BAB II

RANCANGAN FAKTORIAL

2.1. RANCANGAN FAKTORIAL a x b

Percobaan dengan satu faktor yang terdiri beberapa taraf dapat diselesaikan dengan rancangan acak lengkap, rancangan acak kelompok ataupun rancangan bujursangkar. Pada rancangan bentuk ini analisa dilakukan untuk menyelidiki apakah terdapat perbedaan yang berarti mengenai rata - rata efek tiap taraf ataukah tidak.

Dalam praktek sering kali dijumpai percobaan yang tidak hanya memerlukan satu faktor tetapi lebih dari satu faktor yang diteliti secara bersamaan. Dalam hal ini tiap perlakuan merupakan kombinasi taraf faktor yang dicobakan. Apabila tiap faktor terdiri beberapa taraf maka kombinasi tertentu dari taraf tiap faktor menentukan kombinasi perlakuan. Percobaan seperti ini disebut percobaan faktorial. Jadi percobaan faktorial adalah percobaan yang mempunyai lebih dari satu faktor dimana semua taraf dari sebuah faktor dikombinasikan atau disilangkan dengan semua taraf dari setiap faktor lainnya.

Sedangkan yang dimaksud dengan rancangan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak lengkap tidak lain adalah menggunakan rancangan acak lengkap sebagai rancangan percobaannya, sedangkan faktor yang dicobakan lebih dari satu. Pada rancangan acak lengkap unit percobaan harus homogen atau relatif homogen.

Jika unit percobaan ini tidak homogen maka perlu dikelompok - kelompokkan dalam kelompok - kelompok tertentu sehingga unit percobaan dalam kelompok tersebut menjadi relatif homogen. Dengan demikian proses pengelompokan adalah membuat keragaman dalam kelompok menjadi sekecil mungkin dan keragaman antar kelompok menjadi sebesar mungkin. Rancangan yang disusun demikian disebut rancangan acak kelompok. Maka rancangan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak kelompok adalah menggunakan rancangan acak kelompok sebagai rancangan percobaannya, sedangkan faktor yang dicobakan lebih dari satu faktor.

Berdasarkan banyaknya taraf dalam tiap faktor pada rancangan faktorial maka rancangan ini diberi nama dengan menambahkan perkalian antara banyaknya taraf faktor yang satu dengan banyaknya taraf faktor yang lainnya. Misalnya dalam percobaan digunakan dua buah faktor yaitu faktor A dengan dua taraf dan faktor B dengan tiga taraf maka didapat rancangan faktorial 2 x 3 dengan enam kombinasi perlakuan yaitu : A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, dan A_2B_3.

Untuk rancangan faktorial yang mempunyai dua buah faktor dengan masing - masing terdiri a taraf dan b taraf serta masing - masing perlakuan diulang n kali (rancanga faktorial a x b), maka model matematika untuk rancangan faktorial yang menggunakan rancangan dasar rancangan acak lengkap ini adalah :

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + \xi_{ijk}$$

dengan

Y_{ijk} : Variabel respon replikasi ke -k yang terjadi karena pengaruh bersama taraf-i faktor A dan taraf ke- j faktor B.

μ : Rata - rata

A_i : Efek taraf ke-i faktor A

B_j : Efek taraf ke-j faktor B

AB_{ij} : Efek interaksi taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B

ξ_{ijk} : Galat percobaan pada taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B serta replikasi ke-k .

Galat atau kesalahan percobaan ξ diasumsikan berdistribusi normal dan bebas dengan rata - rata nol dan varian σ^2 atau ditulis $\xi_{ijk} \sim DNI(0, \sigma^2)$. Untuk keperluan analisis, data disusun sebagai berikut:

Tabel 3.1

	Taraf	Faktor B				Jumlah
		1	**2**	**...**	**b**	
Faktor A	**1**	X_{111} X_{112} . . . X_{11n}	X_{121} X_{122} . . . X_{12n}	... ... :	X_{1b1} X_{1b2} . . . X_{1bn}	
	....	....	....	....	....	....
	a	X_{a11} X_{a12} . . . X_{a1n}	X_{a21} X_{a22} . . . X_{a2n}	... ...	X_{ab1} X_{ab2} . . . X_{abn}	
	Jumlah	J_{a10}	J_{a20}	...	J_{ab0}	J_{a00}
	Jumlah Besar	J_{010}	J_{020}	...	J_{0b0}	J_{000}

Berdasarkan model diatas maka untuk keperluan ANAVA perlu dihitung harga - harga jumlah kuadrat (JK) sebagai berikut :

$$J_{i..} = \sum_{j,k} X_{ijk}$$
$$J_{.j.} = \sum_{i,k} X_{ijk}$$
$$J_{ij.} = \sum_{k} X_{ijk}$$
$$J_{...} = \sum_{i,j,k} X_{ijk}$$
$$FK = \frac{(J_{...})^2}{abn}$$
$$JK(T) = \sum_{i,j,k} (X_{ijk})^2 - FK$$
$$JK(A) = \sum_{i} \frac{(J_{i..})^2}{bn} - FK$$
$$JK(B) = \sum_{j} \frac{(J_{.j.})^2}{an} - FK$$
$$JK(P) = \sum_{i,j} \frac{(J_{ij.})^2}{n} - FK$$
$$JK(AB) = JK(P) - JK(A) - JK(B)$$
$$JK(G) = JK(T) - JK(A) - JK(B) - JK(AB)$$

Daftar ANAVA untuk rancangan percobaan faktorial a x b dengan harga - harga jumlah kuadrat seperti di atas adalah sebagai berikut :

Tabel 3.2

Sumber variasi	db	JK	KT
Perlakuan	ab - 1	JK(P)	KT(P)
Faktor A	a - 1	JK(A)	KT(A)
Faktor B	b - 1	JK(B)	KT(B)
Interaksi AB	(a - 1)(b - 1)	JK(AB)	KT(AB)
Galat	ab (n - 1)	JK(G)	KT(G)
Total	abn-1	JK(T)	-

Tampak dalam daftar ANAVA ada tiga sumber variasi yaitu perlakuan, galat percobaan dan total. Jika jumlah kuadrat (JK) tiap sumber variasi dibagi oleh derajat bebas (db) masing-masing didapat kuadrat tengah (KT) sumber variasi itu.

Batas daerah kritis untuk masing-masing pengujian ditentukan oleh taraf signifikan α yang dipilih dari distribusi F dengan derajat bebas pembilang diambil dari daftar ANAVA di atas sesuai dengan perlakuan masing-masing dipasangkan dengan derajat bebas penyebut, dibagi derajat bebas galat. Sedangkan kriterianya adalah tolak hipotesa nol (H_0) jika F_α lebih kecil dibandingkan dengan statistik dari daftar ANAVA.

Dari data pengamatan dan daftar ANAVA maka dapat diambil kesimpulan khususnya mengenai efek-efek perlakuan. Akan tetapi sebelum hal ini dilakukan, beberapa asumsi perlu diambil agar pengujian statistik dapat berlaku. Asumsi yang biasa diambil dalam ANAVA adalah sifat-sifat :

1. Aditif

   Yang dimaksud dengan sifat aditif yaitu dapat dijumlahkan sesuai dengan model yang diambil. Misalkan untuk model faktorial a x b diatas, maka Y_{ijk} merupakan hasil penjumlahan dari μ, A_i, B_j, AB_{ij}, dan ξ_{ijk}. Jika model tidak bersifat aditif maka perlu dilakukan transformasi.

2. Independen

   Artinya galat percobaan harus bebas (peluang bahwa galat dari salah satu pengamatan yang mempunyai nilai tertentu tidak tergantung dari nilai galat untuk pengamatan yang lain).

3. Homogenitas

   Galat percobaan harus mempunyai varian bersama (common on variance). Artinya semua komponen galat yang diakibatkan oleh beberapa perlakuan semuanya harus diduga dari varian populasi.

4. Normalitas

Artinya galat percobaan harus menyebar secara normal.

Untuk melakukan uji statistik maka perlu diketahui model statistik mana yang diambil. Model yang dimaksud ditentukan oleh sifat taraf tiap faktor, apakah tetap ataukah acak dan berdasarkan ini maka pada rancangan faktorial dikenal model-model sebagai berikut :

1. Model I (model tetap)

Apabila dalam percobaan digunakan taraf faktor yang masing-masing tetap banyaknya dan semuanya digunakan dalam percobaan sehingga kesimpulan yang diambil untuk semua taraf yang digunakan dalam percobaan tersebut. Model seperti ini disebut model tetap atau model I. Asumsi yang digunakan pada model ini adalah :

$$\sum_i A_i = \sum_j B_j = \sum_i AB_{ij} = \sum_j AB_{ij} = 0$$

artinya semua pengaruh perlakuan, baik itu pengaruh interaksi, pengaruh faktor A maupun pengaruh faktor B dianggap tetap. Hipotesa untuk model I adalah :

1. $H_0 : AB_{ij} = 0$ tidak ada pengaruh interaksi terhadap respon yang diamati.

   $H_1 : AB_{ij} \neq 0$ ada pengaruh interaksi terhadap respon yang diamati.

2. $H_0 : A_i = 0$ tidak terdapat perbedaan respon diantara taraf faktor A.

   $H_1 : A_i \neq 0$ ada perbedaan respon diantara taraf faktor A.

3. $H_0 : B_j = 0$ tidak terdapat perbedaan respon diantara taraf faktor B.

   $H_1 : B_j \neq 0$ ada perbedaan respon diantara taraf faktor B.

Tabel 3.3
Daftar ANAVA model I

Sumber variasi	db	JK	KT	Uji F
Efek utama A	a - 1	JK(A)	KT(A)	KT(A)/KT(G)
, B	b - 1	JK(B)	KT(B)	KT(B)/KT(G)
Efek interaksi AB	(a - 1)(b - 1)	JK(AB)	KT(AB)	KT(AB)/KT(G)
Galat	ab(n - 1)	JK(G)	KT(G)	-
Total	abn - 1	JK(T)	-	-

2. Model II (model acak)

Apabila dalam percobaan terdapat sebuah populasi yang terdiri atas sejumlah taraf faktor yang diambil k buah sebagai sampel acak. Sehingga kesimpulan yang diambil bukan hanya untuk sejumlah taraf yang digunakan dalam percobaan tetapi untuk populasi taraf keseluruhan. Maka model seperti ini disebut model acak atau model II. Asumsi yang digunakan untuk model II adalah :

$A_i \sim DNI\ (0,\sigma^2)$

$B_j \sim DNI\ (0,\sigma^2)$

$AB_{ij} \sim DNI\ (0,\sigma^2)$

Hepotesis model acak adalah :

1. $H_0 : \sigma_{AB} = 0$ tidak ada keragaman dalam populasi kombinasi perlakuan.

   $H_1 : \sigma_{AB} > 0$ ada keragaman dalam populasi kombinasi perlakuan.

2. $H_0 : \sigma_A = 0$ tidak ada keragaman dalam populasi taraf faktor A.

   $H_1 : \sigma_A > 0$ ada keragaman dalam populasi taraf faktor A.

3. $H_0 : \sigma_B = 0$ tidak ada keragaman dalam populasi taraf faktor B.

   $H_1 : \sigma_B > 0$ ada keragaman dalam populasi taraf faktor B.

Tabel 3.4
Daftar ANAVA model II

Sumber variasi	db	JK	KT	Uji F
Efek utama A	a - 1	JK(A)	KT(A)	KT(A)/KT(AB)
B	b - 1	JK(B)	KT(B)	KT(B)/KT(AB)
Interaksi AB	(a - 1)(b - 1)	JK(AB)	KT(AB)	KT(AB)/KT(G)
Galat	ab(n - 1)	JK(G)	KT(G)	-
Total	abn - 1	JK(T)	-	-

3. Model campuran : taraf faktor A tetap, taraf faktor B acak .

Jika dalam suatu percobaan faktorial taraf faktor A bersifat tetap dalam arti percobaan digunakan a taraf yang dicobakan, sedangkan taraf faktor B merupakan sampel acak berukuran b yang ditarik dari populasi taraf faktor B, maka model yang digunakan adalah model campuran (taraf faktor A tetap, taraf faktor B acak). Asumsi yang digunakan adalah:

$$\sum_i A_i = \sum_i AB_{ij} = 0$$

$B_j \sim \mathrm{DNI}\ (0,\sigma_B^2)$

$$\sum_j AB_{ij} \neq 0$$

Hepotesis yang diuji untuk model ini adalah :

1. $H_0 : \sigma^2_{AB} = 0$ yang berarti tidak ada keragaman dalam populasi kombinasi perlakuan.

   $H_1 : \sigma^2_{AB} > 0$ yang berarti ada keragaman dalam populasi kombinasi perlakuan.

2. $H_0 : A_i = 0$ yang berarti tidak ada perbedaan respon diantara taraf faktor yang dicobakan.

   $H_1 : A_i \neq 0$ minimal ada satu taraf faktor A yang dicobakan mempengaruhi respon.

3. $H_0 : \sigma_B^2 = 0$ yang berarti tidak ada keragaman dalam populasi taraf faktor B.

$H_1 : \sigma_B^2 > 0$ yang berarti ada keragaman dalam populasi taraf faktor B.

Tabel 3.5
Daftar ANAVA model campuran

Sumber variasi	db	JK	KT	Uji F
Efek utama A	a - 1	JK(A)	KT(A)	KT(A)/KT(AB)
B	b - 1	JK(B)	KT(B)	KT(B)/KT(G)
Interaksi AB	(a - 1)(b - 1)	JK(AB)	KT(AB)	KT(AB)/KT(G)
Galat	ab(n - 1)	JK(G)	KT(G)	-
Total	abn - 1	JK(T)	-	-

4. Model campuran : taraf faktor A acak, taraf faktor B tetap .

Jika dalam suatu percobaan faktorial, taraf faktor A merupakan sampel acak berukuran a yang diambil dari populasi taraf faktor A, sedangkan taraf faktor B bersifat tetap sebanyak b buah taraf yang dicobakan, maka model yang digunakan adalah model campuran (taraf faktor A acak, taraf faktor B tetap).

Asumsi yang digunakan pada model ini adalah :

$A_i \sim DNI\ (0, \sigma_A^2)$

$$\sum_j B_j = \sum_j AB_{ij} = 0$$

$$\sum_i AB_{ij} \neq 0$$

Hipotesa untuk model ini adalah :

1. $H_0 : \sigma^2_{AB} = 0$ yang berarti tidak ada keragaman dalam populasi kombinasi perlakuan.

$H_1 : \sigma^2_{AB} > 0$ yang berarti ada keragaman dalam populasi kombinasi perlakuan.

2. $H_0 : \sigma^2_A = 0$ yang berarti tidak ada keragaman dalam populasi taraf faktor A.

$H_1 : \sigma^2_A > 0$ yang berarti ada keragaman dalam populasi taraf faktor A.

3. $H_0 : B_j = 0$ yang berarti tidak ada perbedaan respon diantara taraf faktor B yang dicobakan.

$H_1 : B_j \neq 0$ minimal ada satu taraf faktor B yang dicobakan yang mempengaruhi respon.

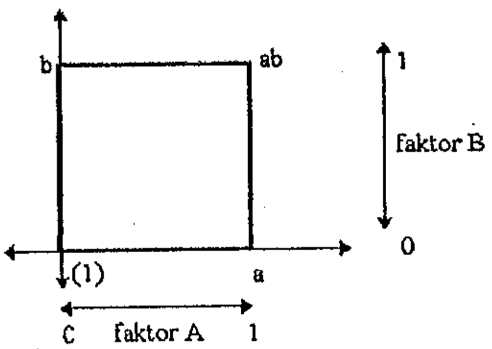
Tabel 3.6

Daftar ANAVA model campuran :

Sumber variasi	db	JK	KT	Uji F
Efek utama A	a - 1	JK(A)	KT(A)	KT(A)/KT(G)
B	b - 1	JK(B)	KT(B)	KT(B)/KT(AB)
Interaksi AB	(a - 1)(b - 1)	JK(AB)	KT(AB)	KT(AB)/KT(G)
Galat	ab(n - 1)	JK(G)	KT(G)	-
Total	abn - 1	JK(T)	-	-

2.2 RANCANGAN FAKTORIAL 2^2 DENGAN MENGGUNAKAN KONTRAS

Seringkali dalam praktek dijumpai suatu percobaan yang melibatkan sejumlah faktor dimana tiap-tiap faktornya hanya terdiri atas dua buah taraf. Jika suatu rancangan percobaan menyangkut k buah faktor dengan masing-masing faktor terdiri dari dua taraf maka rancangan demikian diberi nama rancangan faktorial 2^k. Banyaknya taraf ialah dua, ditulis sebagai bilangan pokok, sedangkan banyaknya faktor adalah k menjadi pangkat.



Gambar 3.1

Perhatikan gambar 1, jika taraf rendah dinyatakan dengan 0 dan taraf tinggi dengan 1 maka sudut-sudut dari bujursangkar diatas berturut-turut dapat dinyatakan dengan : A_0B_0, A_0B_1, A_1B_0 dan A_1B_1.

Kecuali notasi demikian, sering pula digunakan huruf kecil a dan b sebagai ganti A dan B sedangkan indeks 0 dan 1 diubah menjadi pangkat. Dengan demikian didapat :

a^0b^0 Atau selanjutnya dinyatakan dengan (1)

a^0b^1 Disingkat dengan b

a^1b^0 Disingkat dengan a

a^1b^1 Disingkat dengan ab

Dengan notasi baru ini, maka kombinasi perlakuan telah ditulis sebagai (1), a, b dan ab yang berarti :

(1) : Menyatakan kombinasi perlakuan yang terjadi karena taraf rendah faktor A dan taraf rendah faktor B.

a : Menyatakan kombinasi perlakuan yang terjadi karena taraf tinggi faktor A dan taraf rendah faktor B.

b : Menyatakan kombinasi perlakuan yang terjadi karena taraf tinggi faktor B dan taraf rendah faktor A.

ab : Menyatakan kombinasi perlakuan yang terjadi karena taraf tinggi faktor A dan taraf tinggi faktor B.

Berdasarkan data percobaan maka dapat dihitung besarnya pengaruh sederhana (simple effect), pengaruh utama (main effect) dan pengaruh interaksi (interactions).

1. Pengaruh sederhana

Pengaruh sederhana adalah pengaruh suatu faktor tertentu pada taraf tertentu dari faktor lain. Pengaruh sederhana dapat dicari sebagai berikut :

a. Pengaruh sederhana faktor A pada taraf b^0 = a - (1)

b. Pengaruh sederhana faktor A pada taraf b^1 = ab - b

c. Pengaruh sederhana faktor B pada taraf a^0 = b - (1)

d. Pengaruh sederhana faktor B pada taraf a^1 = ab - a

2. Pengaruh utama (main effects) merupakan rata-rata dari pengaruh sederhana. Sehingga untuk menentukan pengaruh utama dari faktor A dan pengaruh utama dari faktor B adalah sebagai berikut :

a. Pengaruh utama faktor A :

$A = 1/2\ ((a - (1)) + (ab - b))$

$A = 1/2\ (-(1) + a - b + ab)$

$2A = -(1) + a - b + ab$

b. Pengaruh utama faktor B :

$B = 1/2\ ((b - (1)) + (ab - a))$

$B = 1/2\ ((1) - a + b + ab)$

$2B = -(1) - a + b + ab$

3. Pengaruh interaksi (interaction) merupakan rata-rata selisih respon diantara pengaruh sederhana suatu faktor. Pengaruh interaksi pada dasarnya menunjukkan hubungan ketergantungan suatu faktor terhadap taraf tertentu dari faktor lain. Artinya pengaruh sederhana suatu faktor tergantung pada taraf tertentu dari faktor lain. Jika hasil

pengujian menunjukan bahwa terdapat interaksi antar faktor maka perlu diketahui sejauh mana sifat ketergantungan antar faktor tersebut. Dalam kasus pengaruh interaksi signifikan maka pengujian terhadap pengaruh utama dari faktor - faktor yang dicobakan menjadi tidak penting, karena pengaruh utama tidak dapat mencerminkan keadaan yang sesungguhnya, hal ini disebabkan pengaruh sederhana dari faktor - faktor yang dicobakan tidak sama besarnya. Jika pengujian menunjukan bahwa pengaruh interaksi tidak signifikan, maka hal ini menunjukan bahwa pengaruh sederhana dari faktor yang dicobakan sama besarnya, karena itu pengaruh utama suatu faktor yang tidak lain merupakan rata - rata pengaruh sederhana mampu mencerminkan pengaruh suatu faktor pada taraf tertentu dari faktor lain. Pada prinsipnya pengujian interaksi digunakan untuk memeriksa apakah pengaruh sederhana sama besar atau tidak. Pengaruh interaksi dapat ditentukan sebagai berikut:

$$AB = 1/2\,(\,(\,ab - b\,) - (\,a - (1)\,)\,)$$

$$AB = 1/2\,(\,ab - b - a + (1)\,)$$

$$AB = 1/2\,(\,(1) - a - b + ab\,)$$

$$2AB = (1) - a - b + ab$$

Sehingga untuk rancangan faktorial 2^2, efek rata-rata kombinasi perlakuan dapat dihitung dengan menggunakan hubungan-hubungan berikut :

$$\text{Total} = (1) + a + b + ab$$

$$2A = -(1) + a - b + ab$$

$$2B = -(1) - a + b + ab$$

$2AB = (1) - a - b + ab$

Jika sistem diatas diperhatikan nampak bahwa :

1. Untuk efek A dan B maka koefisien-koefisien kontras yang masing-masing tidak mengandung a atau b bertanda negatif sedangkan yang mengandung a dan b bertanda positif.
2. Koefisien kontras, jadi juga tanda untuk efek AB didapat dengan jalan mengalikan koefisien kontras efek A dengan koefisien kontras efek B.

Hubungan antara kombinasi perlakuan dan efek yang membentuk kontras diatas akan mudah tampak apabila disusun dalam daftar sebagai berikut :

Tabel 3.7

Kombinasi perlakuan	Efek			
	Total	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

Untuk ANAVA tertentu perlu dihitung jumlah kuadrat semua nilai pengamatan atau $\Sigma Y^2 = \Sigma(Y_{ijk})^2$. Sedangkan jumlah kuadrat tiap efek atau kombinasi perlakuan dihitung dengan JK (efek) = $(\text{kontras})^2 / r2^k$ dengan r menyatakan jumlah replikasi dalam tiap sel kombinasi perlakuan. Jumlah kuadrat galat dilakukan dengan melakukan pengurangan ΣY^2 oleh jumlah kuadrat (JK) semua sumber variasi. Sedangkan kuadrat tengah adalah pembagian JK dengan derajat bebasnya.

Tabel 3.8
Daftar ANAVA rancangan faktorial 2^k

Sumber variasi	db	JK	KT
Efek utama A	k- 1	JK(A)	KT(A)
B	k- 1	JK(B)	KT(B)
Interaksi AB	k(k-1)/2	JK(AB)	KT(AB)
Galat	$2^k(r-1)$	JK(G)	KT(G)
Total	$r2^k-1$	JK(T)	-