) \in R$), maka $\langle G,R \rangle$ dikatakan sebagai *undirected graph*.

Contoh :

$$1. G = \{ a,b,c,d,e,f,g,h \}$$

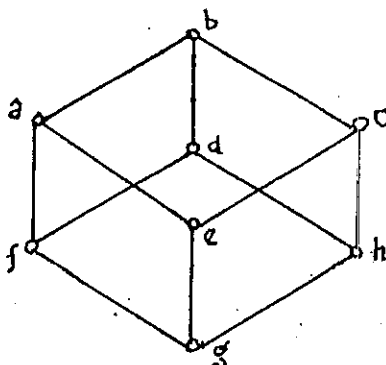
$$G \times G = \{ (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (a,g), (a,h), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e), (b,f), (b,g), \dots, (h,h) \}$$

ambil $R \subseteq G \times G$

Maka dapat diambil beberapa pasangan berurut elemen $G \times G$

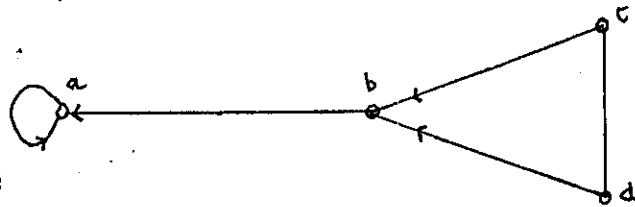
$$R = \{ (a,b), (a,e), (a,f), (b,a), (b,c), (b,d), (c,b), (c,c), (c,h), (d,b), (d,f), (d,h), (e,a), (e,c), (e,g), (f,a), (f,d), (f,g), (h,d), (h,c), (h,g), (g,e), (g,h), (g,f) \}.$$

Karena setiap $(x,y) \in R$ maka $(y,x) \in R$ maka dapat digambar suatu *undirected graph*.



$$2. G = \{a, b, c, d\}$$

$$R \subseteq G \times G$$



$$R = \{(b, a), (a, a), (c, b), (d, b), (d, c)\}$$

Karena hanya $(c, d) \in R$ yang mempunyai pasangan $(d, c) \in R$ maka gambar diatas tidak dapat dikatakan sebagai undirected graph. Tetapi gambar ini hanya mempunyai undirected edge yaitu titik c ke / dari titik d.

Gambar diatas juga mempunyai loop pada titik a dengan pasangan berurutannya adalah $(a, a) \in R$

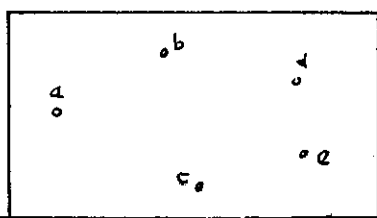
3.2. GRAPH TRIVIAL (TRIVIAL GRAPH)

Seperti kita tahu bahwa syarat suatu graph $\langle G, R \rangle$ adalah $G \neq \emptyset$ dan R adalah subset dari $G \times G$. Karena menurut teori himpunan bahwa $\emptyset \subseteq G \times G$ maka suatu graph dengan $R = \emptyset$ juga merupakan suatu graph khusus yang hanya mempunyai titik-titik tetapi semua titik-titiknya tidak dihubungkan satu dengan yang lainnya.

Definisi 3.2.1.

Suatu graph $\langle G, R \rangle$ dikatakan suatu Trivial Graph -bhb- $R = \emptyset$, yaitu $\langle G, R \rangle$ hanya mempunyai titik tanpa mempunyai garis.

Contoh :



$$G = \{a, b, c, d, e\}$$

$$R = \emptyset$$

$$R \subseteq G \times G$$

$$\emptyset \subseteq G \times G$$

3.3. COMPLETE GRAPH

Definisi 3.3.1.

Suatu Graph $\langle G, R \rangle$ disebut Complete Graph -bhb-
 $\forall a, b \in G, (a, b) \in R$

Catatan :

Complete Graph ini mempunyai ciri-ciri bahwa setiap titik dalam Graph itu dihubungkan oleh segmen-segmen garis yang menghubungkan titik-titik itu dengan semua titik-titik yang lain.

Atau boleh dikatakan bahwa semua elemen-elemen dari $G \times G$ juga merupakan elemen-elemen dari R .

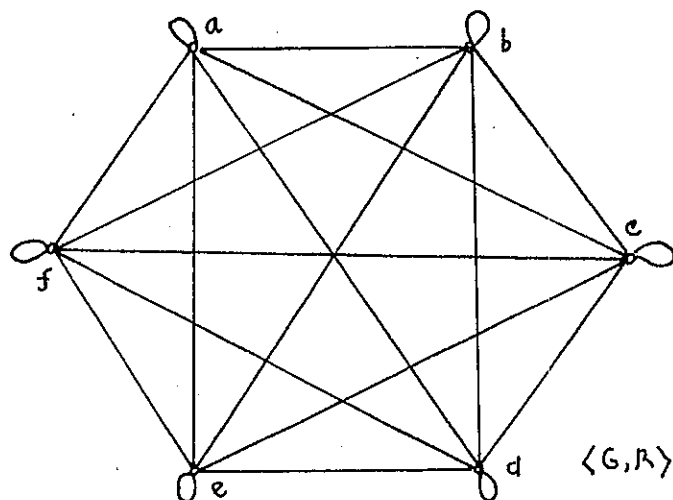
Contoh :

$$G = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$G \times G = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, f), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, f), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (e, f), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (f, e), (f, a), (f, b), (f, c), (f, d)\}$$

$$G \times G = R$$

Maka $\langle G, R \rangle$ adalah complete graph.



Definisi 3.3.2.

Suatu Graph $\langle G, R \rangle$ disebut semi complete graph

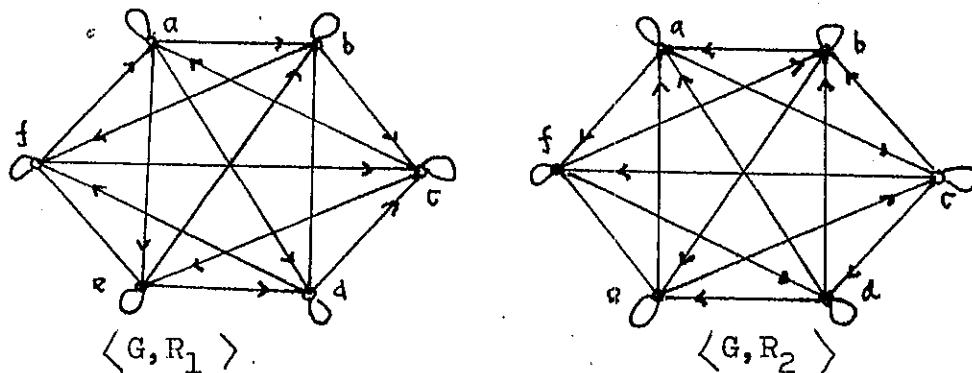
-bhb- $\forall a, b \in G, (a, b) \in R$ atau $(b, a) \in R$

Contoh :

Dari contoh halaman 14

jika $R_1 \cup R_2 = G \times G$ dimana jika $(a, b) \in R_1$ maka $(b, a) \in R_2$.

Sehingga $\langle G, R_1 \rangle$ dan $\langle G, R_2 \rangle$ adalah semi complete, dengan elemen-elemen didalam R_1 dan R_2 merupakan directed edge (garis berarah).



Definisi 3.3.3.

Suatu Graph $\langle G, R \rangle$ disebut directed complete graph

-bhb- tidak mempunyai Loop dan $\forall a, b \in G, a \neq b,$

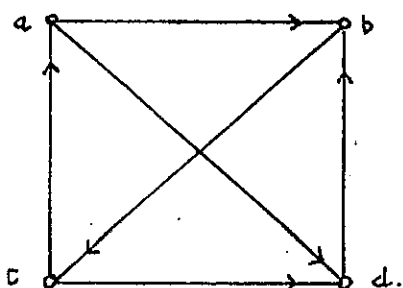
$(a, b) \in R$ atau $(b, a) \in R$ tetapi tidak berlaku bersama-sama.

Contoh :

$$G = \{a, b, c, d\}$$

$$G \times G = \{(a, a), (a, b), \dots, (d, d)\}$$

Kita ambil $\{(a, b), (c, a), (a, d), (b, c), (d, b), (c, d)\} = R$



$$(a, a) \notin R$$

$$(b, b) \notin R$$

$$(c, c) \notin R$$

$$(d, d) \notin R$$

Keterangan :

Gambar ini disebut suatu Directed Complete Graph. Selain itu memenuhi sifat-sifat yang tertulis pada definisi, juga dari adanya anak panah yang menunjukkan sifat directed.

Sedangkan sifat complete-nya dapat ditunjukkan dengan adanya segmen garis yang menghubungkan setiap titik yang ada ke titik yang lain; dalam hal ini segmen garis-berarah.

3.4. CONNECTED GRAPH

Definisi 3.4.1.

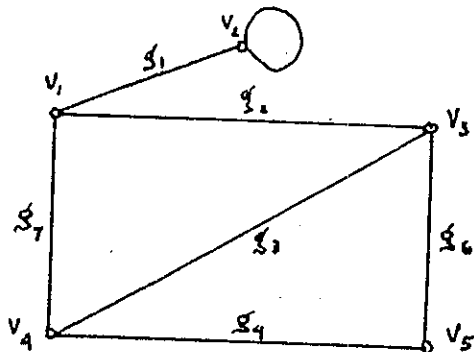
Suatu barisan berhingga dari titik-titik $P : (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ dimana $a_i \in G, i = 1, 2, 3, \dots, n$ disebut suatu Path (dari Graph $\langle G, R \rangle$) dari a_1 ke a_n -bhb- $(a_i, a_{i+1}) \in R, i = 1, 2, \dots, n-1$

Keterangan :

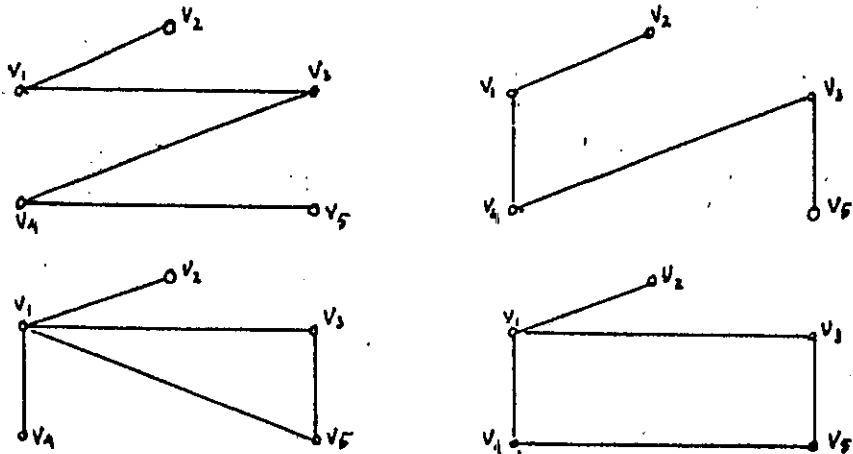
a_i tidak harus berbeda satu dengan yang lainnya, sehingga jika kita mempunyai path $a-b-c-d-e-f-c-g$ maka, $P : (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ sehingga $a_3=c, a_7=c$. Jadi $a_3 = a_7$.

Contoh :

1. Kita mempunyai suatu Graph $\langle G, R \rangle$ dimana $G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ yang digambar sebagai berikut



Sebagian path yang mungkin terbentuk sehingga melewati semua titik-titiknya adalah



Catatan :

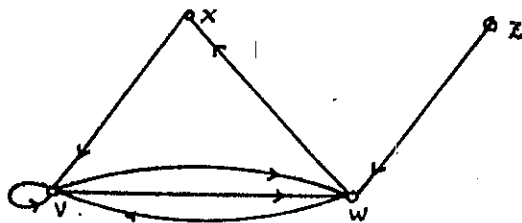
Apabila Path ini dihubungkan oleh garis-garis berarah (directed edge) maka Path dengan sifat ini disebut Directed Path .

Sedangkan directed path ini terdiri atas dua jenis yaitu :

1. directed path biasa
2. semi directed path

2. Diketahui directed graph $\langle G, R \rangle$

dengan $G = \{v, w, x, z\}$ dan digambarkan sbb :



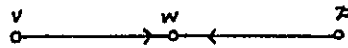
Kalau kita tentukan suatu path dari v ke x maka didapat suatu directed path biasa dengan $P : (v, w, x)$

Sedangkan path dari v ke v dengan $P : (v, w, x, v)$ adalah suatu directed path tertutup.

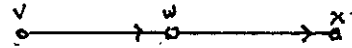
Untuk path dari v ke z, dengan $P : (v, w, v, w, z)$ adalah semi directed path.

Karena arah anak panah dari w ke z tidak searah dengan arah z ke w. Sifat inilah yang membeda-

kan semi directed path dengan directed path biasa . Kalau kita gambar secara sederhana tampak jelas perbedaan antara keduanya.



semi directed path



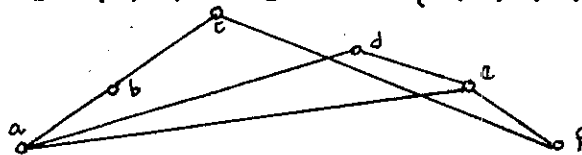
directed path biasa

Definisi 3.4.2.

Suatu path dengan barisan titik-titik nya berlainan satu dengan lainnya maka disebut Chain dari graph $\langle G, R \rangle$

Contoh :

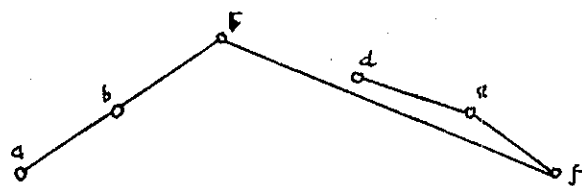
1. Graph $\langle G, R \rangle$ dengan $G = \{ a, b, c, d, e, f \}$



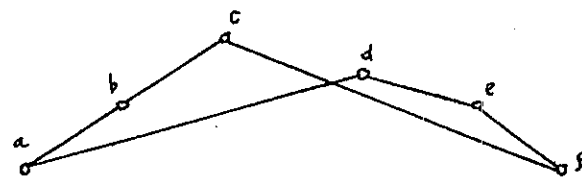
maka dapat dibentuk suatu chain dari graph $\langle G, R \rangle$ ini antara lain

- (i) Chain dari a ke d

dengan $P : (a, b, c, f, e, d)$

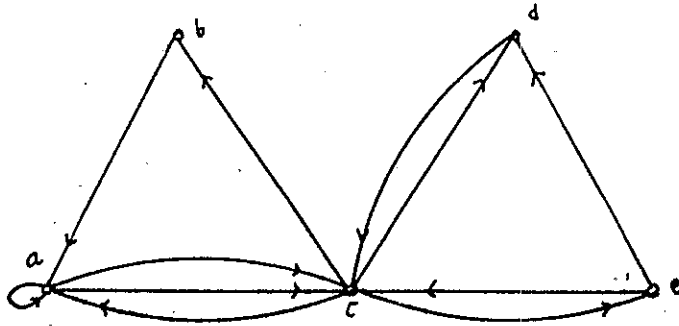


- (ii) $P : (c, b, a, d, e, f)$



Disebut chain dari c ke c atau chain tertutup. Chain tertutup ini disebut juga circuit.

2. Kalau kita mempunyai suatu directed graph $\langle G, R \rangle$ sebagai gambar dibawah ini, maka



$a \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow c$

bukan merupakan suatu directed chain . Tetapi hanya merupakan directed path biasa.

Sedangkan $b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow d$

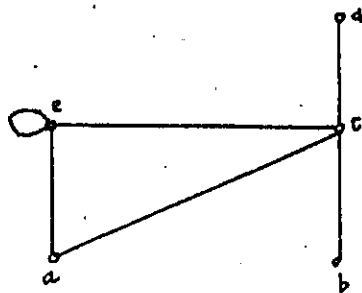
merupakan suatu directed chain.

Definisi 3.4.3.

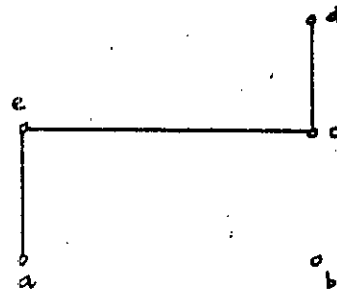
Suatu graph $\langle G, R \rangle$ disebut connected graph -bhb- untuk semua $a, b \in G$, terdapat sekurang-kurangnya satu path yang menghubungkan a dan b

Contoh :

Seandainya . kita mempunyai graph dengan himpunan titik-titiknya adalah $G = \{a, b, c, d, e\}$



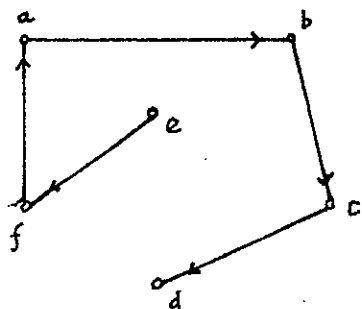
Connected graph



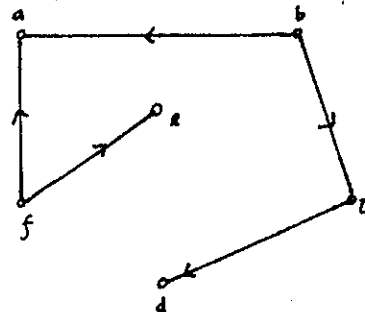
Disconnected graph

Catatan :

1. Suatu graph connected dimana sifat dari path-nya adalah semi directed path, maka graph ini disebut connected lemah.
2. Graph connected dengan directed path biasa disebut connected kuat.



Connected kuat



Connected lemah

Definisi 3.4.4.

Suatu graph $\langle G, R \rangle$ disebut triangular graph -bhb-

$$(1) \forall a \in G, (a, a) \notin R$$

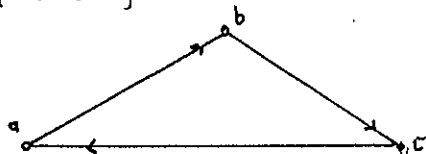
$$(2) (a, b) \in R \Rightarrow \exists c \in G \text{ sedemikian hingga} \\ (b, c) \in R \text{ dan } (c, a) \in R$$

Catatan :

Graph ini adalah suatu graph yang terdiri dari cyclic triple (circuit triple) ; circuit dengan 3 buah titik. Dan karena loop adalah suatu cycle untuk dirinya sendiri maka triangular graph ini tidak mengandung loop.

Contoh :

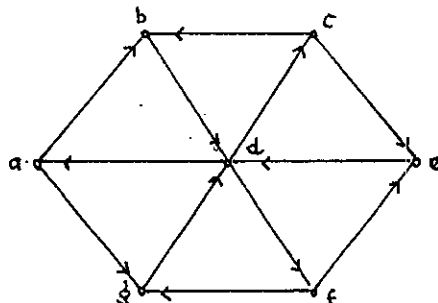
$$1. G = \{a, b, c\}$$



$\langle G, R \rangle$ adalah suatu circuit triple

$$2. G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$R = \{(a, b), (b, d), (d, a), (d, c), (c, b), (c, e), (e, d), \\ (d, f), (f, e), (f, g), (g, d), (a, g)\}$$



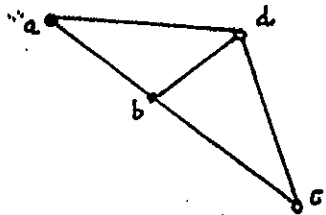
$\langle G, R \rangle$ adalah triangular graph

3.5. SUB GRAPH

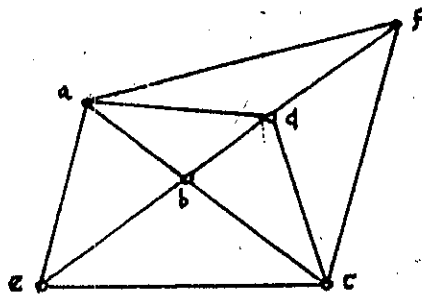
Definisi 3.5.1.

Suatu graph $\langle g, r \rangle$ disebut sub graph dari graph $\langle G, R \rangle$ jika semua titik dan semua garis dari $\langle g, r \rangle$ juga merupakan titik-titik dan garis-garis dari graph $\langle G, R \rangle$

Contoh :



(i) $\langle g, r \rangle$



(ii) $\langle G, R \rangle$

Dari gambar (i) dan (ii)

(a,b) , (b,c) , (c,d) , (d,a) , $(b,d) \in r$

hal ini dapat kita lihat pada gambar (i).

Elemen-elemen didalam r ini juga merupakan elemen-elemen dalam R . Dan titik-titik dalam g adalah juga elemen-elemen dalam G .

Sub graph $\langle g, r \rangle$ dari graph $\langle G, R \rangle$ dapat juga sebagai bagian dari graph $\langle G, R \rangle$. Sehingga dalam teori himpunan dapat juga ditulis sebagai $\langle g, r \rangle \subseteq \langle G, R \rangle$

Catatan :

1. Setiap graph adalah sub graph dari dirinya sendiri
2. Suatu sub graph dari sub graph $\langle g, r \rangle$ dari graph $\langle G, R \rangle$ merupakan sub graph dari graph $\langle G, R \rangle$
atau $\langle g', r' \rangle \subseteq \langle g, r \rangle \subseteq \langle G, R \rangle$
maka $\langle g', r' \rangle \subseteq \langle G, R \rangle$
3. Suatu titik tunggal elemen G adalah merupakan sub graph dari graph $\langle G, R \rangle$.
4. Suatu garis tunggal elemen R juga merupakan sub graph dari graph $\langle G, R \rangle$.

3.6. RELASI DALAM GRAPH

Relasi dalam graph $\langle G, R \rangle$ menggambarkan hubungan antara satu titik dengan titik yang lain elemen dari G , yang ditunjukkan sebagai garis. Dimana didalam Graph ini $\langle G, R \rangle$ hubungan ini diberi simbol R . Syarat suatu relasi ini adalah graph $\langle G, R \rangle$ yang tidak mempunyai garis paralel. Sedangkan R ditunjukkan sebagai directed edge (garis berarah), sehingga $\langle G, R \rangle$ merupakan directed graph.

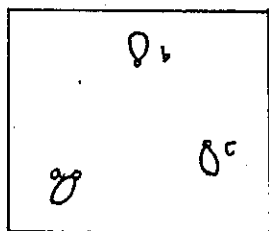
Definisi 3.6.1.

Suatu relasi R disebut relasi refleksif dalam suatu directed graph $\langle G, R \rangle$ -bhb- $\forall a \in G$,
 $(a, a) \in R$

Keterangan :

Artinya setiap titik dalam $\langle G, R \rangle$ selalu terdapat loop. Atau R adalah pasangan berurut $\subseteq G \times G$ yang bersifat refleksif didalam graph $\langle G, R \rangle$.

Contoh :



$\langle G, R \rangle$

$a, b, c \in G$

$(a, a), (b, b), (c, c) \in R$

maka $\langle G, R \rangle$ adalah directed graph dengan R bersifat refleksif.

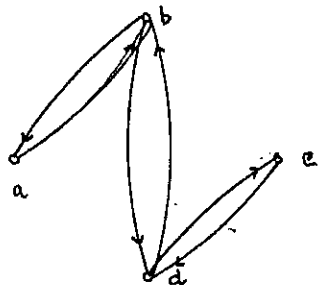
Definisi 3.6.2.

Suatu relasi R disebut relasi symmetric dalam suatu directed graph $\langle G, R \rangle$ -bhb- $\forall a, b \in G$, $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$.

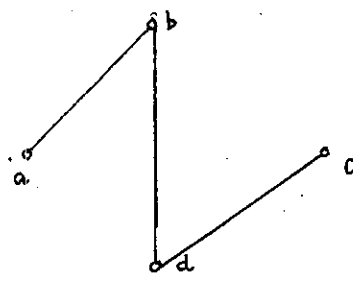
Contoh :

$G = \{ a, b, c \}$

$$R = \{(a,b), (b,a), (b,d), (d,b), (d,c), (c,d)\}$$



(i)



(ii)

Karena $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

$(b,d) \in R \Rightarrow (d,b) \in R$

$(d,c) \in R \Rightarrow (c,d) \in R$

Sehingga directed graph $\langle G, R \rangle$ yang digambarkan pada gambar (i) mempunyai R yang symmetric.

Sehingga dapat juga digambarkan sebagai undirected graph (gambar (ii))

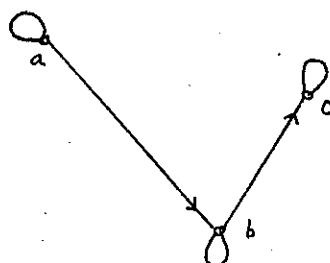
Catatan :

Sedangkan R disebut anti symmetric apabila terdapat $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$, maka $a = b$

Dapat disimpulkan disini bahwa $\langle G, R \rangle$ disebut suatu graph dengan relasi anti symmetric hanya mempunyai loop dan directed edge . Atau dengan kontraposisi dapat dinyatakan sbb.:

Jika $a \neq b$, maka $(a,b) \notin R$ atau $(b,a) \notin R$
berarti $a = a$, maka $(a,a) \in R$

Contoh :



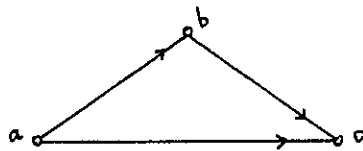
Graph $\langle G, R \rangle$ dengan R anti symmetric

Definisi 3.6.3.

Suatu relasi R disebut relasi transitif dalam suatu directed graph $\langle G, R \rangle$ -bhb- $\forall a, b, c \in G$,
 $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ maka pasti terdapat $(a, c) \in R$

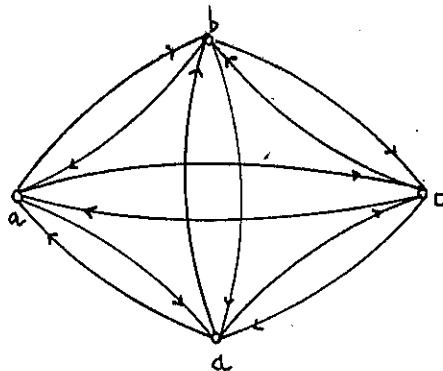
Contoh :

1.

 $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$

$\langle G, R \rangle$ adalah directed graph dengan R bersifat transitif.

2.



$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}$$
 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ $\Rightarrow (a, c) \in R$ $(a, c) \in R, (c, d) \in R$ $\Rightarrow (a, d) \in R$

dst.

 $(a, b) \in R, (b, c) \in R, (c, d) \in R \Rightarrow (a, d) \in R$ $(b, c) \in R, (c, d) \in R, (d, a) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

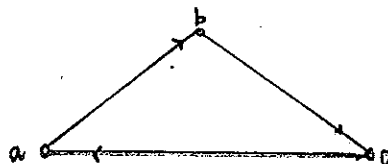
dst.

Jadi R bersifat transitif untuk semua relasi dalam directed graph $\langle G, R \rangle$.

Akibatnya ;

R disebut suatu relasi anti transitif dalam suatu directed graph $\langle G, R \rangle$ jika $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, maka $(a, c) \notin R$

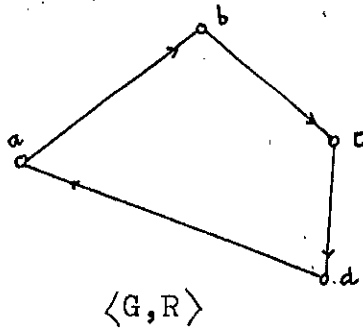
3.



$\langle G, R \rangle$ ini adalah directed graph dengan R anti transitif.

 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$

4.



$(a, c) \notin R$, tetapi $(c, a) \in R$

$\langle G, R \rangle$ directed graph dengan R anti transitif.

$(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$,

$(c, d) \in R$ tetapi $(a, d) \notin R$

Catatan :

$\langle G, R \rangle$ directed graph dengan jumlah elemen dalam $G \geq 3$ disebut Hasse diagram.

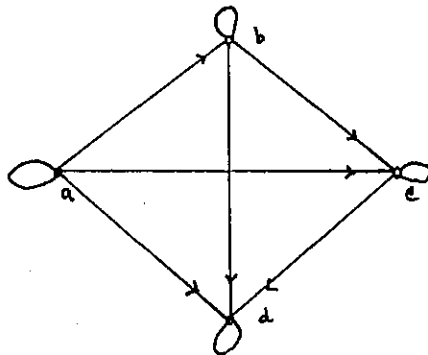
Definisi 3.6.4.

Suatu graph $\langle G, R \rangle$ disebut partially order set apabila relasi dalam directed graph $\langle G, R \rangle$ bersifat :

1. refleksif
2. Anti symmetric
3. Transitif

Contoh :

1.



$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c), (b, d), (c, d), (a, d) \}$

Sifat refleksif dipenuhi dengan adanya

$(a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \in R$

Sifat anti symmetric dipenuhi.

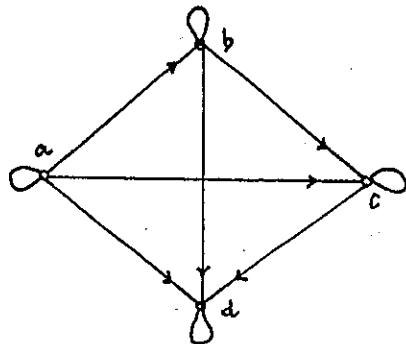
Transitif juga dipenuhi.

Sehingga $\langle G, R \rangle$ graph dengan sifat partially order set.

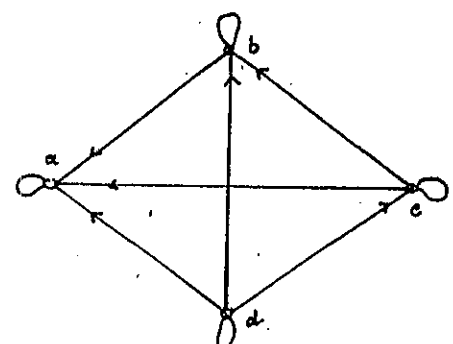
2. Dari soal nomor 1.

Jika kita mempunyai suatu graph $\langle G, R \rangle$ tertentu

sebagai partially order set, maka dapat dibentuk suatu partially order set yang lain yang disebut sebagai linearly order set. Dimana sifat linearly order set ini adalah partially order set dimana $\forall a, b \in G, (a, b) \in R$ atau $(b, a) \in R$



$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (a, d)\}$$



$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, b), (b, a), (c, a), (b, d), (d, c), (d, a)\}$$

$\langle G, R_1 \rangle$ dan $\langle G, R_2 \rangle$ adalah linearly order set

3.7. FOREST DAN TREE

Definisi 3.7.1.

Suatu graph $\langle G, R \rangle$ disebut forest -bhb- $\forall a, b \in G$ maka paling banyak terdapat satu path yang menghubungkan a dan b.

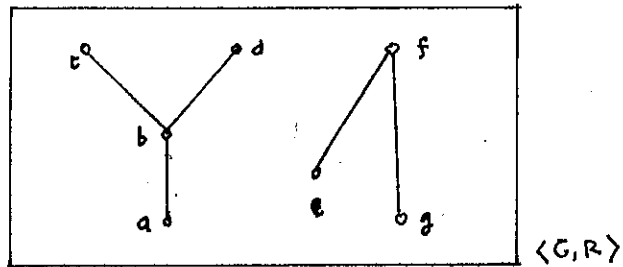
Catatan :

Jadi dengan kata lain, forest adalah suatu graph yang tidak mempunyai circuit.

Karena loop juga merupakan suatu circuit, maka forest juga tidak mempunyai loop.

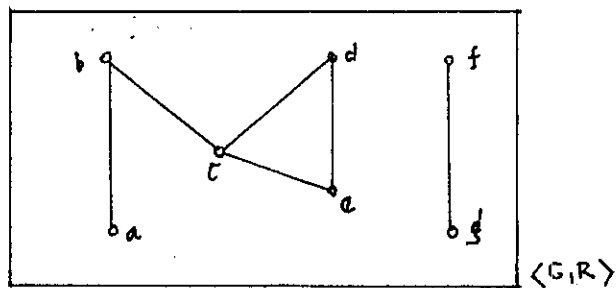
Contoh :

1. $G = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$



Graph $\langle G, R \rangle$ merupakan suatu forest

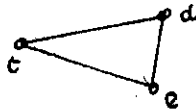
$$2. G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$



$\langle G, R \rangle$ bukan suatu forest

Karena terdapat circuit pada Graph $\langle G, R \rangle$

yaitu



Akibat :

Suatu graph $\langle G, R \rangle$ tanpa circuit, connected atau tidak connected adalah suatu forest.

Jadi trivial graph juga suatu forest.

Definisi 3.7.2.

Suatu Graph $\langle G, R \rangle$ disebut tree -bhb- $\forall a, b \in G$ maka paling banyak terdapat satu path yang menghubungkan a dan b , dimana $\langle G, R \cup R^{-1} \rangle$ connected.

Contoh :

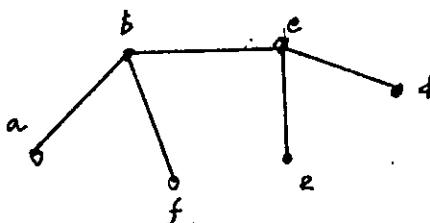
$$1. G = \{a, b, c, d, e, f\}$$

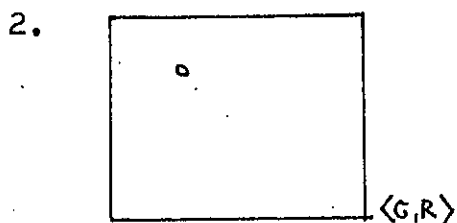
$$R = \{(a, b), (d, c), (b, f), (e, c), (b, c)\}$$

$$R^{-1} = \{(b, a), (c, d), (f, b), (c, e), (c, b)\}$$

$\langle G, R \cup R^{-1} \rangle$ adalah connected

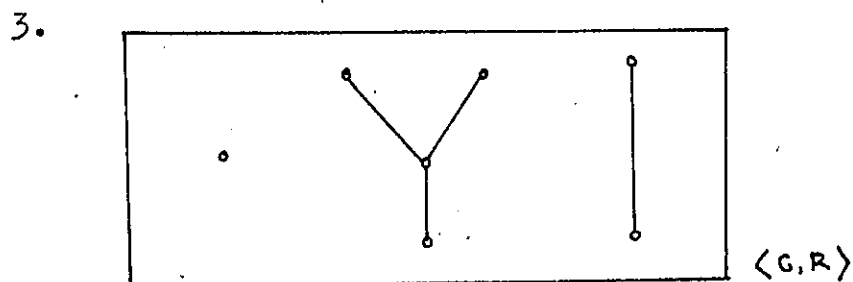
Sehingga dapat digambarkan $\langle G, R \rangle$ adalah tree.





Suatu trivial graph dengan jumlah anggota dalam G adalah satu, juga merupakan suatu tree.

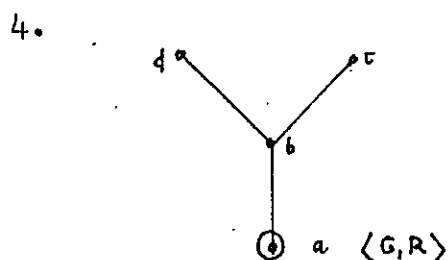
Karena definisi tree dipenuhi, dan disebut trivial tree.



Graph $\langle G, R \rangle$ adalah graph yang dibentuk oleh beberapa tree. Tetapi secara keseluruhan tidak dapat disebut tree, karena sifat connected tidak dipenuhi. Graph $\langle G, R \rangle$ dapat disebut sebagai forest.

Catatan :

1. Kumpulan dari beberapa tree yang saling asing disebut forest.
2. Trivial tree adalah trivial graph dengan titik sebanyak satu ; karena kalau lebih dari satu , maka antara titik-titik itu tidak connected , jadi tidak merupakan tree.
3. Apabila dalam suatu tree salah satu ^{titik} dipilih untuk diperhatikan secara khusus, maka tree itu dikatakan mempunyai root (akar) yang selanjutnya disebut pangkal.



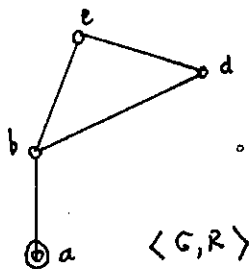
Akibatnya:

Setiap nontrivial tree mempunyai paling sedikit 2 buah titik akhir ; yaitu titik yang hanya dihubungkan dengan hanya satu titik yang lain.

Pada contoh soal nomor 4 (ii) , titik akhir itu adalah titik pangkal f dan titik d .

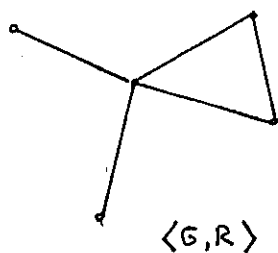
Sedangkan pada soal nomor 4 (i), mempunyai 3 titik akhir, yaitu a , c , dan d .

Karena kalau mempunyai titik akhir < 2 maka pasti terbentuk suatu circuit.



Hanya mempunyai titik akhir satu .

$b - c - d$ membentuk suatu circuit maka $\langle G,R \rangle$ bukan tree.



Juga bukan suatu tree , walaupun mempunyai 2 buah titik akhir, karena terdapat circuit.