BAB II

MATERI PENUNJANG

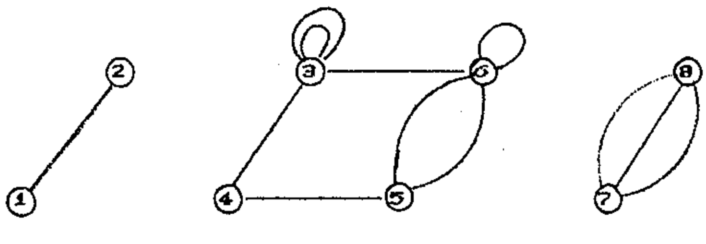
Dalam bab ini akan dijelaskan beberapa definisi tentang graph dan masalah subgraph dari digraph yang akan nenunjang bab selanjutnya.

2.1. Graph

DEFINISI 2.1.1 : Graph G(V,E)

Suatu graph G(V,E) terdiri dari himpunan berhingga tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu disebut dengan garis. Himpunan titik graph G dinotasikan dengan V(G) . Dan himpunan garis G dengan notasi E(G) (Robin, J.W dan John, J.W, 1990).

Contoh : Graph G(V,E) dengan V(G)= {1,2,3,. . . ,8} dan E(G) = {(1,2),(3.4),(3,3),(3,3),(4,5),(3,6),(5,6),(6,5),(6,6),(7,8),(8,7),(7,8)} seperti pada gambar (2.1.1)

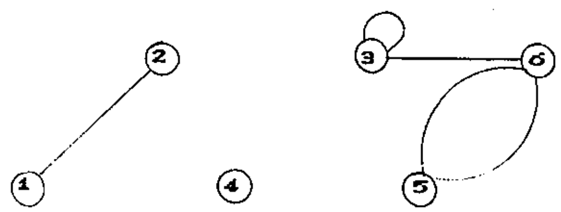


Gbr. (2.1.1)

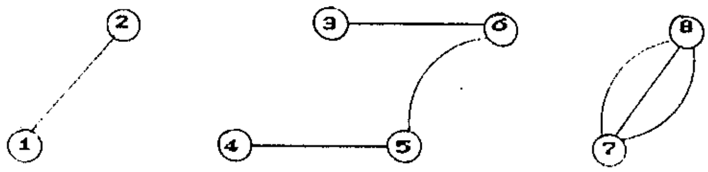
DEFINISI 2.1.2 : Subgraph

Sebuah subgraph dari graph G(V,E) adalah suatu graph $G_s(V_s,E_s)$ dengan V_s dan E_s adalah subset dari V dan E. Jika V_s dan E_s subset sejati maka subgraphnya disebut subgraph sejati. Dan jika $V_s = V$ subgraphnya disebut spanning subgraph dari G (Chen, W.K, 1976).

Contoh subgraph dari graph pada gambar (2.1.1) terlihat pada gambar (2.1.2) dan (2.1.3). Gambar (2.1.2) dan (2.1.3) keduanya merupakan subgraph sejati dan gambar (2.1.3) adalah spanning subgraph.



Gbr. (2.1.2)

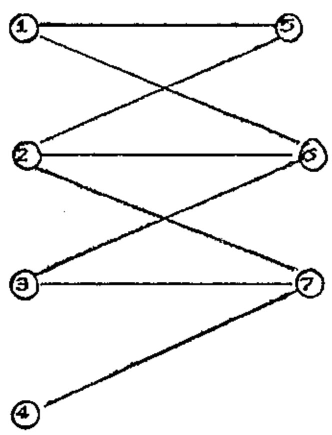


Gbr. (2.1.3)

DEFINISI 2.1.3 : Graph Biparthe

Sebuah graph G (V,E) disebut Biparthe jika himpunan titik-titik V dapat dibagi menjadi dua subset yang terpisah V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap garis dari graph G menghubungkan sebuah titik di V_1 kesebuah titik di V_2 atau garis-garisnya mempunyai satu ujung akhir di V_1 dan yang lain di V_2 (Robin, J.W dan John, J.W,1992).

Contohnya pada gambar (2.1.4). Graph G(V,E) denganV(G)= {1,2,3,... ,7}, dapat dibagi menjadi V_1 dan V_2 sedemikian sehingga V_1 = {1,2,3,4} , V_2 = {5,6,7}. dan E(G)= {(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(2,7),(3,6),(3,7),(4,7)}.



Gbr. (2.1.4)

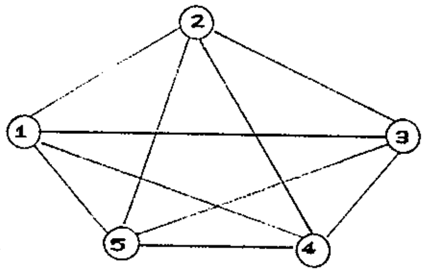
DEFINISI 2.1.4: Edge Sequence

Edge Sequence dengan panjang k-1 dalam graph G adalah sequence terbatas dari edge bentuk :

$(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)$ $\quad k \geq 2$ di G.

Edge Sequence disebut tertutup jika $i_1 = i_k$, dan disebut terbuka jika sebaliknya (Chen, W.K, 1976).

Contoh dalam gambar (2.1.5).



Gbr. (2.1.5)

(1,2),(2,4),(4,2),(2,3),(3,5),(5,3),(3,4) adalah edge sequence terbuka dengan panjang 7.

(5,2),(2,4),(4,3),(3,4),(4,1),(1,5) adalah edge sequence tertutup dengan panjang 6.

DEFINISI 2.1.5 : Edge Train

Jika semua garis muncul dalam sebuah barisan garis yang berbeda, barisan garis itu disebut Edge Train (Mayeda, W, 1971).

DEFINISI 2.1.6 : PATH

Sebuah edge train terbuka

$(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)$ $k \geq 2$ disebut Path dengan panjang k-1 jika semua titik titik $i_1,i_2,\ldots,i_k$ adalah berbeda. Sebuah titik terpisah adalah dianggap sebuah path dengan panjang 0 (nol) (Chen, W.K, 1976).

Contohnya pada gambar (2.1.5) yaitu (1,2),(2,4), (4,5),(5,3) adalah sebuah path dengan panjang 4.

DEFINISI 2.1.7 : Sirkuit (Circuit)

Sebuah edge train tertutup

$(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)$ $k \geq 2$ disebut sirkuit dengan panjang k-1 jika $i_1 = i_k$. (Chen, W.K, 1976).

2.2. Masalah Subgraph dari Digraph

DEFINISI 2.2.1 : Directed Graph

Sebuah graph G(V,E) disebut directed graph bila semua garis dalam graph tersebut mempunyai arah.

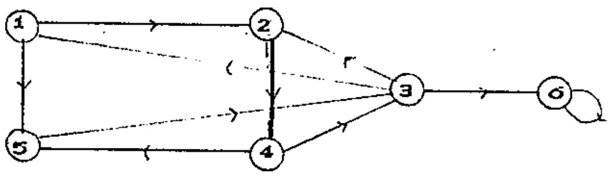
DEFINISI 2.2.2 : Outgoing dan Incoming Degree

Untuk sebuah directed graph G(V,E), angka $d_H^+(i)$ dari garis-garis pada G memiliki titik i sebagai titik awal disebut outgoing degree dari titik i di G, dan angka

$d_H^-(i)$ dari garis-garis pada G memiliki titik i sebagai titik akhir disebut incoming degree dari titik i dalam G. $[d_H^+(i), d_H^-(i)]$ disebut pasangan derajat dari titik i dalam G (Chen, W.K, 1976).

Jadi, ada dua angka yang didefinisikan untuk setiap titik dari G. Angka-angka itu kadang -kadang juga disebut sebagai derajat positip dan negatip dari sebuah titik.

Contoh :



Gbr.(2.2.1)

Barisan pasangan derajat $[d_H^+(i), d_H^-(i)]$ dari titik-titik i ($i = 1,2,\ldots,6$) dari graph pada gambar (2.2.1) adalah $\{[2,1],[1.2],[3,2],[2,1],[1,2],[1,2]\}$.

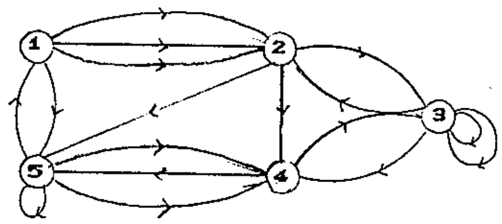
Untuk selanjutnya, jika X dan Y himpunan bagian dari V, maka (X,Y) dinotasikan sebagai himpunan semua garis berarah (x,y) dari $x \in X$ ke $y \in Y$. Dan jumlah dari titik-titik dalam X dinotasikan dengan $|X|$ sedangkan $|(X,Y)|$ adalah notasi dari jumlah garis dalam (X,Y).

Khususnya dalam $|(x,y)| = k$ menunjukkan jumlah garis-garis paralel dari titik x ke titik y dalam E.

DEFINISI 2.2.3 : Digraph-(p,s)

Sebuah digraph-(p,s) adalah directed graph G(V,E), yang mana $|(x,y)| \leq p$ untuk semua $(x,y) \in E$, $x \neq y$ dan $|(x,x)| \leq s$ untuk semua $x \in V$, dengan p dan s adalah integer nonnegatif. Kalau p = s, digraph-(p,s) disebut graph-p (Chen, W.K, 1976).

Contoh :

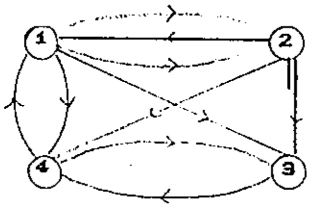


Gbr.(2.2.2)

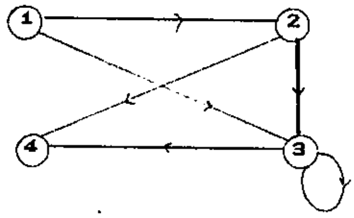
Pada graph diatas adalah directed graph-(3,2), karena jumlah maksimal garis yang menghubungkan suatu titik ke titik lain adalah 3, dan jumlah maksimal dari self-loop pada setiap titik adalah 2.

Subgraph (p,s) dari suatu digraph G(V,E) adalah subgraph dari graph tersebut yang merupakan digraph-(p,s).

Contoh :



Gbr. (2.2.3)



Gbr. (2.2.4)

Terlihat bahwa graph pada gambar (2.2.4) adalah sebuah subgraph (1,1) dari digraph pada gambar (2.2.3).

THEOREMA 2.2.1 :

Sebuah directed graph G(V,E) memiliki subgraph (p,s) H dengan derajat keluar dan masuk yang memenuhi :

$$d_H^+(x) = a(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

$$d_H^-(x) = b(x) \geq 0, \qquad x \in V \qquad \text{....(2.2.1)}$$

jika dan hanya jika

$$a(V) = b(V) \qquad \text{...........(2.2.2)}$$

dan juga

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min \{ b(y), \sum_{x \in X} \min [\, |(x,y)| , \delta_{xy}(s-p)+p] \} \geq a(X)$$

$$\text{............(2.2.3)}$$

atau

$$\sum_{y \in \gamma^*(X)} \min \{ a(y), \sum_{x \in X} \min [\, |(x,y)| , \delta_{xy}(s-p)+p] \} \geq b(X)$$

untuk semua $X \subseteq V$ ....(2.2.4) dimana :

a(x) dan b(x) = dua integer nonnegatif

δ_{xy} = kroneker delta, $\delta_{xy} = 0$ jika $x \neq y$, dan $\delta_{xy} = 1$ jika $x = y$.

$\gamma(X)$ = notasi dari himpunan titik akhir dari garis G yang mempunyai titik awal di X.

$\gamma^*(X)$= notasi dari himpunan titik awal dari garis G yang mempunyai titik akhir di X.

$$a(V) = \sum_{x \in V} a(X)$$

$$b(V) = \sum_{x \in V} b(X)$$

BUKTI :

Untuk keberadaan subgraph H maka jelas bahwa $a(V) = b(V)$.

Untuk bukti lengkapnya, perhatikan masalah persediaan dan permintaan.

Dalam masalah persediaan dan permintaan, dihubungkan dengan setiap $a(x) = a(x')$ $\quad a'(x) = a'(x')$, $x \in V$, $x' \in V'$

$b(x) = b(x'')$ $\quad b'(x) = b'(x'')$, $x \in V$, $x'' \in V''$

Kapasitas fungsi c dari E' ke integer non negatif didefinisikan :

$$\begin{aligned} c(x',y'') &= \min [\ (x,y)\ ,p], \quad x \neq y \\ &= \min [\ (x,y)\ ,s], \quad x = y \quad \ldots.(2.2.5) \end{aligned}$$

$B(V'UV'', E', c, f)$ dengan sumber himpunan V' dan terminal himpunan V'', dan memenuhi :

$$a(x') \le f(x', V'UV'') \le a'(x'), \quad x' \in V'$$

$$b(x'') \le f(V'UV'', x'') \le b'(x''), \quad x'' \in V''$$

$$c(x', y'') \ge f(x', y'') \ge 0, \quad (x', y'') \in E' \qquad .....(2.2.6)$$

fisibel jika dan hanya jika

$$c(X', \bar{X}'') \ge b(\bar{X}'') - a'(\bar{X}') \qquad .....(2.2.7)$$

$$c(X', \bar{X}'') \ge a(X') - b'(X'') \qquad .....(2.2.8)$$

berlaku untuk setiap subset $X' \in V'$ dan $X'' \in V''$.

Jika digraph $G(V,E)$ mengandung spanning subgraph (p,s) yang memiliki : $a(x) \le d_H^+(x) \le a'(x)$

$$b(x) \le d_H^-(x) \le b'(x)$$

dan memenuhi :

$$0 \le a(x) \le a'(x)$$

$$0 \le b(x) \le b'(x)$$

maka ia adalah sebuah aliran fisibel integral f dalam B yang memenuhi (2.2.6) dan (2.2.5). Jika aliran fisibel integral f dari V' ke V'' dalam B memenuhi (2.2.6), maka kita dapat membentuk sebuah subgraph (p,s).

Pertidaksamaan (2.2.3) eqivalen (2.2.6)

Bukti :

misal $U'' = \{y''\ y'' \in V'', b(y'') < c(X', y'')\}$

Untuk pasangan subset $X' \in V'$ dan $U'' \in V''$ pertidaksamaan (2.2.8) dapat ditulis :

$$c(X',\bar{U}'') + b'(U'') = \sum_{y \in \gamma(X')} \min \{b(y''), c(X',y'')\} \geq a(X') \qquad \text{.....(2.2.9)}$$

untuk $X' \in V'$, sebelah kiri pertidaksamaan (2.2.9) jumlah minimal untuk semua $X'' \in V''$, didapat :

$$\begin{aligned} c(X',\bar{U}'') + b'(U'') &= c(X',\bar{U}''\cap X'') + c(X',\bar{X}'') - c(X',U''\cap X'') \\ &\quad + b'(U''\cap\bar{X}'') + b'(X'') - b'(\bar{U}''\cap X'') \\ &\leq c(X',\bar{X}'') + b'(X'') \end{aligned}$$

dengan $c(X',\bar{U}''\cap X'') - b'(\bar{U}''\cap X'') \leq 0$

$b'(U''\cap\bar{X}'') - c(X',U''\cap X'') \leq 0.$

Jadi (2.2.3) terbukti eqivalen dengan (2.2.8).

Sehingga kondisi (2.2.8) terpenuhi untuk semua $X' \in V'$ dan $X'' \in V''$ jika dan hanya jika (2.2.8) berlaku untuk semua $X' \in V'$.

Dengan cara yang sama kondisi (2.2.7) disederhanakan

ke $$\sum_{y \in \gamma^*(X'')} \min [a(X'), c(x',X'')] \geq b(X'') \qquad \text{.....(2.2.10)}$$

Untuk perhitungan $c(x',y'')$ dan $c(x',X'')$, $y''\in V''$ dan $x'\in V'$

misalkan $X = \{ x \in V | x' \in X' \}$

$$Y = \{ y \in V | y' \in X'' \} \qquad \qquad .....(2.2.10)$$

maka dari persamaan (2.2.7) kita dapatkan :

$$c(X',y'') = \sum_{x \in X} \min [\, |(x,y)|\, , \delta_{xy}(s-p)+p]$$

$$c(x',X'') = \sum_{y \in Y} \min [\, |(x,y)|\, , \delta_{xy}(s-p)+p]$$

Karena pertidaksamaan (2.2.3) eqivalen dengan (2.2.8) maka terbukti bahwa dapat dibentuk sebuah subgraph (p,s) H yang memenuhi (2.2.1).

AKIBAT 2.2.1 :

Sebuah directed graph G(V,E) memiliki subgraph H dengan derajat keluar dan masuk $d_H^+(x)$ dan $d_H^-(x)$ yang memenuhi :

$$d_H^+(x) = a(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

$$d_H^-(x) = b(x) \geq 0, \qquad x \in V$$

jika dan hanya jika

$$a(V) = b(V)$$

dan juga

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min \{ b(y),\ |(X,y)| \} \geq a(X)$$

atau

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min \{a(y),\ |(y,X)|\} \geq b(X)$$

untuk semua $X \subseteq V$.

BUKTI :

$\Rightarrow$ Berdasarkan theorema (2.2.1)

$c = \Sigma\, d^+_H(x) = \Sigma\, d^-_H(x)$

$$\sum_{x \in V} d^+_H(x) = \sum_{x \in V} d^-_H(x)$$

$$\sum_{x \in V} a(x) = \sum_{x \in V} b(x)$$

$$a(V) = b(V).$$

misalkan $s = p = \sum_{(x,y) \in E} |(x,y)|$

$$(X,y) = \sum_{x \in X} |(x.y)| = \sum_{x \in X} \min\, [\,|(x,y)|\,,p]$$

diambil $p = \infty$, dan $\sum_{x \in X} a(x) = a(X)$

sehingga $\sum_{x \in X} \min\, [\,|(x,y)|\,,p]$ menjadi $|(X,y)|$

dan

$$\sum_{x \in X} \min\ [\,|(y,x)|\,,p] \text{ menjadi } |(y,X)|.$$

$\Leftarrow$ $a(V) = b(V)$ karena $x \in V$, maka $\sum\limits_{x \in V} a(x) = \sum\limits_{x \in V} b(x)$

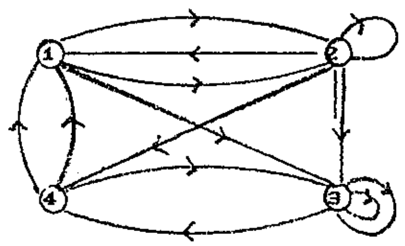
$$\sum_{x \in V} d_H^+(x) = \sum_{x \in V} d_H^-(x)$$

sedemikian sehingga $d_H^+(x) = a(x)$, $d_H^-(x) = b(x)$.

2.3. Contoh Persoalan Subgraph dari Digraph

Tentukan subgraph (1,0) H dari graph pada gambar (2.3.1) yang memiliki derajat keluar dan masuk $d_H^+(x)$ dan $d_H^-(x)$ yang memenuhi :

$$\begin{array}{ll} d_H^+(1) = 2 & d_H^-(1) = 0 \\ d_H^+(2) = 2 & d_H^-(2) = 1 \\ d_H^+(3) = 2 & d_H^-(3) = 3 \\ d_H^+(4) = 0 & d_H^-(4) = 2 \end{array} \qquad \text{.......(2.3.1)}$$



Gbr.(2.3.1)

Penyelesaian :

Dari theorema 2.2.1 keberadaan sebuah subgraph (1,0) jika dan hanya jika a(V) = b(V) dan juga

$$\sum_{y \in \gamma(X)} \min \{b(y), \sum_{x \in X} \min [\,|(x,y)|\,;\delta_{xy}(0-1)+1]\} \geq a(X)$$

atau

$$\sum_{y \in \gamma^{*}(X)} \min \{a(y), \sum_{x \in X} \min [\,|(x,y)|\,,\delta_{xy}(0-1)+1]\} \geq b(X)$$

untuk semua himpunan bagian $X \subseteq V$.

$\Leftarrow$ Syarat Cukup : a(V) = b(V) maka $d_H^+(x) = a(x) \geq 0$

$d_H^-(x) = b(x) \geq 0.$

terlihat jelas pada persamaan (2.3.1).

$\Rightarrow$ Syarat Perlu :

$a(V) = a(\{1,2,3,4\}) = 2 + 2 + 2 + 0 = 6$

$= b(\{1,2,3,4\}) = 0 + 1 + 3 + 2 = 6 = b(V)$

dimana $a(x)=d_H^+(x)$ dan $b(x)=d_H^-(x)$ untuk x = 1,2,3,4.

Untuk himpunan bagian X={3} dengan p=1 dan s=0, dalam persamaan (2.2.2) diperoleh :

$\min \{b(3),\min [\,|(3,3)|\,,\delta_{xy}(0-1)+1]\} + \min \{b(4),$

$\min [\,|(3,4)|\,,\delta_{xy}(0-1)+1]\}$

$= \min \{3,\min [2,0]\} + \min \{2,\min [1,1]\}$

$= \min [3.0] + \min [2,1]$

$= 0 + 1 \geq a(3) = 2$

Dimana $\gamma(X) = \gamma(3) = \{3,4\}$. Jadi kondisi

$$\sum_{y\in\gamma(X)} \min \{b(y), \sum_{x\in X} \min [\,|(x,y)|, \delta_{xy}(s-p)+p]\} \geq a(X)$$

tidak terpenuhi untuk $X = \{3\}$, dan berdasarkan theorema 2.2.1 subgraph (1.0) tidak ada.

Akan tetapi, diperkirakan dapat ditentukan keberadaan beberapa subgraph yang memiliki derajat masuk dan keluar yang memenuhi persamaan (2.3.1).

Maka berdasarkan Akibat 2.2.1 permasalahan subgraph itu dapat diselesaikan jika dan hanya jika $a(V) = b(V)$ dan

juga $\sum_{y\in\gamma(X)} \min \{b(y), |(X,y)|\} \geq a(X)$

atau

$$\sum_{y\in\gamma^*(X)} \min \{a(y), |(y,X)|\} \geq b(X)$$

untuk semua himpunan bagian $X \subseteq V$.

Perhitungan :

$$\sum_{y\in\gamma^*(X)} \min \{a(y), |(y,X)|\} \geq b(X)$$

1. Untuk satu titik

$X = \{1\}$

$\min [a(1), |(1,1)|]+\min [a(2), |(2,1)|]+\min [a(3), |(3,1)|]+$

$\min [a(4), |(4,1)|]$

$= \min [2,0] + \min [2,1] + \min [2,0] + \min [0,2]$

$= 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \geq b(1) = 0$

$X = \{2\}$

$\min [a(1), |(1,2)|] + \min [a(2), |(2,2)|] + \min [a(3), |(3,2)|] +$
$\min [a(4), |(4,2)|]$

$= \min [2,2] + \min [2,1] + \min [2,0] + \min [0,0]$

$= 2 + 1 + 0 + 0 = 3 \geq b(2) = 1$

$X = \{3\}$

$\min [a(1), |(1,3)|] + \min [a(2), |(2,3)|] + \min [a(3), |(3,3)|] +$
$\min [a(4), |(4,3)|]$

$= \min [2,1] + \min [2,1] + \min [2,1] + \min [0,0]$

$= 1 + 1 + 2 + 0 = 4 \geq b(3) = 3$

$X = \{4\}$

$\min [a(1), |(1,4)|] + \min [a(2), |(2,4)|] + \min [a(3), |(3,4)|] +$
$\min [a(4), |(4,4)|]$

$= \min [2,0] + \min [2,1] + \min [2,1] + \min [0,0]$

$= 0 + 1 + 1 + 0 = 2 \geq b(4) = 2.$

2. Untuk dua titik

$X = \{1,2\}$

$\min [a(1), |(1,1)| + |(1,2)|] + \min [a(2), |(2,1)| + |(2,2)|] +$
$\min [a(3), |(3,1)| + |(3,2)|] + \min [a(4), |(4,1)| + |(4,2)|]$

$= \min [2,0+2] + \min [2,1+1] + \min [2,0+0] + \min [0,2+0]$

$= 2 + 2 + 0 + 0 = 4 \geq b\{1,2\} = 0 + 1 = 1.$

$X = \{1,3\}$

$\min [a(1), |(1,1)| + |(1,3)|] + \min [a(2), |(2,1)| + |(2,3)|] +$

$\min [a(3), |(3,1)| + |(3,3)|] + \min [a(4), |(4,1)| + |(4,3)|]$

$= \min [2,0+1] + \min [2,1+1] + \min [2,0+2] + \min [0,2+1]$

$= 1 + 2 + 2 + 0 = 5 \geq b\{1,3\} = 0 + 3 = 3.$

$X = \{1,4\}$

$\min [a(1), |(1,1)| + |(1,4)|] + \min [a(2), |(2,1)| + |(2,4)|] +$

$\min [a(3), |(3,1)| + |(3,4)|] + \min [a(4), |(4,1)| + |(4,4)|]$

$= \min [2,0+0] + \min [2,1+1] + \min [2,0+1] + \min [0,2+0]$

$= 0 + 2 + 1 + 0 = 3 \geq b\{1,4\} = 0 + 2 = 2.$

$X = \{2,3\}$

$\min [a(1), |(1,2)| + |(1,3)|] + \min [a(2), |(2,2)| + |(2,3)|] +$

$\min [a(3), |(3,2)| + |(3,3)|] + \min [a(4), |(4,2)| + |(4,3)|]$

$= \min [2,2+1] + \min [2,1+1] + \min [2,0+2] + \min [0,0+1]$

$= 2 + 2 + 2 + 0 = 6 \geq b\{2,3\} = 1 + 3 = 4.$

$X = \{2,4\}$

$\min [a(1), |(1,2)| + |(1,4)|] + \min [a(2), |(2,2)| + |(2,4)|] +$

$\min [a(3), |(3,2)| + |(3,4)|] + \min [a(4), |(4,2)| + |(4,4)|]$

$= \min [2,2+0] + \min [2,1+1] + \min [2,0+1] + \min [0,0+0]$

$= 2 + 2 + 1 + 0 = 5 \geq b\{2,4\} = 1 + 2 = 3.$

$X = \{3,4\}$

$\min [a(1), |(1,3)| + |(1,4)|] + \min [a(2), |(2,3)| + |(2,4)|] +$

min [a(3), |(3,3)| + |(3,4)|]+ min [a(4), |(4,3)| + |(4,4)|]

= min [2,1+0] + min [2,1+1] + min [2,0+1] + min [0,0+0]

= 1 + 2 + 2 + 0 = 5 $\geq$ b{3,4} = 3 + 2 = 5

3. Untuk tiga titik

X = {1,2,3}

min [a(1), |(1,1)| + |(1,2)| + |(1,3)|]+min [a(2), |(2,1)| + |(2,2)| + |(2,3)|]+ min [a(3), |(3,1)| + |(3,2)| + |(3,3)|] + min [a(4), |(4,1)| + |(4,2)| + |(4,3)|]

= min [2,0+2+1] + min [2,1+1+1] + min [2,0+0+2] + min [0,2+0+1]

= 2 + 2 + 2 + 0 = 6 $\geq$ b{1,2,3} = 0 + 1 + 3 = 4.

X = {1,2,4}

min [a(1), |(1,1)| + |(1,2)| + |(1,4)|]+min [a(2), |(2,1)| + |(2,2)| + |(2,4)|]+ min [a(3), |(3,1)| + |(3,2)| + |(3,4)|] + min [a(4), |(4,1)| + |(4,2)| + |(4,4)|]

= min [2,0+2+0]+min [2,1+1+1]+min [2,0+0+1]+min [0,2+0+0]

= 2 + 2 + 1 + 0 = 5 $\geq$ b{1,2,4} = 0 + 1 + 2 = 3.

X = {1,3,4}

min [a(1), |(1,1)| + |(1,3)| + |(1,4)|]+min [a(2), |(2,1)| + |(2,3)| + |(2,4)|]+ min [a(3), |(3,1)| + |(3,3)| + |(3,4)|] + min [a(4), |(4,1)| + |(4,3)| + |(4,4)|]

= min [2,0+1+0]+min [2,1+1+1]+min [2,0+2+1]+min [0,2+1+0]

= 1 + 2 + 2 + 0 = 5 $\geq$ b{1,3,4} = 0 + 3 + 2 = 5.

$X = \{2,3,4\}$

$\min [a(1), |(1,2)| + |(1,3)| + |(1,4)|] + \min [a(2), |(2,2)| + |(2,3)| + |(2,4)|] + \min [a(3), |(3,2)| + |(3,3)| + |(3,4)|] + \min [a(4), |(4,2)| + |(4,3)| + |(4,4)|]$

$= \min [2,2+1+0] + \min [2,1+1+1] + \min [2,0+2+1] + \min [0,0+1+0]$

$= 2 + 2 + 2 + 0 = 6 \geq b\{2,3,4\} = 1 + 3 + 2 = 6.$

4. Untuk empat titik

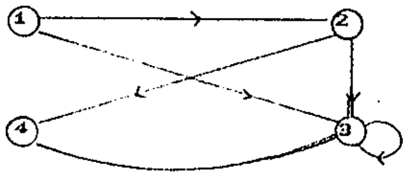
$X = \{1,2,3,4\}$

$\min [a(1), |(1,1)| + |(1,2)| + |(1,3)| + |(1,4)|] + \min [a(2), |(2,1)| + |(2,2)| + |(2,3)| + |(2,4)|] + \min [a(3), |(3,1)| + |(3,2)| + |(3,3)| + |(3,4)|] + \min [a(4), (4,1) + |(4,2)| + |(4,3)| + |(4,4)|]$

$= \min [2,0+2+1+0] + \min [2,1+1+1+1] + \min [2,0+0+2+1] + \min [0,2+0+1+0]$

$= 2 + 2 + 2 + 0 = 6 \geq b\{1,2,3,4\} = 0 + 1 + 3 + 2 = 6.$

Karena semua kondisi terpenuhi maka keberadaan subgraph H dari sebuah graph tersebut ada, seperti terlihat pada gambar (2.3.2).



Gambar (2.3.2)