BAB II

GROUP

2.1. OPERASI BINIER

Definisi 2.1.1.

Operasi binier * pada himpunan A , adalah suatu operasi yang memberikan aturan pada tiap-tiap order pasangan berurut, yang merupakan elemen-elemen dari himpunan A , menjadi elemen dari himpunan A itu sendiri.

Contoh :

1. Z^+ = himpunan bilangan bulat positif

   Didefinisikan suatu operasi binier * sebagai a*b .

   Untuk $a \neq b$, maka a * b = faktor terkecil dari a dan b. Jika a = b , a*b = salah satu dari a atau b

   $(2,11) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 2 * 11 = 2 \quad , 2 \in Z^+$

   $(15,10) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 15 * 10 = 10 \quad , 10 \in Z^+$

   $(3,3) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 3 * 3 = 3 \quad , 3 \in Z^+$

2. Z^+ = Himpuanan bilangan bulat positif

   Didefinisikan suatu operasi binier *' dimana

   a *' b = a , b *' a = b

   maka

   $(2,3) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 2 *' 3 = 2 , 2 \in Z^+$

   $(3,2) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 3 *' 2 = 3 , 3 \in Z^+$

   $(5,5) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 5 *' 5 = 5 , 5 \in Z^+$

   $(25,10) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 25 *' 10 = 25 , 25 \in Z^+$

3. Z^+ = himpunan bilangan bulat positif.

   Didefinisikan suatu operasi binier*"

dimana $a *'' b = (a * b) + 2$

dimana operasi * sama dengan operasi binier yang didefinisikan pada soal nomor 1.

$(4,7) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 4 *'' 7 = (4 * 7) + 2$

$= 4 + 2 = 6 \quad ,6 \in Z^+$

$(5,5) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 5 *'' 5 = (5 * 5) + 2$

$= 5 + 2 = 7, \ 7 \in Z^+$

$(25,9) \in Z^+ \times Z^+ \Rightarrow 25 *'' 9 = (25 * 9) + 2$

$= 9 + 2 = 11, \ 11 \in Z^+$

Definisi 2.1.2.

Suatu operasi binier * pada himpunan S dikatakan komutatif -bhb- $a*b = b*a$, $\forall a,b \in S$.
Dikatakan asosiatif -bhb- $(a*b)*c = a*(b*c)$ $\forall a,b,c \in S$.

Contoh :

1. Didefinisikan operasi binier * pada himpunan $S = \{a,b,c,d,e\}$ yang digambarkan pada tabel dibawah ini .

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

dari tabel

(i) $[(a*c)*e]*a = [c*e]*a$

$= [a] * a = a$

(ii) $(a*b)*c = (b)*c = b*c = a$

$a*(b*c) = a*(a) = b*a = a$

Maka $(a*b)*c = a*(b*c)$

Tetapi

$$\left.\begin{array}{l}(b*d)*c = e*c = a \\ b*(d*c) = b*b = c\end{array}\right\} (b*d)*c \neq b*(d*c)$$

Jadi operasi binier diatas tidak asosiatif

(iii)
$$\left.\begin{array}{l}a * b = b \\ b * a = b\end{array}\right\} a * b = b * a$$

$$\left.\begin{array}{l}a * c = c \\ c * a = c\end{array}\right\} a * c = c * a$$

$$\left.\begin{array}{l}a * d = b \\ d * a = b\end{array}\right\} a * d = d * a$$

$$\left.\begin{array}{l}a * e = c \\ e * a = c\end{array}\right\} e * a = a * e$$

$$\left.\begin{array}{l}b * c = a \\ c * b = a\end{array}\right\} b * c = c * b$$

$$\left.\begin{array}{l}b * d = e \\ d * b = e\end{array}\right\} b * d = d * b$$

$$\left.\begin{array}{l}b * e = c \\ e * b = b\end{array}\right\} b * e \neq e * b$$

Karena terdapat suatu operasi binier yang tidak memenuhi syarat komutatif. Maka operasi binier diatas bukan merupakan operasi yang komutatif

2. Didefinisikan suatu operasi binier * seperti pada tabel berikut ; dari himpunan $S = \{a,b,c,d\}$

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Karena setiap elemen dalam S dapat dioperasikan secara komutatif, maka operasi binier diatas me rupakan operasi yang komutatif

Operasi binier * ini juga merupakan operasi yang yang asosiatif karena setiap elemen dalam S dapat dioperasikan secara asosiatif .

Catatan :

Suatu himpunan yang tak kosong yang memenuhi operasi binier yang asosiatif disebut semi group .

2.2. GROUP

Definisi 2.2.1.

Group $\langle G,*\rangle$ adalah suatu himpunan G, bersama-sama dengan operasi binier * pada G, sedemikian hingga memenuhi axioma-axioma berikut

(i) Operasi binier * adalah asosiatif

(ii) Terdapat elemen e (identitas untuk * pada G) sedemikian hingga

$e * x = x * e = x \quad , \forall x \in G$

(iii) $\forall a \in G$ terdapat $a' \in G$ sehingga

$a' * a = a * a' = e$ (a' adalah invers dari a dari operasi binier *)

Theorema 2.2.1.

Jika G adalah group dengan operasi binier * , dimana hukum konselasi kiri dan kanan berlaku didalam G , sehingga

$a * b = a * c \Rightarrow b = c$ dan

$b * a = c * a \Rightarrow b = c$ untuk $\forall a,b,c \in G$

Theorema 2.2.2.

Jika G adalah group dengan operasi binier * dan jika a dan b elemen-elemen dalam G, maka persamaan linier $a*x = b$ dan $y*a = b$ mempunyai solusi tunggal dalam G

Theorema 2.2.1 dan 2.2.2. telah dibuktikan pada mata kuliah struktur aljabar I (teori grup)

Definisi 2.2.2.

Group $\langle G,* \rangle$ dikatakan abelian group jika operasi binier $*$ adalah komutatif.

Contoh :

1. Z^+ = himpunan bilangn bulat positif dengan operasi penjumlahan .

   Akan ditunjukkah bahwa himpunan dengan operasi penjumlahan ini bukan merupakan suatu group.

   Dari axioma group, maka

   (i) operasi binier adalah assosiatif.

   Karena Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positif, maka

   $\forall$ $a,b,c \in Z^+$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$

   Sehingga axioma (i) dari group berlaku.

   (ii) Tidak terdapat elemen identitas terhadap $+$

   Karena tidak terdapat suatu elemen yang jika dijumlahkan akan menghasilkan dirinya sendiri.

   misal $a,x \in Z^+$, maka $a + x \neq x$

   juga $a + x \neq a$

   maka a dan x bukan elemen identitas.

   (iii) Tidak punya invers.

   Jadi karena tidak memenuhi axioma-axioma dalam group maka himpunan Z^+ bukan group.

2. Z = himpunan bilangan bulat.

   Dengan operasi penjumlahan, maka axioma-axioma didalam group dipenuhi.

   (i) Operasi binier adalah assosiatif

   (ii) mempunyai elemen identitas yaitu 0

   (iii) Setiap elemen didalam Z mempunyai invers

   Jadi Z merupakan suatu group .

3. Himpunan bilangan bulat modulo 5 adalah suatu group dengan operasi penjumlahan .

$G = \{ \bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4} \}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Jadi $\langle G,+\rangle$ adalah suatu group.

4. Himpunan bilangan bulat modulo 5 dengan $\bar{0}$ dike - luarkan merupakan suatu group.terhadap pergandaan

$G = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

.	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\langle G,.\rangle$ adalah suatu group.

5. Himpunan bilangan bulat modulo 6 dengan $\bar{0}$ dikeluarkan , bukan merupakan group dengan operasi pergandaan .

$G = \{ \bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5} \}$

.	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\langle G,.\rangle$ bukan merupakan suatu group terhadap operapergandaan karena sifat tertutup tidak dipenuhi.

Dari contoh soal-contoh soal diatas,
Soal nomor 2 , 3 , 4 adalah group abelian karena operasinya adalah operasi yang komutatif.

2.3. KOMPLEKS DAN SUB GROUP

Definisi 2.3.1.

Suatu kompleks dalam teori group adalah himpunan bagian sembarang dari group $\langle G,*\rangle$ yang $\neq \emptyset$

Contoh :

1. $\langle G,*\rangle$ adalah suatu group dari himpunan bilangan bulat. Jika kita ambil A adalah himpunan bilangan genap, maka A disebut sebagai kompleks dari group $\langle G,*\rangle$.
2. $\langle G,+\rangle$ adalah suatu group dari himpunan bilangan bulat modulo 5 dengan operasi penjumlahan. Jika kita ambil $A = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ maka jelas bahwa $A \subseteq G$ dimana $G = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ dan $A \neq \emptyset$ Sehingga A adalah kompleks dari group $\langle G,+\rangle$

Catatan :

1. Hasil ganda duabuah kompleks A dan B didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen ab dengan $a \in A$ dan $b \in B$.
   AB .=df. $\{x \in G \,/\, x = ab$.&. $a \in A$.&. $b \in B\}$
2. Jika A suatu kompleks, maka A^{-1} adalah himpunan elemen-elemen a^{-1} dimana $a \in A$
   A^{-1} .=df. $\{x \in G \,/\, x = a^{-1}$.&. $a \in A\}$
3. A suatu kompleks , maka $A^{o} = I$
   A suatu kompleks , maka $A^{1} = A$
   A suatu kompleks , maka dengan induktif dapat ditunjukkan $A^{n+1} = A^{n} . A$ (n=bilangan bulat positif).
   Sedangkan $A^{-n} = (A^{-1})^{n}$, n bilangan bulat positif

Definisi 2.3.2.

Suatu kompleks A dari group $\langle G,*\rangle$ disebut sub group dari $\langle G,*\rangle$ -bhb- mempunyai hukum komposisi yang sama dengan hukum komposisi group $\langle G,*\rangle$

Contoh :

1. $\langle G,+\rangle$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 6 maka $G = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$, memenuhi aksioma group dengan operasi penjumlahan .
   Jika kita ambil A adalah himpunan bilangan bulat modulo 5 , maka $A = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$. sehingga $\langle A,+\rangle$ group, karena sifat group dipenuhi (sudah ditunjukkan pada contoh soal no 3 halaman 8), maka A bukan sub group dari group $\langle G,+\rangle$ karena komposisinya berbeda. dan A bukan kompleks dari group $\langle G,+\rangle$
2. Dari contoh soal nomor 1 diatas , jika kita ambil A adalah sub set dari himpunan G, jadi A adalah sub set dari himpunan bilangan bulat modulo 6 , misal $A = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ maka sifat group dipenuhi. Sehingga $\langle A,+\rangle$adalah sub group dari group $\langle G,+\rangle$
3. $\langle G,.\rangle$adalah suatu group dengan operasi perganda an , dengan $G = \{-1,1,i,-i\}$. Maka $\langle A,.\rangle$adalah sub group dari group $\langle G,.\rangle$apabila $A = \{-1,1\}$.

Catatan :

1. Setiap sub group selalu kompleks , sedangkan kompleks tidak selalu merupakan sub group.
2. $\langle G,*\rangle$ adalah sub group dari dirinya sendiri.
3. $\{I\}$ adalah merupakan sub group dari group$\langle G,*\rangle$
4. (2) dan (3) disebut sub group tidak sejati.