BAB II

KONSEP DASAR

2.1. Model Random Klasifikasi Satu Arah

Dalam mempelajari variabilitas yang terdapat dalam data, pengelompokan data menurut kriteria tertentu ikut menentukan besarnya variabilitas data baik dalam kelompok maupun antar kelompok. Sebagai contoh, suatu percobaan klinis, di mana tiga jenis obat yang berbeda digunakan pada pasien pria dan wanita, di antaranya ada yang telah menikah dan ada yang belum menikah. Rancangan data hasil percobaan dapat disusun dalam tabel 1.

Tabel 1. Bentuk penyajian data

Jenis kelamin	Status pernikahan					
	Nikah			Belum		
	Jenis obat			Jenis obat		
	A	B	C	A	B	C
Pria						
Wanita						

Tiga klasifikasi, yaitu jenis kelamin, jenis obat dan status pernikahan, yang mengidentifikasikan sumber-sumber tiap data disebut faktor. Kelas-kelas suatu faktor disebut tingkat-tingkat faktor. Pada tabel 1, faktor jenis obat memiliki tiga tingkat faktor, yaitu tingkat A,B dan C. Faktor status pernikahan memiliki dua tingkat faktor, yaitu telah menikah dan belum menikah. Faktor jenis kelamin memiliki dua tingkat faktor, yaitu pria dan wanita. Bagian-bagian data yang terdapat pada perpotongan tingkat-tingkat faktor disebut dengan sel data. Dengan demikian pada tabel 1 terdapat 2 sel data tingkat faktor jenis kelamin x 2 sel data tingkat faktor status pernikahan x 3 sel data tingkat faktor jenis obat = 12 sel data. Bila banyaknya pengamatan pada tiap tingkat faktor sama, maka percobaan tersebut dikatakan percobaan dengan data seimbang. Dalam pengklasifikasian data menurut faktor dan tingkatannya, terdapat perbedaan tingkat faktor yang dapat mempengaruhi variabilitas data yang disebut dengan efek tingkat faktor.

Menurut Searle (1992), terdapat dua jenis efek faktor, yaitu efek tetap dan efek random. Efek tetap adalah efek yang diambil dari himpunan berhingga tingkat-tingkat faktor yang terdapat dalam data dan yang dipilih karena ketertarikan peneliti pada himpunan berhingga tersebut. Pada tabel 1 faktor jenis kelamin, jenis obat dan status pernikahan adalah efek tetap. Efek random adalah efek faktor yang diambil dari himpunan takhingga tingkat-tingkat faktor, yang mana tingkat-tingkat faktor tersebut dipilih secara random dari beberapa tingkat faktor. Contohnya, empat buah roti diambil dari tiap oven yang berjumlah enam buah pada tiga suhu berbeda. Suhu oven dipandang sebagai efek tetap, karena ditentukan oleh peneliti. Sedangkan oven dipandang sebagai efek random, karena oven dipilih secara random yang dapat dipandang sebagai sampel dari populasi oven yang dapat dianggap takhingga.

Pada efek tetap hanya terdapat satu variabilitas, yaitu variabilitas galat atau variabilitas antar data dalam satu tingkat faktor, tanpa memperhatikan tingkat faktor, karena tingkat faktor ditentukan oleh peneliti. Pada efek random, karena tingkat-tingkat faktor dipilih secara random, maka terdapat dua variabilitas, yaitu variabilitas galat dan variabilitas perlakuan, yaitu variabilitas antar tingkat faktor. Model yang mana efek-efeknya dipengaruhi efek random disebut modek efek random atau model random.

Pada efek tetap, misal y_{ij} adalah data pengamatan ulangan ke-j, pada perlakuan ke-i,

$$E(y_{ij}) = \mu_i \tag{1}$$

di mana μ_i adalah mean perlakuan ke-i.

Jika

$$\mu_i = \mu + \alpha_i,$$

maka

$$E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i, \tag{2}$$

di mana μ adalah mean keseluruhan dan α_i adalah efek perlakuan ke-i.

Berdasarkan (2), didefinisikan deviasi y_{ij} terhadap nilai harapannya;

$$\begin{aligned} e_{ij} &= y_{ij} - E(y_{ij}) \\ &= y_{ij} - (\mu + \alpha_i) \end{aligned} \tag{3}$$

Sehingga

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \tag{4}$$

Pada model random, karena efek perlakuan ke-i (α_i) bersifat random, maka terdapat sifat sifat probabilitas pada α_i , yaitu α_i adalah variabel random berdistribusi saling bebas dan identik yang memiliki mean 0 dan varians σ_α^2, yang selanjutnya dinotasikan dengan $\alpha_i \sim$ i.i.d. (0, σ_α^2), $\forall i$.

Sehingga

$$E(\alpha_i) = 0 \text{ , } \forall\ i \tag{5}$$

$$\text{Var}(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2 \text{ , } \forall\ i \tag{6}$$

$$\text{Cov}(\alpha_i \text{ , } \alpha_k) = 0 \text{ , } \forall\ i \neq k \tag{7}$$

Dengan menggunakan (2), di mana α_i diketahui, didefinisikan

$$E(y_{ij}|\alpha_i) = \mu + \alpha_i \tag{8}$$

$$E(y_{ij}) = E(E(y_{ij}|\alpha_i))$$

$$= E(\mu + \alpha_i) = \mu \tag{9}$$

Didefinisikan

$$e_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij}|\alpha_i) \tag{10}$$

Sehingga

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \tag{11}$$

Diasumsikan e_{ij} variabel random yang berdistribusi saling bebas dan identik dengan mean nol dan variansi σ_e^2 , yang dinotasikan dengan $e_{ij} \sim$ i.i.d. (0, σ_e^2). Sehingga

$$E(e_{ij}) = 0, \tag{12}$$

$$\text{Var}(e_{ij}) = \sigma_e^2 \tag{13}$$

Dalam rancangan percobaan, data yang diperoleh diasumsikan berdistribusi normal. Sehingga, dari (11), e_{ij} juga diasumsikan berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi σ_e^2, yang selanjutnya dinotasikan dengan $e_{ij} \sim N$ (0, σ_e^2).

Karena e_{ij} saling bebas, maka

$$\text{Cov}(e_{ij}, e_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_e^2, i = i', j = j' \\ 0 \quad , \text{yang lain} \end{cases} \tag{14}$$

dan

$$\text{Cov}(e_{ij}, \alpha_k) = 0, \forall\ i, j, k \tag{15}$$

$$E(e_{ij}\, e_{i'j'}) = 0 \text{ dan } E(e_{ij}, \alpha_k) = 0\ , \forall\ i, j, j' \text{ dan } k \tag{16}$$

Dari (6), (9) dan (13),

$$\text{Var}(y_{ij}) = \text{Var}(\alpha_i) + \text{Var}(e_{ij})$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2 \tag{17}$$

σ_α^2 dan σ_e^2 disebut dengan komponen varians σ_y^2.

Kovarians dalam tiap ulangan ke-j pada kelas ke-i ,

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2 & , i = i', j = j' \\ \sigma_\alpha^2 & , i = i', j \neq j' \\ 0 & , \text{yang lain} \end{cases} \tag{18}$$

Model (11) terdiri dari satu faktor dengan bermacam-macam kelas sehingga disebut dengan model random klasifikasi satu arah.

Contoh model random klasifikasi satu arah adalah sebagai berikut:

Dalam penelitian Chakravorti dan Grizzle (1975) dalam Searle (1992), diteliti penggunaan produk baru insulin suntik dengan mengujinya pada 15 klinik yang berbeda di New York. Klinik-klinik tersebut dipilih secara random dari seluruh klinik di New York. Jika klinik ke-i memiliki n_i pasien dan respons perlakuan pasien ke-j pada klinik ke-i adalah y_{ij} , maka model yang mungkin untuk menggambarkan pengaruh insulin suntik baru terhadap pasien adalah

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, i = 1, 2, \ldots, a; j = 1, 2, \ldots, n_i$$

di mana y_{ij} adalah perubahan kesehatan yang teramati pasien ke-j pada klinik ke-i, μ adalah rata-rata keseluruhan perubahan kesehatan pasien, α_i klinik ke-i dan e_{ij} adalah galat pengamatan. Untuk menguji ada atau tidaknya variabilitas perubahan kesehatan pasien teramati setelah pemberian produk insulin tersebut, dibentuk hipotesis sebagai berikut;

H_0 : tidak ada variabilitas perubahan kesehatan pasien pada semua klinik

H_A : terdapat variabilitas perubahan kesehatan pasien pada semua klinik

yang mana hipotesis tersebut dapat dinyatakan dengan

$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$

$H_A : \sigma_\alpha^2 > 0.$

Karena klinik-linik tersebut dipilih secara random, maka hasil yang diperoleh dapat mewakili seluruh klinik di New York, sehingga dapat dibuat inferensi penelitian tersebut pada seluruh klinik di New York.

2.2. Formulasi Matrik pada Model Random

Persamaan (11) menyatakan model untuk data ulangan ke-j pada perlakuan ke-i. Bila Model (11) disusun sebagai suatu sistem persamaan dengan n ulangan dan

a perlakuan, maka persamaan tersebut dapat disusun menjadi bentuk matrik, yaitu:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{e} \tag{19}$$

di mana $\mathbf{y}$ adalah vektor data berukuran $an \times 1$,

$\mathbf{Z}$ adalah matrik koefisien berukuran $an \times (a+1)$,

$\mathbf{u}$ adalah vektor parameter-parameter efek random berukuran $(a+1) \times 1$, dan

$\mathbf{e}$ adalah vektor galat pengamatan berukuran $an \times 1$.

$\mathbf{Z}$ adalah matrik insiden, yaitu matrik yang elemen-elemennya terdiri dari 0 dan 1.

$\mathbf{u} = [\mu \;\; \boldsymbol{\alpha}\,]'$, di mana $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_a\,]$. (Corbeil, 1976)

2.2. a. Vektor Jumlahan

Vektor-vektor yang tiap elemen-elemennya adalah 1 disebut vektor jumlahan, yang dinotasikan dengan $\mathbf{1}_n$, di mana n menyatakan ukuran vektor.

Sifat-sifat vektor jumlahan antara lain:

- bila $\mathbf{X} = [\,x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\,]$, maka $\mathbf{1}_n{}'\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (20)
- $\mathbf{1}_n{}'\,\mathbf{1}_n = n$ (21)
- didefinisikan $\mathbf{J}_n \quad \mathbf{1}_n\,\mathbf{1}_n{}'$ (22)
- $\mathbf{J}_n{}^2 \quad \mathbf{J}_n\,\mathbf{J}_n \quad n\mathbf{J}_n$ (23)
- $\mathbf{J}_n\,\mathbf{1}_n \quad n\,\mathbf{1}_n$ (24)

Definisi 2.1. Misal **X** adalah matrik berukuran $m \times n$. Terdapat matrik **I** sedemikian sehingga **IX** = **XI** = **I**. Matrik **I** disebut matrik identitas bila memenuhi persamaan tersebut. Matrik identitas **I** berbentuk

$$\mathbf{I} = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

di mana δ_{ij} adalah delta kronecker yang didefinisikan sebagai

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika } i = j \\ 0, \text{jika } i \neq j; \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ (Finkbeiner, 1966)}$$

Definisi 2.2. Jika **A** adalah matrik bujursangkar berorde n, dan jika terdapat matrik **B** sedemikian sehingga **AB** = **BA** = **I**, maka **A** dikatakan dapat dibalik dan **B** dikatakan invers dari **A**, yang dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$.(Ayres, 1989)

Definisi 2.3. Misal **A** adalah matrik bujursangkar berorde n . Fungsi determinan matrik **A** yang dinotasikan dengan det(**A**) didefinisikan sebagai jumlah semua hasilkali elementer bertanda dari **A** yang dinamakan determinan **A**.

Definisi 2.4. Trase (*trace*) matrik **A** bujursangkar berorde n yang dinotasikan dengan tr(**A**) didefinisikan sebagai jumlahan elemen-elemen matrik **A** pada diagonal utama, yaitu

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ , di mana } \mathbf{A} = \{a_{ij}\} \text{ untuk } i, j = 1, \ldots, n$$

Yang dimaksud hasilkali elementer bertanda dari **A** adalah hasilkali elementer $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ dikalikan dengan +1 atau -1. Tanda (+) jika permutasi ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) genap dan tanda (-) jika permutasi ($j_1, j_2, \ldots, j_n$) ganjil. (Anton, 1991)

Kombinasi linier matrik **I** (matrik identitas) dan matrik **J** antara lain:

- $(a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n)(\alpha\mathbf{I}_n + \beta\mathbf{J}_n) = a\alpha\mathbf{I}_n + (a\beta + b\alpha + nb\beta)\,\mathbf{J}_n$,

$$= \left(a\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right)\left(\alpha\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}a\alpha & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & a\alpha\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b\alpha & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & b\alpha\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a\beta & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & a\beta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}nb\beta & \cdots & nb\beta\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ nb\beta & \cdots & nb\beta\end{bmatrix}$$

$= a\alpha\,\mathbf{I}_n + [b\alpha + a\beta + nb\beta]\,\mathbf{J}_n$ a, b, α dan β suatu skalar (25)

- $(a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n)^{-1} = \dfrac{1}{a}\left(\mathbf{I}_n - \dfrac{b}{a+nb}\mathbf{J}_n\right),\ a \neq 0,\ a \neq -nb$ (26)

<u>bukti:</u>

misal $(a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n)(\alpha\mathbf{I}_n + \beta\mathbf{J}_n) = \mathbf{I}$

$$\begin{bmatrix}a\alpha + b\alpha + a\beta + nb\beta & \cdots & b\alpha + a\beta + nb\beta\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b\alpha + a\beta + nb\beta & \cdots & a\alpha + b\alpha + a\beta + nb\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$a\alpha + b\alpha + a\beta + nb\beta = 1$ (i)

$b\alpha + a\beta + nb\beta = 0$ (ii)

$a\alpha \quad 1 - (b\alpha + a\beta + nb\beta) = 1 - 0$

$\alpha = 1/a$,disubstitusikan ke (ii) sehingga

$$b\alpha + a\beta + nb\beta = b/a + a\alpha + nb\beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta(a + nb) = -(b/a)$$

$$\Rightarrow \beta = -(b/a)\ 1/(a + nb)$$

sehingga $(a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n)^{-1} = ((1/a)\mathbf{I}_n - (b/a)\ 1/(a + nb)\ \mathbf{J}_n)$

$$= \frac{1}{a}\left(\mathbf{I}_n - \frac{b}{a+nb}\mathbf{J}_n\right). \quad \blacksquare$$

- $\det(a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n) = |a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n| = a^{(n-1)}(a + nb)$ (27)

$$|a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n| = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

$$= b\,a^{n-1} + a\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

$$= b\,a^{n-1} + a\left(\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix}\right)$$

proses diteruskan sehingga

$$|a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n| = b\,a^{n-1} + a(b\,a^{n-2} + a(b\,a^{n-3} + a(\cdots + a(a+b)))\ldots)$$

$$= b\,a^{n-1} + a\,b\,a^{n-2} + a\,a\,b\,a^{n-3} + \underbrace{a\cdots a}_{n-2\text{ faktor}}\,ba + \underbrace{a\cdots a}_{n\text{ faktor}}$$

$$= b\,a^{n-1} + b\,a^{n-1} + \cdots + b\,a^{n-1} + a^n = a^{n-1}(a + nb) \qquad \blacksquare$$

Model (19), khususnya $\mathbf{Zu}$ dapat diubah dengan menggunakan sifat vektor jumlahan:

$$\mathbf{Zu} = \mathbf{1}_N\,\mu + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}_n \end{bmatrix} \alpha \tag{28}$$

2.2.b. Matrik Penjumlahan dan Perkalian Kronecker

Definisi 2.5. Jumlahan Kronecker dua buah matrik $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ berukuran $m \times n$ dan $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ berukuran $q \times r$ adalah matrik $\mathbf{C}$ berukuran $(m+q) \times (n+r)$ yang didefinisikan dengan

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_2 & \mathbf{B} \end{array}\right] \tag{29}$$

di mana $\mathbf{0}_1$ dan $\mathbf{0}_2$ adalah matrik nol berukuran $m \times r$ dan $q \times n$.

Simbol $\oplus$ menyatakan jumlahan Kronecker.

Jika matrik $\mathbf{M}$ adalah Jumlahan Kronecker k buah matrik bujursangkar berorde sama;

$$\mathbf{M} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i = \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k)$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} \tag{30}$$

maka

* $|M| = |A_1|\ |A_2| \cdots |A_k|$ (31)

* $tr(M) = tr(A_1)\ tr(A_2) \cdots tr(A_k)$ (32)

* $M^{-1} = diag\ (A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_k^{-1})$ (33)

Jika $\mathbf{A}_1$ dan $\mathbf{A}_2$ adalah dua buah matrik bujursangkar berorde sama, katakanlah m, $\mathbf{B}_1$ dan $\mathbf{B}_2$ adalah dua buah matrik bujursangkar berorde sama, katakanlah n, maka

$$(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = (A_1A_2 \oplus B_1B_2) \tag{34}$$

Definisi 2.6. Perkalian Kronecker dua buah matrik $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ berukuran $l \times m$ dan $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ berukuran $p \times q$ adalah matrik $\mathbf{C}$ yang berukuran $lp \times mq$, yang didefinisikan

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1}\mathbf{B} & \cdots & a_{lm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{35}$$

di mana elemen $a_{ij}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{ij}b_{11} & \cdots & a_{ij}b_{1q} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ij}b_{p1} & \cdots & a_{ij}b_{pq} \end{bmatrix}$

dan elemen $\mathbf{C} = \{a_{ij}b_{ij}\}$ (Joshi, 1988).

Tanda $\otimes$ menyatakan perkalian Kronecker.

Perkalian Kronecker k buah matrik dinyatakan dengan

$$\bigotimes_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}_k = \mathbf{A}^{[k]} \tag{36}$$

Perkalian Kronecker memiliki sifat asosiatif:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \tag{37}$$

Misal **A**, **B**, **C** dan **D** adalah sebarang matrik sedemikian sehingga **AC** dan **BD** terdefinisi. Misal $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ berukuran $l \times m$, $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ berukuran $p \times q$, $C = \{c_{ij}\}$ berukuran $m \times n$, dan $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$ berukuran $q \times r$, terdapat sifat-sifat perkalian Kronecker sebagai berikut:

- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}')$ (38)
- **x** dan **y** suatu vektor, $\mathbf{x}' \otimes \mathbf{y} = \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}'$ (39)
- untuk sebarang skalar λ, $\lambda \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \lambda$ (40)
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$ (41)
- dengan menggunakan (37) dan (41):

$$(\mathbf{AB})^{[k]} = (\mathbf{AB}) \otimes (\mathbf{AB}) \otimes \cdots \otimes (\mathbf{AB})$$
$$= \mathbf{A}^{[k]}\ \mathbf{B}^{[k]} \tag{42}$$

- $\mathbf{I}_{mn} = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_n$ (43)
- jika A dan B adalah matrik bujursangkar ($l = m, p = q$), maka

$$\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} \tag{44}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\ \mathrm{tr}(\mathbf{B}) \tag{45}$$

$$|\mathbf{A}_p \otimes \mathbf{B}_m| = |\mathbf{A}|^m\ |\mathbf{B}|^p \tag{46}$$

Dengan menggunakan (28), (35) dan (43), persamaan (19) dapat diubah menjadi

$$\mathbf{y} = \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{Zu} = \mathbf{1}_N \mu + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{1}_n \end{bmatrix} \alpha$$

$$= \mathbf{1}_N \mu + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n 1 & \cdots & \mathbf{1}_n 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1}_n 0 & \cdots & \mathbf{1}_n 1 \end{bmatrix} \alpha$$

$$= (\mathbf{1}_a \otimes \mathbf{1}_n)\, \mu + (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\, \alpha$$

sehingga

$$\mathbf{y} = (\mathbf{1}_a \otimes \mathbf{1}_n)\, \mu + (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\, \alpha + \mathbf{e} \qquad (47)$$

2.2.c. Matrik Dispersi

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah k buah variabel random dengan mean $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ varians $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ dan kovarians $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{(k-1)k}$ yang didefinisikan sebagai

$$\sigma_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2 \,;\; E(X_i) = \mu_i$$

$$\sigma_{ij} = (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) \;, \quad \text{untuk } i \neq j \;.$$

Variabel-variabel random tersebut, dengan mean dan varians-kovariansnya, dapat dinyatakan dalam bentuk matrik dan vektor;

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1k} & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix}$$

Menurut Searle (1982), matrik di atas disebut dengan matrik varians-kovarians, atau matrik dispersi.

Dari (12), (13), (14) dan (16)

$$\mathrm{Var}(\mathbf{e}) = \sigma_e^2\, \mathbf{I}_{an} \tag{48}$$

Dari (5), (6) dan (7)

$$\mathrm{Var}(\alpha) = \sigma_\alpha^2\, \mathbf{I}_a \tag{49}$$

Dengan menggunakan (9), (17), (18), (47), (48) dan (49)

$$E(\mathbf{y}) = (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\,\mu \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\mathbf{y}) &= E[(\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y}))'] \\ &= E[((\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\,\alpha + \mathbf{e})(\,((\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\,\alpha)' + \mathbf{e}'\,)] \\ &= E((\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\,\alpha\alpha'\,(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)'\,) + E((\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\alpha\mathbf{e}') \\ &\quad + E(\mathbf{e}\alpha'(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)') + E(\mathbf{e}\mathbf{e}'\,) \\ &= (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\,E(\alpha\alpha')\,(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)' + (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\,E(\alpha\mathbf{e}') \\ &\quad + E(\mathbf{e}\alpha')(\,\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)' + E(\mathbf{e}\mathbf{e}'\,) \\ &= (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)\,\sigma_\alpha^2\,\mathbf{I}_a\,(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n)' + \sigma_e^2\,(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_n) \end{aligned} \tag{51}$$

Dengan menggunakan (22), (38), (40) dan (41)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\mathbf{y}) &= \sigma_\alpha^2\,(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{J}_n)' + \sigma_e^2\,(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{I}_n) \\ &= \mathbf{I}_a \otimes (\,\sigma_\alpha^2\,\mathbf{J}_n + \sigma_e^2\,\mathbf{I}_n) \end{aligned} \tag{52}$$

2.3. Estimasi Parameter ANOVA pada Data Seimbang

Apabila percobaan dengan faktor tunggal untuk klasifikasi satu arah memiliki jumlah pengamatan tingkat faktor satu tidak berbeda dengan tingkat faktor lain, maka rancangan percobaan tersebut memiliki data seimbang.

Analisis varians (ANOVA) berasal dari pemisahan variabilitas keseluruhan ke dalam bagian-bagian tertentu. Dari (11) dan (19),

$$\bar{y}_{i.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \text{ dan } \bar{y}_{..} = \frac{1}{an}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\bar{y}_{i.} \tag{53}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, n$,di mana a adalah jumlah kelas dan n adalah jumlah pengamatan tiap kelas.

Dengan menggunakan identitas

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$$

dibentuk identitas kuadratik:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \tag{54}$$

(Montgomery, 1984).

Tiap bagian dalam (54) analog dengan kuadrat jumlah yang digunakan dalam mencari variansi dari sampel k pengamatan $x_1, x_2, \ldots, x_k$, yaitu

$$s^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{r=1}^{k}(x_r - \bar{x})^2 \text{ dengan } \bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} x_r \tag{55}$$

Sehingga bagian kiri (54) adalah jumlah kuadrat total deviasi setiap pengamatan dari rata-ratanya, yang disebut dengan jumlah kuadrat total terkoreksi ($SSTm$), yang terbagi menjadi dua jumlah kuadrat, yaitu jumlah kuadrat deviasi setiap pengamatan dari rata-rata kelompok yang disebut dengan jumlah kuadrat galat (SSE), dan jumlah kuadrat deviasi rata-rata kelompok dari rata-rata keseluruhan yang disebut dengan jumlah kuadrat kelompok (SSA).

Jadi,

$$SSA = \sum_{i=1}^{a} n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 ,$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \text{ , dan}$$

$$SSTm = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \tag{56}$$

Metode estimasi ANOVA berdasar pada penurunan nilai harapan SSA dan SSE pada (56). Dari (11) didapat

$$\bar{y}_{i.} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{i.} \text{ , dengan } \bar{e}_{i.} = \sum_{i=1}^{a} \frac{e_{ij}}{n}$$

$$\bar{y}_{..} = \mu + \bar{\alpha}_{.} + \bar{e}_{..} \text{ , dengan } \bar{\alpha}_{.} = \sum_{i=1}^{a} \frac{\alpha_i}{a} \text{ dan } \bar{e}_{..} = \sum_{i=1}^{a} \frac{\bar{e}_{i.}}{a}.$$

Dengan menggunakan (5), (12) dan (16),

$$E(SSA) = E\left(n\sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \right)$$

$$= n\sum_{i=1}^{a}\left[E(\alpha_i - \overline{\alpha}_.)^2 + E(\overline{e}_{i.} - \overline{e}_{..})^2\right]$$

$$= n\sum_{i=1}^{a}\left[\text{var}(\alpha_i - \overline{\alpha}_.) + \text{var}(\overline{e}_{i.} - \overline{e}_{..})\right]$$

$$= n\sum_{i=1}^{a}\left[\text{var}\left[(\alpha_i) - \left(\sum_{i=1}^{a}\alpha_i / a\right)\right] + \text{var}\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{e_{ij}}{a} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\right)\right]$$

$$= n\sum_{i=1}^{a}\left(\sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\alpha^2}{a} - \frac{2\sigma_\alpha^2}{a}\right) + n\sum_{i=1}^{a}\left(\frac{\sigma_e^2}{n} + \frac{\sigma_e^2}{an} - \frac{2n\sigma_e^2}{nan}\right)$$

$$= n(a-1)n\sigma_\alpha^2 + (a-1)\sigma_e^2 = (a-1)(n\,\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2),$$

$$E(SSE) = E\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \overline{y}_{i.})^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} E(y_{ij} - \overline{y}_{i.})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} E(e_{ij} - \overline{e}_{i.})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} \text{var}(e_{ij} - \overline{e}_{i.})$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_e^2 - \frac{\sigma_e^2}{n}\right)$$

$$= \sigma_e^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = a(n-1)\,\sigma_e^2$$

di mana $\text{var}(\alpha_i - \overline{\alpha}_.) = E\left((\alpha_i - \overline{\alpha}_.)^2\right)$ dan $\text{var}(\overline{e}_{i.} - \overline{e}_{..}) = E\left((\overline{e}_{i.} - \overline{e}_{..})^2\right)$ (57)

Bila $MSA = \dfrac{SSA}{a-1}$ dan $MSE = \dfrac{SSE}{a(n-1)}$,

maka

$$E(MSA) = n\,\sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2,$$

$$E(MSE) = \sigma_e^2 \tag{58}$$

Untuk mendapatkan estimator parameter ANOVA, digunakan metode estimasi parameter ANOVA, yaitu mensubstitusikan $E(SSA)$ dan $E(SSE)$ pada (57) dan diubah menjadi SSA dan SSE, demikian pula σ_α^2 dan σ_e^2 diubah menjadi $\hat{\sigma}_\alpha^2$ dan $\hat{\sigma}_e^2$ yang disebut dengan estimator;

$$SSA = (a-1)\,(n\hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_e^2)$$

$$SSA = a(n-1)\,\hat{\sigma}_e^2$$

yang menghasilkan estimator-estimator

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSE}{a(n-1)} = MSE \tag{59}$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{MSA - MSE}{n}. \tag{60}$$

Pada (60), bila $MSA < MSE$, maka $\hat{\sigma}_\alpha^2 < 0$. Sedangkan nilai varians tidak pernah negatif. Bila $\hat{\sigma}_e^2 < 0$, terdapat dua kemungkinan, yaitu model yang digunakan kurang tepat, atau nilai σ_α^2 sebenarnya adalah nol.

Bila $\sigma_\alpha^2 = 0$, maka model yang tepat adalah

$y_{ij} = \mu + e_{ij}$, yang mana estimator ANOVA $\hat{\sigma}_e^2$ adalah $\hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSTm}{(an-1)}$.

Jadi,

$$\text{jika } \hat{\sigma}_\alpha^2 < 0 \text{ , maka } \hat{\sigma}_e^2 = \frac{SSTm}{(an-1)} \tag{61}$$

2.4. Distribusi Normal

Distribusi normal adalah model distribusi probabilitas yang paling banyak digunakan dalam statistik, karena distribusi lain dapat dibawa ke distribusi normal, dan distribusi normal dapat diubah ke distribusi lainnya. Distribusi normal juga menjadi asumsi dasar analisis data dalam suatu percobaan.

Definisi 2.7. suatu fungsi $f(x)$ dengan daerah asal himpunan bilangan riil dan daerah hasil $[0, \infty)$ didefinisikan sebagai fungsi densitas probabilitas bila hanya bila

(i) $f(x) \geq 0$ untuk semua x,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$. (Freund, 1992)

Definisi 2.8. Suatu variabel random X didefinisikan berdistribusi normal jika fungsi densitasnya adalah

$$f_X(x) = f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right].$$

di mana parameter μ dan σ memenuhi $-\infty < \mu < \infty$ dan $\sigma > 0$. Suatu distribusi yang didefinisikan oleh fungsi densitas di atas disebut distribusi normal.(Dudewicz, 1995)

Distribusi normal yang didefiisikan pada definisi 2.8 juga merupakan fungsi densitas probabilitas pada definisi 2.7. Jika variabel random X berdistribusi normal dengan mean μ dan varians σ^2, maka distribusi X dapat ditulis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Definisi 2.9. Fungsi pembangkit momen variabel random X, di mana X kontinu, didefinisikan dengan

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

Theorema 2.1. Fungsi pembangkit momen distribusi normal dinyatakan dengan

$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$. (Hogg, 1978).

<u>Bukti.</u>

Dengan menggunakan definisi 2.9,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2\right)\right] dx$$

$$= \left(-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2\right) = \left[x - (\mu + t\sigma^2)^2\right]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \tfrac{1}{2}t^2\sigma^2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2\right)\right] dx\right]$$

dengan menggunakan definisi 2.7 dan 2.8,

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$ ■

Definisi 2.10. Suatu variabel random $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ berdistribusi normal multivariat $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ yang didefinisikan dengan

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]$$

di mana $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$

$$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \text{Var}(X_i),\ \sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)\ i = 1, 2, \ldots, n$$

untuk semua X bernilai riil. (Kartiko, 1988).

Jika $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ saling bebas, maka $\sigma_{ij} = 0$, sehingga

$$\Sigma = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}.$$