BAB II

RANCANGAN ACAK KELOMPOK LENGKAP

Dalam beberapa kegiatan percobaan, sering didapati bahwa unit-unit percobaan tertentu, bila diberikan perlakuan yang sama, sering memberikan respon atau hasil yang berbeda. Misalkan pada pengamatan yang dilakukan pada suatu hari tertentu atau pengamatan yang menggunakan alat tertentu akan lebih homogen apabila dibandingkan dengan pengamatan yang dilakukan pada hari yang berbeda atau yang menggunakan alat berbeda. Untuk itu rancangannya dapat disusun sedemikian sehingga bagian keragaman yang bersumber pada sumber yang dikenali itu dapat diukur dan dikeluarkan dari galat percobaan. Pada saat yang beda antara rata-rata perlakuan tidak lagi mengandung sumbangan yang berasal dari sumber yang dikenali. Model rancangan yang didalamnya ada pengelompokkan seperti inilah yang kemudian akan dibahas dalam penulisan berikutnya. Rancangan yang dimaksud adalah rancangan acak kelompok lengkap. *(Steel dan Torrie,1991)*

Dalam rancangan acak kelompok lengkap unit-unit eksperimen dikelompokkan kedalam suatu blok-blok atau kelompok-kelompok menurut kriteria tertentu. Unit-unit eksperimen yang mempunyai kriteria atau sifat yang sama, masing-masing dikelompokkan dalam satu kelompok tertentu. Sedangkan unit-unit eksperimen yang berlainan dikelompokkan bersama unit eksperimen yang lain yang lebih sesuai. Demikian seterusnya dilakukan terhadap seluruh unit eksperimen, sehingga dalam satu kelompok unit-unit eksperimen akan terlihat lebih homogen. Sedangkan antar kelompok akan terlihat heterogen. *(Montgomery,1984)*

Dengan demikian rancangan acak kelompok lengkap biasanya digunakan untuk eksperimen-eksperimen yang menghasilkan data heterogen. Hal ini dikarenakan pada data yang heterogen usaha pengelompokan akan mempunyai arti. Sedangkan pada data yang homogen, antara dilakukan pengelompokan maupun tidak dilakukan pengelompokan, sama saja. Sehingga pengelompokan pada data homogen dikatakan tidak mempunyai arti.

Adapun tujuan dari dilakukannya pengelompokan adalah untuk memperoleh satuan percobaan yang seseragam mungkin dalam setiap kelompok, sehingga beda yang teramati sebagian besar disebabkan oleh perlakuan.

2.1 Model Linier

Adapun model linier dari rancangan acak kelompok lengkap dengan a buah perlakuan dan b buah kelompok adalah sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad (2.a)$$

$i=1,2,3,...,a \quad j=1,2,3,...,b$

(Montgomery,1984)

dengan:

y_{ij} adalah nilai yang dihasilkan oleh unit-unit eksperimen yang mendapat perlakuan ke-i dan kelompok ke-j

μ adalah nilai rata-rata keseluruhan

τ_i adalah pengaruh dari perlakuan ke-i

β_j adalah pengaruh dari kelompok ke-j

ε_{ij} adalah galat yang diasumsikan NID$(0, \sigma^2)$

Model linier untuk rancangan acak kelompok lengkap seperti dalam persamaan (2.a) dapat dipandang sebagai dua keadaan yaitu sebagai model tetap dan model acak. Dalam penulisan tugas akhir hanya dibatasi pada model tetap saja.

Dengan asumsi:

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \qquad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

Model persaman (2.a) menggambarkan bahwa nilai-nilai observasi yang dihasilkan dari sebuah rataan umum μ yang mendapat pengaruh perlakuan τ_i dan pengaruh kelompok β_j serta pengaruh sebuah sumber variansi yang tak terkendali ε_{ij}. Asumsi pada model tetap ini digunakan untuk mendapatkan estimasi parameter model. (akan dibahas pada 2.1.1)

2.1.1 Estimasi Parameter Model

Diperoleh dari persamaan (2.a) nilai harapan y_{ij} adalah sebesar $\mu + \tau_i + \beta_j$ atau dilambangakan $E(y_{ij}) = \mu + \tau_i + \beta_j$. Persamaan (2.a) merupakan persamaan populasi yang mengandung tiga parameter yaitu μ, τ_i dan β_j. Estimasi dari ketiga parameter tersebut dapat diduga dengan metode kuadrat terkecil (least square). Dalam metode kuadrat terkecil pada prinsipnya adalah mencari estimator-estimator bagi parameter dengan mengusahakan agar jumlah kuadrat galatnya sekecil mungkin.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j$$

$$Q = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij}^{2} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right)^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right)(-1)$$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 0$, maka

$$-2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} - ab\mu - b\sum_{i=1}^{a}\tau_i - a\sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$$

Karena model tetap maka $\sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0$ dan $\sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$, jadi

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} - ab\mu = 0$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}}{ab}$$

$$\hat{\mu} = \frac{y_{..}}{ab} = \bar{y}_{..}$$

Syarat harga ekstrim untuk meminimumkan Q adalah $\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu^2} > 0$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \mu^2} = 2ab > 0 \text{ maka } \hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau_i} = 2\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right)(-1)$$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial \tau_i} = 0$, maka

$$-2\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b} y_{ij} - b\mu - b\tau_i - \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$$

Karena model tetap maka $\sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$, jadi

$$\sum_{j=1}^{b} y_{ij} - b\mu - b\tau_i = 0$$

$$\tau_i = \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{ij}}{b} - \frac{b\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}}{abb}$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{y_{i.}}{b} - \frac{y_{..}}{ab} = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$$

Syarat harga ekstrim untuk meminimumkan Q adalah $\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau_i^{\,2}} > 0$

$\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau_i^{\,2}} = 2b > 0$ maka $\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = 2\sum_{i=1}^{a}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right)(-1)$$

Karena $\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = 0$, maka

$$-2\sum_{i=1}^{a}\left(y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\left(y_{ij}-\mu-\tau_i-\beta_j\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{a}y_{ij}-a\mu-\sum_{i=1}^{a}\tau_i-a\beta_j=0$$

Karena model tetap maka $\sum_{i=1}^{a}\tau_i=0$, jadi

$$\sum_{i=1}^{a}y_{ij}-a\mu-a\beta_j=0$$

$$\beta_i=\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{ij}}{a}-\frac{a\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij}}{aab}$$

$$\hat{\beta}_i=\frac{y_{.j}}{a}-\frac{y_{..}}{ab}=\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}$$

Syarat harga ekstrim untuk meminimumkan Q adalah $\frac{\partial^2 Q}{\partial\beta_j{}^2}>0$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\beta_j{}^2}=2a>0 \text{ maka } \hat{\beta}_i=\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}$$

Dari hasil penghitungan diatas diperoleh nilai dari $\hat{\mu}$, $\hat{\tau}_i$ dan $\hat{\beta}_j$ yaitu masing-masing sebagai berikut:

$$\hat{\mu}=\bar{y}_{..}\ ;\ \hat{\tau}_i=\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..} \text{ dan } \hat{\beta}_j=\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}$$

Dengan demikian,

$$\hat{y}_{ij}=\bar{y}_{..}+\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)+\left(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}\right)$$

$$\hat{y}_{ij}=\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}$$

2.2 Analisis Statistik

Misalkan dalam suatu eksperimen terdapat a buah perlakuan. Masing-masing akan diuji apakah benar bahwa perlakuan memang mempunyai pengaruh yang nyata terhadap variansi galat. Dengan menggunakan kriteria-kriteria tertentu unit-unit eksperimen dikelompokkan kedalam b buah kelompok. Lay out data untuk rancangan acak kelompok lengkap terlihat dalam tabel A adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1 : Bentuk Umum Rancangan Acak Kelompok Lengkap

		perlakuan					total
		1	2	3	...	a	
kelompok	1	y_{11}	y_{21}	y_{31}	...	y_{a1}	$y_{.1}$
	2	y_{12}	y_{22}	y_{32}	...	y_{a2}	$y_{.2}$
	3	y_{13}	y_{23}	y_{33}	...	y_{a3}	$y_{.3}$
	...	...	...	...	...	...	...
	b	y_{1b}	y_{2b}	y_{3b}	...	y_{ab}	$y_{.b}$
total		$y_{1.}$	$y_{2.}$	$y_{3.}$	...	$y_{a.}$	$y_{..}$

Selanjutnya didefinisikan :

y_{ij} adalah nilai yang dihasilkan oleh unit-unit eksperimen yang mendapat perlakuan ke-*i* dan kelompok ke-*j*

$y_{i.}$ adalah total nilai dari unit-unit eksperimen yang mendapat perlakuan ke-*i*

$y_{.j}$ adalah total nilai dari unit-unit eksperimen yang mendapat kelompok ke-*j*

$y_{..}$ adalah total nilai dari seluruh unit-unit eksperimen

$\bar{y}_{i.}$ adalah rata-rata perlakuan ke-*i*

$\bar{y}_{.j}$ adalah rata-rata kelompok ke-*j*

$\bar{y}_{..}$ adalah rata-rata total

Jumlah pengamatan pada Rancangan Acak Kelompok Lengkap adalah (axb) buah pengamatan.

Sebagaimana disebutkan dalam pembahasan sebelumnya bahwa maksud dari rancangan acak kelompok lengkap adalah untuk mengetahui adanya pengaruh dari perlakuan dan kelompok. Sehingga hipotesis yang diuji adalah apakah perlakuan berpengaruh nyata terhadap variansi unit-unit eksperimen. Untuk itu hipotesisnya dirumuskan sebagai:

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_a = \mu$

H_1 : setidaknya ada $\mu_i \neq \mu_j$ untuk sepasang $i \neq j$

Hipotesis nol bahwa $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_a = \mu$ yang menggambarkan tidak adanya perbedaan rata-rata dari tiap level perlakuan dapat diartikan bahwa perlakuan tidak mempunyai pengaruh terhadap variansi unit-unit eksperimen. Sebaliknya jika memang perlakuan berpengaruh secara signifikan maka akan menimbulkan variansi unit-unit eksperimen yang terlihat dari perdedaan rata-rata antar level perlakuan. Karena μ_i dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu_i = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}(\mu + \tau_i + \beta_j)$$

$$= \frac{1}{b}b\mu + \frac{1}{b}b\tau_i + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\beta_j \text{ , karena } \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$$

$$= \mu + \tau_i$$

Dan karena μ merupakan konstanta maka hipotesis diatas juga identik dengan:

H_0 : $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = ... = \tau_a = 0$

H_1 : $\tau_i \neq 0$ paling sedikit untuk sebuah $i \neq j$

Dengan demikian menguji hipotesis bahwa mean-mean perlakuan adalah sama, ekuivalen dengan menguji hipotesis efek-efek perlakuan sama dengan nol. Untuk memutuskan apakah hipotesis tersebut dapat diterima atau tidak, maka selanjutnya dilihat tabel analisis variansi (anova) yang dihasilkan.

Untuk kelompok sehingga hipotesis yang diuji adalah apakah kelompok berpengaruh nyata terhadap variansi unit-unit eksperimen. Untuk itu hipotesisnya dirumuskan sebagai:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_b = 0$

$H_1: \beta_j \neq 0$ paling sedikit untuk sebuah $i \neq j$

Menguji hipotesis efek-efek kelompok sama dengan nol, untuk memutuskan apakah hipotesis tersebut dapat diterima atau tidak, maka selanjutnya dilihat tabel analisis variansi (anova) yang dihasilkan.

2.3 Penguraian Jumlah Kuadrat

Keragaman nilai-nilai obsevasi sebagai akibat pengaruh perlakuan, kelompok maupun galat dapat dilihat dari besarnya jumlah kuadrat total atau **JKT** yang dirumuskan $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$. Untuk mengetahui seberapa besar jumlah kuadrat yang diakibatkan oleh perlakuan, kelompok serta jumlah kuadrat yang tidak terdeteksi sebagai pengaruh dari galat maka **JKT** diuraikan komponen-komponennya.

Berdasarkan persamaan (2.a) maka $\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j$

Sedangkan dari hasil estimasi diperoleh : $\hat{\mu} = \bar{y}_{..}$; $\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$ dan $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$

Sehingga

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{..} - (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) - (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$

$$= y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}$$

Jika ε_{ij} ini dan nilai-nilai estimator diatas disubtitusikan ke persamaan 2.a maka menjadi:

$$y_{ij} = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$$

$$(y_{ij} - \bar{y}_{..}) = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$$

$$(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 + 2(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$
$$+ 2(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) + 2(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$
$$+ \underbrace{2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})}_{\mathbf{A}} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})}_{\mathbf{B}}$$
$$+ \underbrace{2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})}_{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{i.}\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{i.}\bar{y}_{..} - \bar{y}_{.j}\bar{y}_{..} + \bar{y}_{..}^{\,2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{i.}\bar{y}_{.j} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j}\bar{y}_{..} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{..}^{\,2}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j} - b\bar{y}_{..}\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.} - a\bar{y}_{..}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j} + ab\bar{y}_{..}^{\,2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}}{b}\frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}}{a} - b\frac{y_{..}}{ab}\frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}}{b} - a\frac{y_{..}}{ab}\frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}}{a} + ab\frac{y_{..}^{\,2}}{(ab)^2}$$

$$= \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} - \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} - \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} + \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} = 0$$

$$\mathbf{B}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{i.}y_{ij}-\bar{y}_{i.}^{\ 2}-\bar{y}_{i.}\bar{y}_{.j}+2\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..}-\bar{y}_{..}y_{ij}+\bar{y}_{..}\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}^{\ 2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{i.}y_{ij}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{i.}^{\ 2}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{i.}\bar{y}_{.j}+2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{..}y_{ij}+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{..}\bar{y}_{.j}$$

$$-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{..}^{\ 2}$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}\sum_{j=1}^{b}y_{.j}-b\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}^{\ 2}-\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j}+2b\bar{y}_{..}\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij}+a\bar{y}_{..}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j}$$

$$-ab\bar{y}_{..}^{\ 2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i.}}{b}\sum_{j=1}^{b}y_{.j}-b\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i.}^{\ 2}}{(b)^2}-\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i.}}{b}\frac{\sum_{j=1}^{b}y_{.j}}{a}+2b\frac{y_{..}}{ab}\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i.}}{b}-\frac{y_{..}}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij}$$

$$+a\frac{y_{..}}{ab}\frac{\sum_{j=1}^{b}y_{.j}}{a}-ab\frac{y_{..}^{\ 2}}{(ab)^2}$$

$$=\frac{y_{..}^{\ 2}}{b}-\frac{y_{..}^{\ 2}}{b}-\frac{y_{..}^{\ 2}}{ab}+2\frac{y_{..}^{\ 2}}{ab}-\frac{y_{..}^{\ 2}}{ab}+\frac{y_{..}^{\ 2}}{ab}-\frac{y_{..}^{\ 2}}{ab}=0$$

$$\mathbf{C}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j}y_{ij}-\bar{y}_{.j}\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}^{\ 2}+\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..}-\bar{y}_{..}y_{ij}+2\bar{y}_{..}\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}^{\ 2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j}y_{ij}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j}\bar{y}_{i.}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j}^{\ 2}+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{..}y_{ij}$$

$$+2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{..}\bar{y}_{.j}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{..}^{\ 2}$$

$$= \sum_{j=1}^{b} \bar{y}_{.j} \sum_{i=1}^{a} y_{i.} - \sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i.} \sum_{j=1}^{b} \bar{y}_{.j} - a\sum_{j=1}^{b} \bar{y}_{.j}^{\,2} + b\bar{y}_{..} \sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} + 2a\bar{y}_{..} \sum_{j=1}^{b} \bar{y}_{.j}$$

$$- ab\bar{y}_{..}^{\,2}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}}{a} \sum_{i=1}^{a} y_{i.} - \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}}{b} \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}}{a} - a\frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^{\,2}}{a^2} + b\frac{y_{..}}{ab}\frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}}{b} - \frac{y_{..}}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}$$

$$+ 2a\frac{y_{..}}{ab}\frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}}{a} - ab\frac{y_{..}^{\,2}}{(ab)^2}$$

$$= \frac{y_{..}^{\,2}}{a} - \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} - \frac{y_{..}^{\,2}}{a} + \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} - \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} + 2\frac{y_{..}^{\,2}}{ab} - \frac{y_{..}^{\,2}}{ab} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

$$+ 0 + 0 + 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2}_{\text{JKT}} = \underbrace{b\sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}_{\text{JKP}} + \underbrace{a\sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2}_{\text{JKB}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2}_{\text{JKG}}$$

JKT mengambil besarnya variasi total yang diakibatkan oleh perlakuan, kelompok dan galat. **JKP** menggambarkan besarnya variasi yang disebabkan oleh perlakuan. **JKB** menggambarkan besarnya variasi yang disebabkan oleh kelompok. Sedangkan **JKG** merupakan besarnya variasi yang tidak terdeteksi. Dalam prakteknya penghitungan dengan menggunakan rumus diatas terlalu rumit. Untuk itu rumus tersebut dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\textbf{JKP} = b\sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = b\sum_{i=1}^{a} \left(\bar{y}_{i.}^{\,2} - 2\bar{y}_{i.}\bar{y}_{..} + \bar{y}_{..}^{\,2}\right)$$

$$= b\sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i.}^{\,2} - 2b\bar{y}_{..} \sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i.} + ab\bar{y}_{..}^{\,2} = b\frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}^{\,2}}{b^2} - 2b\frac{y_{..}}{ab}\frac{y_{..}}{b} + ab\frac{y_{..}^{\,2}}{(ab)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab}$$

$$\textbf{JKB} = a\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)^2 = a\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j}^{\,2} - 2\bar{y}_{.j}\bar{y}_{..} + \bar{y}_{..}^{\,2}\right)$$

$$= a\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j}^{\,2} - 2a\bar{y}_{..}\sum_{j=1}^{b}\bar{y}_{.j} + ab\bar{y}_{..}^{\,2} = a\frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2}{a^2} - 2a\frac{y_{..}}{ab}\frac{y_{..}}{a} + ab\frac{y_{..}^2}{(ab)^2}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab}$$

$$\textbf{JKT} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij}^2 - y_{ij}\bar{y}_{..} + \bar{y}_{..}^{\,2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \bar{y}_{..}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} + ab\bar{y}_{..}^{\,2} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}}{ab}y_{..} + ab\frac{y_{..}^2}{(ab)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{ab}$$

$$\textbf{JKG} = \textbf{JKT} - \textbf{JKP} - \textbf{JKB}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i.}^2}{b} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j}^2}{a} + \frac{y_{..}^2}{ab}$$

Derajat bebas dari **JKT**, **JKP**, **JKB** masing-masing adalah *(ab-1), (a-1), (b-1)*. Sedangkan derajat bebas dri **JKG** merupakan hasil pengurangan dari derajat bebas **JKT** terhadap derajat bebas **JKB** dan **JKP** yaitu *(ab-1)-(a-1(-(b-1) = ab-a-b+1*. Hasil bagi antara jumlah kuadrat dengan derajat bebas dinamakan kuadrat tengah sehingga:

$$\textbf{KTP} = \frac{\textbf{JKP}}{a-1};\quad \textbf{KTB} = \frac{\textbf{JKB}}{b-1}\ \text{dan}\ \textbf{KTG} = \frac{\textbf{JKG}}{ab-a-b+1}$$

Nilai harapan dari masing-masing kuadrat tengah adalah

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{b} y_{ij} = \sum_{j=1}^{b} \left(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}\right)$$

$$= b\mu + b\tau_i + \sum_{j=1}^{b} \beta_j + \sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij} \text{ , karena } \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

$$= b\mu + b\tau_i + \sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij}$$

$$y_{i.}^{\ 2} = (b\mu + b\tau_i + \sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij})^2$$

$$= b^2\mu^2 + b^2\tau_i^{\ 2} + \sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij}^{\ 2} + 2\sum_{m \neq n}^{b} \varepsilon_{im}\varepsilon_{in} + 2b^2\mu\tau_i + 2b\mu\sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij} + 2b\tau_i \sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij}$$

$$E\left(y_{i.}^{\ 2}\right) = b^2\mu^2 + b^2\tau_i^{\ 2} + \sum_{j=1}^{b} E(\varepsilon_{ij}^{\ 2}) + 2\sum_{m \neq n}^{b} E(\varepsilon_{im}\varepsilon_{in}) + 2b^2\mu\tau_i + 2b\mu\sum_{j=1}^{b} E(\varepsilon_{ij})$$

$$+ 2b\tau_i \sum_{j=1}^{b} E(\varepsilon_{ij})$$

Karena : $\varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0$$

$$Var(\varepsilon_{ij}) = E(\varepsilon_{ij}^{\ 2}) - E(\varepsilon_{ij})^2$$

$$\sigma^2 = E(\varepsilon_{ij}^{\ 2}) - 0$$

$$E(\varepsilon_{ij}^{\ 2}) = \sigma^2$$

$$E\left(y_{i.}^{\ 2}\right) = b^2\mu^2 + b^2\tau_i^{\ 2} + \sum_{j=1}^{b} \sigma^2 + 0 + 2b^2\mu\tau_i + 0 + 0$$

$$= b^2\mu^2 + b^2\tau_i^{\ 2} + b\sigma^2 + 2b^2\mu\tau_i$$

$$\sum_{i=1}^{a} \frac{E(y_{i.}^{\ 2})}{b} = \sum_{i=1}^{a} \left(\frac{b^2\mu^2 + b^2\tau_i^{\ 2} + b\sigma^2 + 2b^2\mu\tau_i}{b} \right) = \sum_{i=1}^{a} \left(b\mu^2 + b\tau_i^{\ 2} + \sigma^2 + 2b\mu\tau_i\right)$$

$$= ab\mu^2 + b\sum_{i=1}^{a}\tau_i{}^2 + a\sigma^2 + 2b\mu\sum_{i=1}^{a}\tau_i \text{ , karena } \sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0$$

$$= ab\mu^2 + b\sum_{i=1}^{a}\tau_i{}^2 + a\sigma^2$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij})$$

$$= ab\mu + b\sum_{i=1}^{a}\tau_i + a\sum_{j=1}^{b}\beta_j + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij} \text{ , karena } \sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0 \text{ dan } \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$$

$$= ab\mu + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij}$$

$$y_{..}{}^2 = \left(ab\mu + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij}\right)^2 = a^2b^2\mu^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij}{}^2 + 2ab\mu\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\varepsilon_{ij} + \sum_{ij\neq}\sum_{kl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

$$E(y_{..}{}^2) = a^2b^2\mu^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}E(\varepsilon_{ij}{}^2) + 2ab\mu\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}E(\varepsilon_{ij}) + \sum_{ij\neq}\sum_{kl}E(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl})$$

$$E(y_{..}{}^2) = a^2b^2\mu^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sigma^2 + 0 + 0$$

$$= a^2b^2\mu^2 + ab\sigma^2$$

$$\frac{E(y_{..}{}^2)}{ab} = \frac{a^2b^2\mu^2 + ab\sigma^2}{ab} = ab\mu^2 + \sigma^2$$

$$E(\mathbf{KTP}) = E\left(\frac{\mathbf{JKP}}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1}E\left(\frac{\sum_{i=1}^{a}y_{i.}{}^2}{b} - \frac{y_{..}{}^2}{ab}\right)$$

$$= \frac{1}{a-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{a}E(y_{i.}{}^2)}{b} - \frac{E(y_{..}{}^2)}{ab}\right)$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\left(ab\mu^2 + b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^{\,2} + a\sigma^2\right) - \left(ab\mu^2 + \sigma^2\right)\right]$$

$$E(\textbf{KTP}) = \sigma^2 + b\frac{\sum_{i=1}^{a}\tau_i^{\,2}}{a-1}$$

$$y_{.j} = \sum_{i=1}^{a} y_{ij} = \sum_{i=1}^{a}\left(\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}\right)$$

$$= a\mu + \sum_{i=1}^{a}\tau_i + a\beta_j + \sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij} \text{ , karena } \sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0$$

$$= a\mu + a\beta_j + \sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij}$$

$$y_{.j}^{\,2} = (a\mu + a\beta_j + \sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij})^2$$

$$= a^2\mu^2 + a^2\beta_j^{\,2} + \sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij}^{\,2} + 2\sum_{m\neq n}^{a}\varepsilon_{mj}\varepsilon_{nj} + 2a^2\mu\beta_j + 2a\mu\sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij} + 2a\beta_j\sum_{i=1}^{a}\varepsilon_{ij}$$

$$E\left(y_{.j}^{\,2}\right) = a^2\mu^2 + a^2\beta_j^{\,2} + \sum_{i=1}^{a}E(\varepsilon_{ij}^{\,2}) + 2\sum_{m\neq n}^{a}E(\varepsilon_{mj}\varepsilon_{nj}) + 2a^2\mu\beta_j + 2a\mu\sum_{i=1}^{a}E(\varepsilon_{ij})$$

$$+ 2a\beta_j\sum_{i=1}^{a}E(\varepsilon_{ij})$$

Karena : $\varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0$$

$$Var(\varepsilon_{ij}) = E(\varepsilon_{ij}^{\,2}) - E(\varepsilon_{ij})^2$$

$$\sigma^2 = E(\varepsilon_{ij}^{\,2}) - 0$$

$$E(\varepsilon_{ij}^{\,2}) = \sigma^2$$

$$E\left(y_{i.}^{2}\right)=a^2\mu^2+a^2\beta_j^{\,2}+\sum_{i=1}^{a}\sigma^2+0+2a^2\mu\beta_j+0+0$$

$$=a^2\mu^2+a^2\beta_j^{\,2}+a\sigma^2+2a^2\mu\beta_j$$

$$\sum_{j=1}^{b}\frac{E(y_{.j}^{\,2})}{a}=\sum_{j=1}^{b}\left(\frac{a^2\mu^2+a^2\beta_j^{\,2}+a\sigma^2+2a^2\mu\beta_j}{a}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{b}\left(a\mu^2+a\beta_j^{\,2}+\sigma^2+2a\mu\beta_j\right)$$

$$=ab\mu^2+a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^{\,2}+b\sigma^2+2a\mu\sum_{j=1}^{b}\beta_j\ \text{, karena } \sum_{j=1}^{b}\beta_j=0$$

$$=ab\mu^2+a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^{\,2}+b\sigma^2$$

$$\frac{E(y_{..}^{\,2})}{ab}=ab\mu^2+\sigma^2$$

$$E(\mathbf{KTB})=E\left(\frac{\mathbf{JKB}}{b-1}\right)=\frac{1}{b-1}E\left(\frac{\sum_{j=1}^{b}y_{.j}^{\,2}}{a}-\frac{y_{..}^{\,2}}{ab}\right)$$

$$=\frac{1}{b-1}\left(\frac{\sum_{j=1}^{b}E(y_{.j}^{\,2})}{a}-\frac{E(y_{..}^{\,2})}{ab}\right)$$

$$=\frac{1}{b-1}\left[\left(ab\mu^2+a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^{\,2}+b\sigma^2\right)-\left(ab\mu^2+\sigma^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{b-1}\left\{(b-1)\sigma^2+a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^{\,2}\right\}$$

$$E(\mathbf{KTB})=\sigma^2+a\frac{\sum_{j=1}^{b}\beta_j^{\,2}}{b-1}$$

$$y_{ij} = (\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij})$$

$$y_{ij}^2 = (\mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij})^2$$

$$= \mu^2 + \tau_i^2 + \beta_j^2 + \varepsilon_{ij}^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\beta_j + 2\mu\varepsilon_{ij} + 2\tau_i\beta_j + 2\tau_i\varepsilon_{ij} + \beta_j\varepsilon_{ij}$$

$$E(y_{ij}^2) = \mu^2 + \tau_i^2 + \beta_j^2 + E(\varepsilon_{ij}^2) + 2\mu\tau_i + 2\mu\beta_j + 2\mu E(\varepsilon_{ij}) + 2\tau_i\beta_j + 2\tau_i E(\varepsilon_{ij})$$

$$+ \beta_j E(\varepsilon_{ij})$$

Karena : $\varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0$$

$$Var(\varepsilon_{ij}) = E(\varepsilon_{ij}^2) - E(\varepsilon_{ij})^2$$

$$\sigma^2 = E(\varepsilon_{ij}^2) - 0$$

$$E(\varepsilon_{ij}^2) = \sigma^2$$

$$E(y_{ij}^2) = \mu^2 + \tau_i^2 + \beta_j^2 + \sigma^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\beta_j + 0 + 2\tau_i\beta_j + 0 + 0$$

$$E(y_{ij}^2) = \mu^2 + \tau_i^2 + \beta_j^2 + \sigma^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\beta_j + 2\tau_i\beta_j$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} E(y_{ij}^2) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\mu^2 + \tau_i^2 + \beta_j^2 + \sigma^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\beta_j + 2\tau_i\beta_j)$$

$$= ab\mu^2 + b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2 + a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + ab\sigma^2 + 2b\mu\sum_{i=1}^{a}\tau_i + 2a\mu\sum_{j=1}^{b}\beta_j$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{a}\tau_i\sum_{j=1}^{b}\beta_j \text{ , karena } \sum_{i=1}^{a}\tau_i = 0 \text{ dan } \sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0$$

$$= ab\mu^2 + b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2 + a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + ab\sigma^2 + 0 + 0 + 0$$

$$= ab\mu^2 + b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2 + a\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2 + ab\sigma^2$$

$$\sum_{i=1}^{a}\frac{E\left(y_{i.}{}^{2}\right)}{b}=ab\mu^{2}+b\sum_{i=1}^{a}\tau_{i}{}^{2}+a\sigma^{2}$$

$$\sum_{j=1}^{b}\frac{E\left(y_{.j}{}^{2}\right)}{a}=ab\mu^{2}+a\sum_{j=1}^{b}\beta_{j}{}^{2}+b\sigma^{2}$$

$$\frac{E(y_{..}{}^{2})}{ab}=ab\mu^{2}+\sigma^{2}$$

$$\textbf{JKG}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..}\right)^{2}$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}y_{ij}{}^{2}-\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i.}{}^{2}}{b}-\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{.j}{}^{2}}{a}+\frac{y_{..}{}^{2}}{ab}$$

$$E(\textbf{JKG})=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}E(y_{ij}{}^{2})-\sum_{i=1}^{a}\frac{E(y_{i.}{}^{2})}{b}-\sum_{j=1}^{b}\frac{E(y_{.j}{}^{2})}{a}+\frac{E(y_{..}{}^{2})}{ab}$$

$$=\left(ab\mu^{2}+b\sum_{i=1}^{a}\tau_{i}{}^{2}+a\sum_{j=1}^{b}\beta_{j}{}^{2}+ab\sigma^{2}\right)-\left(ab\mu^{2}+b\sum_{i=1}^{a}\tau_{i}{}^{2}+a\sigma^{2}\right)$$

$$-\left(ab\mu^{2}+a\sum_{j=1}^{b}\beta_{j}{}^{2}+b\sigma^{2}\right)+\left(ab\mu^{2}+\sigma^{2}\right)$$

$$=ab\sigma^{2}-a\sigma^{2}-b\sigma^{2}+\sigma^{2}=(ab-a-b+1)\sigma^{2}$$

$$E(\textbf{KTG})=\frac{E(\textbf{JKG})}{ab-a-b+1}=\frac{(ab-a-b+1)\sigma^{2}}{ab-a-b+1}=\sigma^{2}$$

Dari hasil penghitungan diatas diperoleh nilai harapan dari kuadrat tengah adalah

$$E(\textbf{KTP})=\sigma^{2}+b\frac{\sum_{i=1}^{a}\tau_{i}{}^{2}}{a-1}$$

$$E(\textbf{KTB})=\sigma^{2}+a\frac{\sum_{j=1}^{b}\beta_{j}{}^{2}}{b-1}$$

$$E(\textbf{KTG})=\sigma^{2}$$

Untuk memudahkan analisis maka komponen-komponen tersebut selanjutnya tersusun dalam sebuah tabel yang dinamakan tabel anova.

Tabel 2.2 Analisis Variansi Untuk Rancangan Acak Kelompok Lengkap

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Rata-rata Kuadrat	E(KT)	F_{hit}
Perlakuan	*a-1*	**JKP**	**KTP**	$\sigma^2 + b\frac{\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$	**KTP/KTG**
Kelompok	*b-1*	**JKB**	**KTB**	$\sigma^2 + a\frac{\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}$	**KTB/KTG**
Galat	*ab-a-b+1*	**JKG**	**KTG**	σ^2	
Total	*ab-1*	**JKT**			

Jika benar bahwa perlakuan mempunyai pengaruh yang nyata maka hal ini akan terlihat dari besarnya jumlah kuadrat perlakuan. Sehingga untuk menguji hipotesis bahwa perlakuan mempunyai pengaruh nyata, jumlah kuadrat perlakuan merupakan komponen penting dalam uji statistik. Selanjutnya uji statistik yamg digunakan adalah

$$F_{hit} = \frac{\textbf{KTP}}{\textbf{KTG}} = \frac{\textbf{JKP}/(a-1)}{\textbf{JKG}/(ab-a-b+1)}$$

Dibawah asumsi H_0 benar maka F_{hit} akan berdistribusi F dengan derajat bebas *(a-1)* dan *ab-a-b+1*. Sehingga dengan tingkat kenyakinan sebesar α maka H_0 akan ditolak jika F_{hit} lebih besar dari $F_{\alpha;(a-1);ab-a-b+1}$.

Jika benar bahwa kelompok mempunyai pengaruh yang nyata maka hal ini akan terlihat dari besarnya jumlah kuadrat kelompok. Sehingga untuk menguji hipotesis bahwa kelompok mempunyai pengaruh nyata, jumlah kuadrat kelompok merupakan komponen penting dalam uji statistik. Selanjutnya uji statistik yamg digunakan adalah

$$F_{hit} = \frac{\mathbf{KTB}}{\mathbf{KTG}} = \frac{\mathbf{JKB}/_{b-1}}{\mathbf{JKG}/_{ab-a-b+1}}$$

Dibawah asumsi H_0 benar maka F_{hit} akan berdistribusi F dengan derajat bebas $(a-1)$ dan $ab-a-b+1$. Sehingga dengan tingkat kenyakinan sebesar α maka H_0 akan ditolak jika F_{hit} lebih besar dari $F_{\alpha;(b-1);ab-a-b+1}$.

Uji lanjut yang digunakan untuk membandingakn semua perlakuan uji lanjut perbandingan ganda yang menggunakan metode LSD (Least Significant Difference).

Langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Hitung galat baku dari perlakuan ke-i dan perlakuan ke-j

   $$S_{\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.}} = \sqrt{\mathbf{KTG}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$, untuk data tidak seimbang

   dengan

   n_i = banyaknya pengulangan tiap perlakuan ke-i.

   n_j = banyaknya pengulangan tiap perlakuan ke-j.

   $$S_{\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.}} = \sqrt{\frac{2(\mathbf{KTG})}{n}}$$, untuk data seimbang sebab $n_1 = n_2 = \ldots = n$

2. Hitung LSD yaitu

   $$LSD = t_{\alpha/2;db(galat)} S_{\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{j.}}$$

   dengan

   $t_{\alpha/2;db(galat)}$ = tabel t dengan α sebagai tingkat signifikan

3. Jika $|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}|$ lebih besar dari LSD maka pasangan mean tersebut berbeda secara signifikan dan diberi tanda *.