BAB III

ESTIMASI KOMPONEN VARIANS DENGAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD DAN REML

3.1. Estimasi Maksimum Likelihood

Definisi 3.1. Suatu statistik yang nilainya digunakan untuk mengestimasi $\tau(\theta)$, di mana $\tau(\cdot)$ adalah beberapa fungsi parameter θ, didefinisikan sebagai estimator $\tau(\theta)$.(Mood, 1974).

Estimator digunakan sebagai statistik yang digunakan untuk menentukan nilai suatu parameter fungsi, yang mana dapat berupa variabel random maupun fungsi. Sedang estimasi digunakan sebagai nilai dari suatu estimator.

Definisi 3.2. Fungsi likelihood n buah variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ didefinisikan sebagai densitas bersama n buah variabel random, katakan $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta)$, yang mana dipandang sebagai fungsi θ. Khususnya, jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari densitas $f(x; \theta)$, maka fungsi likelihood adalah $f(x_1 ; \theta)$ $f(x_2 ; \theta) \cdots f(x_n ; \theta)$.

Fungsi likelihood dinotasikan dengan $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definisi 3.3. Misal $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi likelihood variabel random X_1, $X_2, \ldots, X_n$. Jika $\hat{\theta}$ (di mana $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) adalah fungsi pengamatan

$x_1, x_2, \ldots, x_n$) adalah nilai θ dalam $\underline{\overline{\Theta}}$ yang memaksimalkan $L(\theta)$, maka $\hat{\Theta} = \hat{\vartheta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah estimator maksimum likelihood θ untuk sampel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Menurut Montgomery (1989), jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari fungsi densitas $f(x ; \theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah

$$L(\theta) = f(x_1 ; \theta) f(x_2 ; \theta) \cdots f(x_n ; \theta) \tag{1}$$

Jika $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}$ ada untuk semua x dan θ, maka estimator maksimum likelihoodnya adalah penyelesaian persamaan

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$$

Jika fungsi likelihood berisi k parameter, yaitu jika

$$L(\theta_1, \ldots, \theta_k ; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \tag{2}$$

maka estimator maksimum likelihood parameter $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ adalah variabel-variabel random $\hat{\Theta}_1 = \hat{\vartheta}_1(X_1, \ldots, X_n), \hat{\Theta}_2 = \hat{\vartheta}_2(X_1, \ldots, X_n), \ldots, \hat{\Theta}_k = \hat{\vartheta}_k(X_1, \ldots, X_n)$, di mana $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ adalah nilai-nilai dalam yang memaksimalkan (2).

Jika $\dfrac{\partial L(\theta_1, \ldots, \theta_k ; x_1, \ldots, x_n)}{\partial \theta_i}$ ada untuk semua x dan θ_i, maka estimator maksimum likelihoodnya adalah penyelesaian persamaan k parameter berikut:

$$\frac{\partial L(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{\partial \theta_1}=0$$

$$\frac{\partial L(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{\partial \theta_2}=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{\partial \theta_k}=0$$

Estimasi parameter-parameter fungsi likelihood didasarkan pada asumsi kenormalan, yang didefinisikan pada definisi 2.8.

Jika $\mathbf{y} = [y_{11}\, y_{12} \cdots y_{an}]'$ dan $\mathbf{V} = \text{diag}\,(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_a^2)$,

maka $$L(\mu,\mathbf{V}\,|\,\mathbf{y}) = L = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{an}{2}}\,|\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu\mathbf{1}_{an})'\,\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y}-\mu\mathbf{1}_{an})\right] \qquad (4)$$

yang merupakan fungsi likelihood untuk data seimbang dengan notasi $L(\mu,\mathbf{V}\,|\,\mathbf{y})$.

Persamaan (4) dapat dibuktikan dengan menggunakan prosedur induksi pada nilai an.Untuk basis induksi $k = 1$, dengan menggunakan definisi 2.8, didapat;

$$f_{\mathbf{y}}(y_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{11}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y_{11}-\mu)^2}{\sigma_{11}^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_{11}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(y_{11}-\mu)\left(\sigma_{11}^2\right)^{-1}(y_{11}-\mu)\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\mathbf{V}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\,\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

di mana $\mathbf{y} = [y_{11}]$ $\mathbf{V} = [\sigma_{11}^{2}]$ $|\mathbf{V}| = \sigma_{11}^{2}$ $(\mathbf{V})^{-1} = \dfrac{1}{\sigma_{11}^{2}}$

Jadi persamaan (4) benar untuk $k = 1$.

Misal persamaan (4) benar untuk $k = an$, sehingga dapat ditunjukkan bahwa persamaan (4) benar untuk $k = an + 1$.

Misal $\mathbf{y}_k = \left[y_{11} \quad \cdots \quad y_{an} \mid y_{an+1}\right] = \left[\mathbf{y} \mid y_{an+1}\right]$

$$\mathbf{V}_k = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_{11}^{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{an}^{2} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \sigma_{an+1}^{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{V} & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_2 & \sigma_{an+1}^{2} \end{array}\right].$$

Persamaan tersebut sesuai dengan definisi 2.5, dan karena y_{ij} saling bebas, sehingga dengan menggunakan (31) dan (33);

$L = f_{\mathbf{y}_k}(y_{11}, \ldots, y_{an})\ f(y_{an+1})$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{an}{2}}\left(\sigma_{11}^{2} \cdots \sigma_{an}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\begin{array}{l} \left[\left(y_{11} \quad \cdots \quad y_{an} \mid 0\right) - \left(\mu \quad \cdots \quad \mu \mid 0\right)\right] \\ \dfrac{1}{\left(\sigma_{11}^{2} \cdots \sigma_{an}^{2}\right)} \left[\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{an} \\ \hline 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \\ \hline 0 \end{bmatrix}\right] \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\sigma_{an+1}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\begin{array}{l} \left[\left(0 \quad \cdots \quad 0 \mid y_{an+1}\right) - \left(0 \quad \cdots \quad 0 \mid \mu\right)\right] \\ \dfrac{1}{\left(\sigma_{an+1}^{2}\right)} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline y_{an+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \mu \end{bmatrix}\right] \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{an+1}{2}}\left(\sigma_{11}^2\cdots\sigma_{an}^2\sigma_{an+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[\begin{array}{c}[(y_{11} \ \cdots \ y_{an} \ \ y_{an+1})-(\mu \ \cdots \ \mu \ \ \mu)] \\ \frac{1}{\sigma_{11}^2}\cdots\frac{1}{\sigma_{an}^2}\frac{1}{\sigma_{an+1}^2}\left[\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{an} \\ y_{an+1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mu \\ \vdots \\ \mu \\ \mu\end{bmatrix}\right]\end{array}\right]$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{an+1}{2}}\left|\mathbf{V}_k\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k-\mu\mathbf{1}_{an+1})'\mathbf{V}_k^{-1}(\mathbf{y}_k-\mu\mathbf{1}_{an+1})\right]$$

Jadi persamaan (4) benar untuk nilai *an*.

Dengan menggunakan (26) dan (27) pada bab II,

$$\mathbf{V}^{-1}=\left\{{}_d\,\sigma_\alpha^2\mathbf{J}_n+\sigma_e^2\mathbf{I}_n\right\}^{-1}=\left\{{}_d\frac{1}{\sigma_e^2}\left[\mathbf{I}_n-\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2}\mathbf{J}_n\right]\right\} \tag{5}$$

$$\left|\mathbf{V}\right|=\left|{}_d\,\sigma_\alpha^2\mathbf{J}_n+\sigma_e^2\mathbf{I}_n\right|=\prod_{i=1}^{a}\sigma_e^{2(n-1)}\left(\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2\right) \tag{6}$$

Sehingga persamaan (4) menjadi

$$L=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_i\sum_j y_{ij}-\mu)^2-\frac{n^2\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2}\sum_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\,\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\left(\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}a}} \tag{7}$$

Untuk mendapatkan nilai maksimum, $L(\mu, \mathbf{V}\,|\,\mathbf{y})$ diubah ke dalam bentuk logaritma asli;

$$\begin{aligned} l &= \log L=\log L(\mu,\mathbf{V}|\mathbf{y}) \\ &= -\tfrac{1}{2}N\log 2\pi-\tfrac{1}{2}a(n-1)\log\sigma_e^2-\tfrac{1}{2}a\left(\log\left(\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2\right)\right) \\ &\quad -\frac{\sum_i\sum_j(y_{ij}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}+\frac{n^2\sigma_\alpha^2\sum_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2}{2\sigma_e^2(\sigma_e^2+\sigma_\alpha^2)}\end{aligned} \tag{8}$$

Dua buah bagian terakhir persamaan (8) dapat disusun kembali dengan menggunakan persamaan (56) pada bab II. Sehingga

$$-\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}+\frac{n^2\sigma_\alpha^2\sum_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2}{2\sigma_e^2\left(\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2\right)}$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[SSE+\frac{n\sigma_\alpha^2}{\left(\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2\right)}\left[SSA+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2\right]\right] \qquad (9)$$

<u>Bukti.</u>

$$SSA=\sum_{i=1}^{a} n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2,\quad SSE=\sum_{I=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$

Misal $Z=-\dfrac{\sum_i \sum_j (y_{ij}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}+\dfrac{n^2\sigma_\alpha^2\sum_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2}{2\sigma_e^2\left(\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2\right)}$

$$=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{i.}-\mu)^2-\frac{n\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2}\sum_{i=1}^{a}n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right]$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left[(y_{ij}-\bar{y}_{i.})+(\bar{y}_{i.}-\mu)\right]^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left[(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{a}n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2$$

$$Z=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[SSE+\left[1-\frac{n\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2}\right]\sum_{i=1}^{a}n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}+\bar{y}_{..}-\mu)^2\right]$$

$$-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[SSE+\left[1-\frac{n\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\alpha^2}\right]\left[n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[SSE + \frac{n\sigma_\alpha^2}{(\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2)}\left[SSA + an(\bar{y}_{..} - \mu)^2\right]\right] \quad \blacksquare$$

Misal $\lambda = \sigma_e^2 + n\ \sigma_\alpha^2$,

$$l = -\frac{1}{2}N\ \log 2\pi\ - \frac{1}{2}a(n-1)\log\sigma_e^2 - \frac{1}{2}a\log\lambda - \frac{SSE}{2\sigma_e^2} - \frac{SSA}{2\lambda} - \frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\lambda^2} \qquad (10)$$

Penyelesaian persamaan (10) didapat dengan menyamakan ke nol turunan parsial l terhadap parameter-parameter μ, σ_α^2 dan λ;

$$\frac{\partial l}{\partial\mu} = \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)}{\lambda} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma_e^2} = \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^2} + \frac{SSE}{2\sigma_e^4}$$

$$= \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^4}\left[\sigma_e^2 - \frac{SSE}{a(n-1)}\right] \qquad (12)$$

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda} = \frac{-a}{2\lambda} + \frac{SSA}{2\lambda^2} + \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda^2}$$

$$= \frac{-a}{2\lambda}\left[\lambda - \frac{SSA}{a}\right] + \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda^2} \qquad (13)$$

Dalam persamaan (11), (12) dan (13) simbol parameter-parameter μ, σ_α^2, σ_e^2 dan λ diganti dengan $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_\alpha^2, \dot{\sigma}_e^2$ dan $\dot{\lambda}$ yang menyatakan penyelesaian tersebut. Sehingga didapat;

$$\dot{\sigma}_e^2 = MSE\ ,\ \dot{\mu} = \bar{y}_{..},$$

$$\dot{\sigma}_\alpha^2 = \frac{(1-\frac{1}{a})MSA - MSE}{n} \tag{14}$$

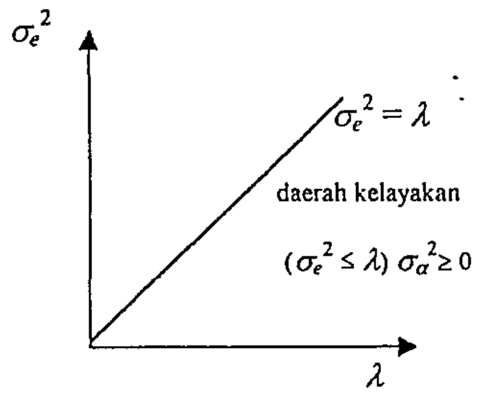
sebagai penyelesaian persamaan maksimum likelihood.

Meskipun $\dot{\sigma}_e^2$, $\dot{\mu}$ dan $\dot{\sigma}_\alpha^2$ adalah penyelesaian persamaan (10), tetapi tidak semua $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$ dan $\dot{\sigma}_\alpha^2$ terletak dalam ruang parameter untuk μ, σ_α^2 dan σ_e^2. Untuk mendapatkan estimator maksimum likelihood, yang dinyatakan dengan $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}_e^2$ dan $\tilde{\sigma}_\alpha^2$, $\tilde{\mu}$ harus terletak dalam ruang parameter untuk $\mu(-\infty,\infty)$, $\tilde{\sigma}_e^2$ terletak dalam ruang parameter untuk $\sigma_e^2\ (0,\infty)$, dan $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ terletak dalam ruang parameter untuk $\sigma_\alpha^2\ (0,\infty)$. Dari (76), $\dot{\mu}$ tidak tergantung pada $\dot{\sigma}_e^2$ dan $\dot{\sigma}_\alpha^2$, sehingga

$$MLE(\mu) = \tilde{\mu} = \dot{\mu} = \bar{y}_{..}$$

$\dot{\sigma}_e^2 = MSE$ terletak dalam ruang parameter untuk $\sigma_e^2\ (0,\infty)$, tetapi karena $\dot{\sigma}_\alpha^2$ tergantung pada $\dot{\sigma}_e^2$, maka $\dot{\sigma}_e^2$ harus terletak dalam ruang parameter untuk estimator $(\tilde{\sigma}_e^2, \tilde{\sigma}_\alpha^2)$ yang didefinisikan dengan ruang parameter pasangan $(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2)$.

Dari (14), bila $MSE > \left(1-\frac{1}{a}\right)MSA$, maka $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$ tidak terletak dalam ruang parameter $\sigma_\alpha^2(0,\infty)$. Sehingga $\dot{\sigma}_e^2 = MSE$ bukan estimator maksimum likelihood σ_e^2. Untuk menurunkan estimator maksimum likelihood dari $\dot{\sigma}_e^2$ dan $\dot{\sigma}_\alpha^2$, dibentuk fungsi positif L berparameter σ_e^2 dan $\lambda = \sigma_e^2 + n\,\sigma_\alpha^2$, yaitu persamaan (7) dan (10). Pandang garis $\sigma_e^2 = \lambda$ dalam bidang (σ_e^2, λ), seperti gambar 1,



Gambar 1. Kuadran positif untuk $\lambda = \sigma_e^2 + n\ \sigma_\alpha^2$, bidang (λ,σ_e^2) dengan garis $\sigma_e^2 = \lambda$, daerah layak, dan titik penyelesaian $(\dot{\lambda}, \dot{\sigma}_e^2)$ yang bukan dalam daerah layak.

Semua titik-titik koordinat yang berada pada / di bawah garis $\sigma_e^2 = \lambda$ $(\sigma_e^2 \leq \lambda)$ adalah titik-titik estimator maksimum likelihood yang dinamakan daerah kelayakan. Bila $(\dot{\lambda}, \dot{\sigma}_e^2)$ berada dalam daerah tersebut, maka $(\dot{\lambda}, \dot{\sigma}_e^2)$ adalah titik estimator maksimum likelihood,

Atau

$$\text{bila } \dot{\sigma}_\alpha^2 \geq 0\text{, maka } \tilde{\sigma}_\alpha^2 = \dot{\sigma}_\alpha^2 \text{ dan } \tilde{\sigma}_e^2 = \dot{\sigma}_e^2 \tag{15}$$

Theorema 3.1. bila $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$, di mana $\dot{\sigma}_\alpha^2$ adalah penyelesaian persamaan likelihood, maka $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0$.

Bukti. Andaikan $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$, tetapi $\tilde{\sigma}_\alpha^2 > 0$, yaitu $\tilde{\lambda} > \tilde{\sigma}_e^2$. Dengan $\lambda = \sigma_e^2 + n\ \sigma_\alpha^2$, di mana $(\lambda, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2)$ dapat diganti dengan $(\dot{\lambda}, \dot{\sigma}_e^2, \dot{\sigma}_\alpha^2)$ atau $(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}_e^2, \tilde{\sigma}_\alpha^2)$. Karena

$\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$, $\dot{\lambda} < \dot{\sigma}_e^2$, dan menurut pengandaian $\tilde{\sigma}_\alpha^2 > 0$, $\tilde{\lambda} > \tilde{\sigma}_e^2$, sehingga terdapat dua ketidaksamaan yaitu $\tilde{\sigma}_e^2 < \dot{\sigma}_e^2$ dan $\tilde{\sigma}_e^2 \geq \dot{\sigma}_e^2$.

<u>*kasus* 1</u> ($\tilde{\sigma}_e^2 < \dot{\sigma}_e^2$).

Dari (12), dimiliki

$$\left.\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_e^2}\right|_{\sigma_e^2=\tilde{\sigma}_e^2} = \frac{-a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4}\left[\tilde{\sigma}_e^2 - \frac{SSE}{a(n-1)}\right]$$
$$= \frac{-a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4}\left[\tilde{\sigma}_e^2 - \dot{\sigma}_e^2\right] > 0$$

Sehingga $\tilde{\sigma}_e^2 > \dot{\sigma}_e^2$. Sedangkan diandaikan $\tilde{\sigma}_e^2 < \dot{\sigma}_e^2$. Sehingga terjadi kontradiksi.

<u>*kasus* 2</u> ($\tilde{\sigma}_e^2 \geq \dot{\sigma}_e^2$).

Dari (13), dimiliki

$$\left.\frac{\partial \log L}{\partial \lambda}\right|_{\substack{\mu=\bar{y}_{..}\\ \lambda=\tilde{\lambda}}} = \frac{-a}{2\tilde{\lambda}^2}\left(\tilde{\lambda} - \frac{SSA}{a}\right) + \frac{an(\bar{y}_{..} - \bar{y}_{..})}{2\tilde{\lambda}^2}$$
$$= \frac{-a}{2\tilde{\lambda}^2}\left(\tilde{\lambda} - \dot{\lambda}\right)$$

Karena diandaikan $\tilde{\sigma}_\alpha^2 > 0$, $\tilde{\lambda} \geq \tilde{\sigma}_e^2$, $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$, $\dot{\sigma}_e^2 > \dot{\lambda}$, maka

$$\tilde{\lambda} > \tilde{\sigma}_e^2 > \dot{\sigma}_e^2 > \dot{\lambda} \quad \text{atau} \quad \tilde{\lambda} > \dot{\lambda} \tag{16}$$

Karena $\tilde{\sigma}_e^2 \geq \dot{\sigma}_e^2$, maka

$$\left.\frac{\partial \log L}{\partial \lambda}\right|_{\substack{\mu=\bar{y}_{..}\\ \lambda=\tilde{\lambda}}} = \frac{-a}{2\tilde{\lambda}^2}\left(\tilde{\lambda} - \dot{\lambda}\right) < 0.$$

Sehingga $\tilde{\lambda} < \dot{\lambda}$. Tetapi dari (78) $\tilde{\lambda} > \dot{\lambda}$. Sehingga terjadi kontradiksi.

Karena <u>kasus 1</u> ($\tilde{\sigma}_e^2 < \dot{\sigma}_e^2$) dan <u>kasus 2</u> ($\tilde{\sigma}_e^2 \geq \dot{\sigma}_e^2$), maka pernyataan $\tilde{\sigma}_\alpha^2 > 0$ kontradiksi, dan $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ tidak kurang dari nol. Sehingga pernyataan bahwa, bila $\dot{\sigma}_\alpha^2 <$ 0, maka $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0$, adalah benar. ■

Untuk mendapatkan estimator maksimum likelihood μ dan σ_e^2 bila $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0$, persamaaan (10) dimaksimalkan dengan $\lambda = \sigma_e^2$ (di mana $\sigma_\alpha^2 = 0$),

$$l\left(\lambda = \sigma_e^2\right) = -\frac{1}{2} N \log 2\pi - \frac{1}{2} N \log \sigma_e^2 - \frac{SSA + SSE}{2\sigma_e^2} - \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} \tag{17}$$

di mana l ($\lambda = \sigma_e^2$) menyatakan fungsi log L bila parameter $\lambda = \sigma_e^2$.

Seperti (11) dan (12), didapat;

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{..} = \dot{\mu} \ ,$$

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{SSA + SSE}{N} = \frac{SSTm}{an} \tag{18}$$

Dari (14), theorema 3.1. dan (18) didapat;

jika $\left(1 - \frac{1}{a}\right) MSA \geq MSE$, maka $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = \dfrac{\left[\left(1 - \frac{1}{a}\right) MSA - MSE\right]}{n}$

$$\text{dan } \tilde{\sigma}_e^2 = MSE, \tag{19}$$

$$\text{jika } \left(1 - \tfrac{1}{a}\right) MSA < MSE \text{ , maka } \tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0 \text{ dan } \tilde{\sigma}_e^2 = \frac{SSTm}{an}. \tag{20}$$

3.2. Estimasi Maksimum Likelihood Terbatas (REML)

Estimasi maksimum likelihood terbatas (*restricted maximum likelihood*) yang disingkat dengan REML adalah estimasi parameter-parameter persamaan likelihood dengan memaksimalkan bagian persamaan tersebut yang tidak mengandung parameter μ.

Dengan menggunakan persamaan (7) pada bab III, dan (56) pada bab II;

$$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \mid y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2} + \frac{SSA}{\lambda} + \frac{(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{\frac{\lambda}{an}}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\, \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\, \lambda^{\frac{1}{2}a}}$$

Persamaan REML didapat dengan memfaktorkannya sebagai berikut:

$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \mid y)$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_i\sum_j (y_{ij} - \mu)^2 - \frac{n^2\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2}\sum_i(\bar{y}_{i.} - \mu)^2\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\, \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\left(\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}a}}$$

Misal $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2$

$$L = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_i\sum_j (y_{ij} - \mu)^2 - \frac{n^2\sigma_\alpha^2}{\lambda}\sum_i(\bar{y}_{i.} - \mu)^2\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\, \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}(\lambda)^{\frac{1}{2}a}}$$

Dengan menggunakan persamaan kuadratik:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - y_{i.})^2 + \sum_{i=1}^{a} n(\bar{y}_{i.} - \mu)^2$$

dan

$$\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\mu)^2=\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2$$

$$L=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{a}n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2-\frac{n\sigma_\alpha^2}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{a}n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2\right)\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\,\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}(\lambda)^{\frac{1}{2}a}}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{1}{\sigma_e^2}\left[1-\frac{n\sigma_\alpha^2}{\lambda}\right]\left(SSA+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2\right)\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\,\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}(\lambda)^{\frac{1}{2}a}}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2}\frac{1}{\lambda}\left(SSA+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2\right)\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\,\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}(\lambda)^{\frac{1}{2}a}}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{SSA}{\lambda}+\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\lambda/an}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\,\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}(\lambda)^{\frac{1}{2}a}}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{SSA}{\lambda}+\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\lambda/an}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)}\,\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\left(\lambda/an\right)^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}(a-1)}(an)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\lambda/an}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\lambda/an\right)^{\frac{1}{2}}}\;\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{SSA}{\lambda}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)}\,\sigma_e^{2\left(\frac{1}{2}a(n-1)\right)}\lambda^{\frac{1}{2}(a-1)}(an)^{\frac{1}{2}}}$$

$= L(\mu \mid \bar{y}_{..})\ L(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \mid SSA, SSE)$

di mana $L(\mu \mid \bar{y}_{..})$ adalah fungsi likelihood parameter μ dengan $\bar{y}_{..}$ diketahui,

$L(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \mid SSA, SSE)$ adalah fungsi likelihood parameter σ_α^2 dan σ_e^2 dengan SSA dan SSE diketahui,

$$L(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \mid SSA, SSE) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2} + \frac{SSA}{\lambda}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)}\, \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\, \lambda^{\frac{1}{2}(a-1)}\, (an)^{\frac{1}{2}}} \tag{21}$$

Persamaan (21) disebut dengan persamaan REML. Persamaan (21) juga dapat dinyatakan sebagai

$$L\left(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \middle| SSA, SSE\right) = \int_{-\infty}^{\infty} L\left(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \middle| \mathbf{y}\right) d\mu \tag{22}$$

<u>Bukti.</u>

Karena fungsi likelihood memuat data-data yang diasumsikan berdistribusi normal, maka fungsi likelihood juga diasumsikan berdistribusi normal. Dengan menggunakan definisi 2.8 pada bab II,

$$\int_{-\infty}^{\infty} L\left(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \middle| \mathbf{y}\right) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2} + \frac{SSA}{\lambda} + \frac{(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{\lambda / an}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an}\, \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\, (\lambda)^{\frac{1}{2}a}}\, d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{SSA}{\lambda}+\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\lambda/an}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)}\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\left(\lambda/an\right)^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}(a-1)}(an)^{\frac{1}{2}}}\, d\mu$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{SSA}{\lambda}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)}\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\lambda^{\frac{1}{2}(a-1)}(an)^{\frac{1}{2}}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\lambda/an}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\lambda/an\right)^{\frac{1}{2}}}\,d\mu\right]$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{SSA}{\lambda}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)}\sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]}\lambda^{\frac{1}{2}(a-1)}(an)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\lambda/an\right)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\lambda/an}\right]\right\}d\mu\right]$$

Dengan menggunakan definisi 2.9 dan theorema 2.1 pada bab II, akan dibuktikan $\bar{y}_{..}$ berdistribusi normal.

$$M_{\bar{y}_{..}}(t) = M_{\frac{\sum_i\sum_j y_{ij}}{an}}(t)$$

$$= M_{\sum_i\sum_j y_{ij}}(t/an)$$

$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{n} M_{y_{ij}}(t/an)$$

$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{n}\exp\left[\left(\mu t/an\right)+\frac{1}{2}\left(\lambda t^2/(an)^2\right)\right]$$

$$= \exp\left[\mu t + \tfrac{1}{2}\left(\lambda t^2 / an\right)\right]$$

Jadi $\bar{y}_{..}$ berdistribusi normal ~ $N(\mu, \lambda / an)$. Menurut definisi 2.7 pada bab II, integral dalam kurung bernilai 1. Sehingga,

$$L\left(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \middle| SSA, SSE\right) = \int_{-\infty}^{\infty} L\left(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \middle| \mathbf{y}\right) d\mu$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{SSE}{\sigma_e^2} + \frac{SSA}{\lambda}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an-1} \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]} \lambda^{\frac{1}{2}(a-1)} (an)^{\frac{1}{2}}}$$

Untuk mendapatkan estimator bagi σ_α^2 dan σ_e^2, persamaan (21) dimaksimalkan dalam ruang parameter $\sigma_\alpha^2 \geq 0$ dan $\sigma_e^2 > 0$, di mana (21) diubah terlebih dahulu kedalam bentuk logaritma yang dinyatakan dengan l_R;

$$l_R = \log L\left(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 \middle| SSA, SSE\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(an-1)\log 2\pi - \frac{1}{2}\log an - \frac{1}{2}a(n-1)\log \sigma_e^2$$

$$-\frac{1}{2}(a-1)\log \lambda - \frac{SSE}{2\sigma_e^2} - \frac{SSA}{2\lambda} \qquad (23)$$

Turunan parsial dari (4) adalah;

$$\frac{\partial l_R}{\partial \sigma_e^2} = \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^2} + \frac{SSE}{2\sigma_e^4}, \text{ dan}$$

$$\frac{\partial l_R}{\partial \lambda} = \frac{-(a-1)}{2\lambda} + \frac{SSA}{2\lambda^2} \qquad (24)$$

di mana $\lambda = \sigma_e^2 + n\,\sigma_\alpha^2$

Dengan menyamakan (5) dengan nol dan mengganti σ_e^2 dan λ dengan $\dot{\sigma}^2_{e,R}$ dan $\dot{\lambda}_R$, didapat penyelesaian

$$\dot{\lambda}_R = \frac{SSA}{(a-1)} \text{ dan } \dot{\sigma}_{e,R} = \frac{SSE}{a(n-1)} = MSE$$

sehingga

$$\dot{\sigma}^2_{\alpha,R} = \frac{1}{n}(MSA - MSE). \tag{25}$$

Seperti penyelesaian persamaan maksimum likelihood, penyelesaian REML yang dihasilkan merupakan estimator hanya bila $\dot{\sigma}^2_{e,R}$ dan $\dot{\sigma}^2_{\alpha,R}$ tidak negatif. Dari (25), $\dot{\sigma}^2_{e,R}$ selalu lebih dari nol. Sedangkan $\dot{\sigma}^2_{\alpha,R}$ dapat menjadi kurang dari nol bila MSA < MSE. Seperti estimator maksimum likelihood (14), (15) dan theorema 3.1, estimator REML adalah;

$$\text{bila } \dot{\sigma}^2_{\alpha,R} \geq 0, \text{ maka } \tilde{\sigma}^2_{e,R} = MSE \text{ dan } \tilde{\sigma}^2_{\alpha,R} = \frac{1}{n}(MSA - MSE);$$

$$\text{bila } \dot{\sigma}^2_{\alpha,R} < 0, \text{ maka } \tilde{\sigma}^2_{e,R} = \frac{SSTm}{an-1} \text{ dan } \tilde{\sigma}^2_{\alpha,R} = 0. \tag{26}$$

3.3. Perbandingan REML dengan Maksimum Likelihood dan ANOVA

Dari persamaan (59) dan (60) pada bab II terlihat bahwa penyelesaian REML (6) merupakan estimator parameter ANOVA. Hal ini terjadi hanya pada data seimbang.(Westfall, 1987)

Bila dibandingkan dengan estimator maksimum likelihood, banyak terdapat perbedaan, diantaranya:

- Untuk penyelesaian ${\sigma_\alpha}^2$ yang bernilai negatif, pada REML terjadi bila $MSA < MSE$, sementara pada maksimum likelihood terjadi bila $(1 - 1/a)MSA < MSE$.
- Untuk estimator positif, pada REML digunakan $(MSA - MSE)/n$, sementara pada maksimum likelihood digunakan $((1 - 1/a)MSA - MSE)/n$.
- Pada REML pembagi SSA dan $SSTm$ sama seperti pada ANOVA. Sementara pada maksimum likelihood, SSA dibagi dengan a, $SSTm$ dibagi dengan an.