BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. PROBABILITAS DAN FUNGSI PEMBANGKIT PROBABILITAS

2.1.1. Probabilitas

Probabilitas pada umumnya digunakan untuk mengukur kemungkinan terjadinya peristiwa. Setiap hasil yang mungkin terjadi dari suatu experimen disebut ruang sampel, yang biasanya diberi notasi Ω. Suatu event adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Kelas semua event disebut ruang event, diberi notasi $\mathscr{A}$. Berkaitan dengan hal-hal tersebut akan diuraikan beberapa definisi yang berhubungan dengan probabilitas.

Definisi 1. (Fungsi Probabilitas)

Misalkan Ω adalah ruang sampel dan $\mathscr{A}$ adalah aljabar event, suatu fungsi probabilitas P(.) adalah himpunan fungsi dengan domain $\mathscr{A}$ (suatu aljabar dari kejadian-kejadian) dan kodomain interval [0,1] yang memenuhi :

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathscr{A}$
- $P(\Omega) = 1$
- Jika $A_1, A_2, \ldots\ldots.$ adalah barisan yang saling asing dari kejadian dalam $\mathscr{A}$ (yaitu $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$; $i\ , j = 1,2,\ldots.$) dan jika $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$,

  maka : $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Catatan : P(A) dibaca "probabilitas event A" (Mood , hal 22)

Dari definisi diatas, maka dapat didefinisikan suatu ruang probabilitas yaitu :

Definisi 2. (Ruang Probabilitas)

Ruang Probabilitas adalah Tripel [Ω, $\mathscr{A}$, P(.)] dimana Ω adalah ruang sampel, $\mathscr{A}$ adalah koleksi (diasumsikan suatu aljabar) kejadian-kejadian (masing-masing bagian dari Ω) dan P(.) adalah fungsi probabilitas dengan domain $\mathscr{A}$. (Mood, hal 25)

Definisi 3. (Kejadian-kejadian yang saling bebas (independent))

Untuk suatu ruang probabilitas [Ω, $\mathscr{A}$, P(.)] diambil A dan B yang merupakan dua kejadian dalam $\mathscr{A}$. Kejadian-kejadian A dan B didefinisikan sebagai kejadian yang saling bebas (independent) jika dan hanya jika dipenuhi :

$$P(AB) = P(A) \,.\, P(B)$$

dimana notasi untuk P(AB) adalah $P(A \cap B)$ (Scheerer, hal 45)

Definisi 4. (Probabilitas Bersyarat)

Diberikan ruang probabilitas [Ω, $\mathscr{A}$, P(.)], A dan B adalah dua event dalam A. Probabilitas bersyarat dari event A jika event B diketahui adalah :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$ (Mood, hal 32)

Definisi 5. **(Variabel Random)**

Diberikan ruang probabilitas $[\Omega, \mathscr{A}, P(.)]$, sebuah variabel random dinotasikan dengan X atau X(.) adalah fungsi dengan domain Ω dan kodomain bernilai real. (Mood, hal 53)

2.1.2. Fungsi Pembangkit Probabilitas

Definisi 6. **(Fungsi Pembangkit)**

Misalkan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ adalah suatu barisan bilangan real. Dengan menggunakan variabel s didefinisikan sebuah fungsi :

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$$

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

Jika $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ konvergen pada suatu interval $-s_0 < s < s_0$, maka A(s) dikatakan ***Fungsi Pembangkit*** dari barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Disini s dianggap real, tetapi fungsi pembangkit dengan variabel komplek kadang-kadang digunakan. (Medhi, hal 1)

Contoh 2.1

1. Misalkan $a_k = 1$ untuk setiap k, maka $A(s) = 1 + s + s^2 + \ldots$ merupakan deret dengan $A(s) = \frac{1}{1-s}$ merupakan fungsi pembangkit dari barisan a_k dengan $-1 < s < 1$.

2. Barisan $\left\{a_k = \frac{1}{k!}\right\}$ konvergen pada interval $-\infty < s < \infty$, maka:

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

$$A(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}$$
$$= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ...$$
$$= e^s$$

merupakan fungsi pembangkit dari barisan a_k. Disini $\{a_k\}$ merupakan barisan dari sejumlah bilangan real dan bukan merupakan probabilitas dari sebarang variabel random.

Definisi 7. (Fungsi Pembangkit Probabilitas)

Misalkan bahwa X adalah variabel random yang diasumsikan nilai integer non negatif 0, 1,...., dan bahwa :

$$P\{X=k\} = p_k \qquad k = 0, 1, 2, ... \qquad \sum_k p_k = 1$$

maka fungsi pembangkit P(s) yang bersangkutan dengan barisan probabilitas $\{p_k\}$ disebut sebagai *Fungsi Pembangkit Probabilitas* dari variabel random X. Sehingga:

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \qquad \text{(Medhi, hal 1)}$$

Contoh 2.2

1. Misalkan X adalah berdistribusi poisson dengan fungsi probabilitas :

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, ...$$

maka fungsi pembangkit probabilitas dari distribusi poisson tersebut adalah :

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k s^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda)(\lambda s)^k}{k!}$$

karena $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda s}$, maka :

$$P(s) = e^{\lambda s} \exp(-\lambda)$$
$$= \exp(-\lambda)\exp(\lambda s)$$
$$= \exp\{\lambda(s-1)\}$$

p_k dari fungsi pembangkit probabilitas P(s) juga dapat ditentukan oleh :

p_k = Koefisien dari s^k dalam P(s)

Bukti :

Jika P(s) dari bentuk $P(s) = \frac{U(s)}{V(s)}$, maka P(s) dapat diperluas dalam deret kuasa dalam s, yaitu dengan menyusun P(s) dalam pecahan parsiil. Misalkan $s_1, s_2, \ldots, s_r$ akar yang berbeda dari V(s), yaitu $V(s)=(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_r)$, maka P(s) dapat disusun dalam pecahan parsiil sebagai berikut :

$$P(s) = \frac{a_1}{s_1 - s} + \ldots \frac{a_r}{s_r - s}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{s_i - s} \quad \text{dimana} \quad a_i = \frac{-U(s_i)}{V'(s_i)}$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $P(s) = \frac{a_1}{s_1 - s} + \ldots + \frac{a_r}{s_r - s}$ dengan $a_i = \frac{-U(s_i)}{V'(s_i)}$

maka P(s) dapat disusun dalam bentuk $P(s) = \frac{U(s)}{V(s)}$ dimana :

$U(s) = -\sum_{i=1}^{r} U(s_i)$ dan $V(s) = (s - s_1)(s - s_2)\ldots\ldots(s - s_r)$ sehingga :

$$P(s) = \frac{\frac{-U(s_1)}{V'(s_1)}}{s_1 - s} + \frac{\frac{-U(s_2)}{V'(s_2)}}{s_2 - s} + \ldots\ldots + \frac{\frac{-U(s_{1r})}{V'(s_r)}}{s_r - s}$$

$$P(s) = \frac{\frac{-U(s_1)}{-(s-s_2)(s-s_3)\ldots(s-s_r)}}{s_1 - s} + \frac{\frac{-U(s_2)}{-(s-s_1)(s-s_3)\ldots(s-s_r)}}{s_2 - s} + \ldots\ldots + \frac{\frac{-U(s_r)}{-(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\ldots}}{s_r - s}$$

$$P(s) = \frac{-U(s_1)}{(s-s_2)(s-s_3)\ldots(s-s_r)(s_1-s)} + \frac{-U(s_2)}{(s-s_1)(s-s_3)\ldots(s-s_r)(s_2-s)} + \ldots + \frac{-U(s_r)}{(s-s_2)(s-s_3)\ldots(s-s_r)}$$

$$P(s) = \frac{-U(s_1)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\ldots(s-s_r)} + \frac{-U(s_2)}{(s-s_1)(s_2-s)(s-s_3)\ldots(s-s_r)} + \ldots + \frac{-U(s_r)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\ldots(s-s_r)}$$

$$P(s) = \frac{-U(s_1)}{V(s)} + \frac{-U(s_2)}{V(s)} + \ldots + \frac{-U(s_r)}{V(s)}$$

$$P(s) = \frac{-\sum_{i=1}^{r} U(s_i)}{V(s)}$$, sehingga :

$$P(s) = \frac{U(s)}{V(s)}$$

Ambil $\frac{a_i}{s_i - s} = \frac{a_i}{s_i(1 - s/s_i)} = \frac{a_i}{s_i}\left(1 - \frac{s}{s_i}\right)^{-1}$

$$= \frac{a_i}{s_i} + \left\{1 + \frac{s}{s_1} + \left(\frac{s}{s_2}\right)^2 + \ldots\right\} \text{untuk } |s| < |s_i|$$

$$= a_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{s_i^{k+1}}$$

$P(s) = \sum_{i=1}^{l} \frac{a_i}{s_i - s_i}$ dan karena $\frac{a_i}{s_i - s} = a_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{s_i^{k+1}}$ maka :

$$P(s) = \sum_{i=1}^{l} a_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{s_i - s_i}$$

Dengan mengingat definisi 7 bahwa $P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ maka :

$p_k \equiv$ koefisien dari s^k dalam P(s).

$$\equiv \sum_{i=1}^{l} \frac{a_i}{s_i^{k+1}}$$

$$= \frac{a_1}{s_1^{k+1}} + \ldots\ldots + \frac{a_i}{s_i^{k+1}} + \ldots.. + \frac{a_l}{s_l^{k+1}}$$

Jadi p_k juga dapat ditentukan oleh koefisien dari s^k dalam perluasan dari P(s) sebagai deret kuasa dalam s.

2.2. Jumlah dari Bilangan Tetap Variabel Random

Andaikan X dan Y dua variabel random independent bernilai integer non negatip dengan distribusi probabilitas :

$P\{X=k\} = a_k$ dan $P\{Y=j\}=b_j$

Jumlah Z = X + Y juga merupakan sebuah variabel random. Kejadian $\{Z=r\}$ adalah saling asing dengan probabilitas :

(X=0 dan Y=r) dengan probabilitas $a_0 b_r$

(X=1 dan Y=r-1) dengan probabilitas $a_1 b_{r-1}$

.

.

(X=t dan Y=r-t) dengan probabilitas $a_t b_{r-t}$

.

.

(X=r dan Y=0) dengan probabilitas $a_r b_0$

Oleh karena itu distribusi Z diberikan oleh :

$$C_r = P\{Z=r\} = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \ldots + a_r b_0$$

$$= \sum_{t=0}^{r} a_t b_{r-t} \qquad 2.1$$

Andaikan A(s), B(s), C(s) secara berturut-turut merupakan fungsi pembangkit probabilitas dari X, Y, dan Z, maka dari persamaan 2.1 diperoleh :

$$C(s) = A(s).B(s) \qquad 2.2$$

Hasil dari persamaan 2.2 juga memenuhi untuk keadaan dari jumlah variabel random $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ yaitu fungsi pembangkit probabilitas dari S_n merupakan hasil pembangkit probabilitas dari $X_1, X_2,..., X_n$. Jadi jumlah $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ dari jumlah tetap n dari variabel random X_i yang terdistribusi secara independent dan identik mempunyai fungsi pembangkit probabilitas $P^n(s)$, yang mana tiap-tiap X_i mempunyai fungsi pembangkit probabilitas P(s).

2.3. PROSES STOKASTIK

Istilah proses stokastik seringkali digunakan berkaitan dengan observasi yang berorientasi waktu. Menurut Hines dan Montgomeri [2] proses stokastik adalah serangkaian variabel random $\{X_t\}$ dimana $t \in T$ merupakan indeks waktu.

Himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variabel random X_t dari suatu proses stokastik $\{X_t , t \geq 0\}$ disebut ruang state (state space) dinotasikan dengan S, dimana X_t menyatakan state atau keadaan sistem itu pada saat t.

2.3.1. Rantai Markov

Definisi 8. (Sifat Markov)

Suatu proses stokastik $\{X_t\}$ $t = 0, 1, 2, ...$ dikatakan memenuhi sifat markov jika memenuhi syarat :

$$P(X_{t+1} = j \mid X_0 = i_0 , X_1 = i_1 ,...., X_{t-1} = i_{t-1} , X_t = i)$$

$$= P(X_{t+1} = j \mid X_t = i), \quad \text{untuk } t = 0,1,... \text{ dan semua state } i_0,....,i_{t-1}, i, j.$$

Syarat markov ini dapat dibaca sebagai berikut :

Probabilitas $X_{t+1} = j$ bila diketahui $X_0 = i_0$, $X_1 = i_1$,...., $X_{t-1} = i_{t-1}$, $X_t = i$ sama dengan probabilitas $X_{t+1} = j$ bila diketahui $X_t = i$. Hal ini berarti kondisi atau syarat bahwa $X_0 = i_0$, $X_1 = i_1$,...., $X_{t-1} = i_{t-1}$, tidak mempengaruhi, yang mempengaruhi probabilitas hanya $X_t = i$. Jadi keadaan (state) sebelumnya tidak berpengaruh terhadap keadaan besok, yang berpengaruh hanya keadaan sekarang. Keadaan sekarang berarti X_t dan keadaan besok adalah X_{t+1}. Selanjutnya dikatakan X_t , $t \geq 0$ sebagai rantai markov jika sistem itu memenuhi sifat markov dan mempunyai ruang state yang terhitung. (Praptono, hal 3.2)

Contoh 2.3

Misalkan dipunyai X_n menyatakan keadaan mesin pada hari ke-n. Untuk setiap n, $X_n = 0$ jika mesin dalam keadaan rusak dan $X_n = 1$ jika mesin dalam keadaan baik. Jadi ruang state $S = \{ 0 , 1 \}$. Mesin mulai pada suatu hari dalam keadaan rusak atau baik. Seandainya mesin pada hari ke-n diketahui rusak, probabilitas bahwa mesin pada hari itu (hari ke-n) dapat diperbaiki = p. (berarti probabilitas mesin pada hari berikutnya baik = p), atau $P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = p$. Sedangkan jika pada hari ke-n mesin diketahui baik, probabilitas pada hari berikutnya mesain rusak = q, atau $P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = q$.

Proses diatas merupakan proses markov, karena keadaan mesim pada hari esok hanya tegantung pada keadaan mesin pada hari ini, tidak tergantung pada hari-hari sebelumnya.

Definisi 9. (Rantai Markov Finite)

Misalkan X_t adalah rantai markov yang terdiri dari sejumlah finite k dari state $S_1, \ldots, S_k$ pada saat rantai tepat berasal dari state k, maka rantai markov dari type ini disebut rantai markov finite.

2.3.2. Matrik Probabilitas Transisi

Menurut Sceerer. Anne, himpunan state {0,1,...,N} beerhubungan dengan setiap rantai markov merupakan himpunan probabilitas transisi.

Definisi 10. (Probabilitas Transisi)

Probabilitas Transisi, P_{ij}, merupakan probabilitas pada sistem yang bergerak dari state i ke state j dalam satu langkah (pada satu percobaan atau dalam satu interval).

Karena P_{ij} merupakan probabilitas bersyarat maka probabilitas transisi P_{ij} harus memenuhi:

1. $0 \leq P_{ij} \leq 1$ untuk semua i dan j

2. $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$ untuk semua i

Notasi yang digunakan untuk menyatakan probabilitas transisi dapat juga digambarkan dalam bentuk matrik P, dimana elemen-elemennya P_{ij} (dimana i menyatakan baris dan j menyatakan kolom) dengan $i,j \in S$ yang disebut sebagai matrik markov atau matrik probabilitas transisi dan ditulis sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \ldots\ldots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \ldots\ldots \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} \ldots\ldots \\ . & & \\ . & & \end{bmatrix}$$

Seandainya diketahui ruang state S adalah berhingga , yaitu $S = \{0,1,\ldots,N\}$ maka matrik probabilitas transisi P dapat ditulis sebagai berikut :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & . \; . & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & . \; . & P_{0N} \\ P_{10} & P_{11} & . \; . & P_{1N} \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \; . & . \\ P_{N0} & P_{N1} & . \; . & P_{NN} \end{bmatrix} \end{array}$$

Contoh 2.4

Dalam sebuah sistem perhitungan, probabilitas sebuah error pada setiap putaran tergantung apakah ada atau tidak mendahului sebuah error.Akan didefinisikan 0 sebagai keadaan error dan satu sebagai keadaan tidak error. Probabilitas error jika mendahui adalah 0,75, probabilitas error jika didahului oleh tidak error adaalah 0,50, probabilitas tidak error jika didahului oleh error adalah 0,25, dan probabilitas tidak error jika didahului tidak error adalah 0,50.

Maka :

$$P = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,50 & 0,50 \end{bmatrix}$$

2.4. STATE ABSORBING

Suatu state atau kedudukan rantai markov i disebut state absorbing jika sekali sistem itu tinggal pada state i maka sistem itu akan tetap tinggal pada state i untuk selamanya. Hal ini dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 11. (state Absorbing)

Suatu state $i,j \in S$ pada suatu rantai markov disebut keadaan menyerap atau (state absorbing) jika $P_{ii}=1$ atau $P_{ij}=0$ untuk $i \neq j$. (Praptono, hal 3.10)

Contoh 2.5

Andaikan dari suatu rantai markov dengan $S=\{0,1,2,3,4\}$ diperoleh matrik transisi sebagai berikut :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

State 1 dan state 4 adalah state absorbsing karena $P_{11}=1$ dan $P_{44}=1$.