BAB II
TEORI PENUNJANG

2.1. Vektor dan Matriks

2.1.1. Vektor

Definisi 2.1.1.1.

Sebuah vektor komponen-n u adalah suatu aturan tuple-n dari bilangan-bilangan ditulis sebagai baris ($u_1, u_2, \ldots , u_n$) atau sebagai sebuah kolom $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

Penulisan u_i, $i = 1,2, \ldots, n$ diasumsikan adalah bilangan-bilangan riil dan disebut komponen-komponen dari vektor.

Definisi 2.1.1.2.

Sebuah matriks yang hanya terdiri dari satu baris atau satu kolom saja disebut vektor (vektor baris atau vektor kolom).

Contoh 2.1.1.2 :

* Vektor kolom dengan elemen 3 :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 22 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

* Vektor baris dengan elemen 2 :

$$\mathbf{v} = (-2,1)$$

Definisi 2.1.1.3.

Misal Himpunan V sedemikian sehingga jika **u**, **v** , **w** $\in$ V dan $\alpha, \beta \in R$, maka memenuhi postulat sebagai berikut :

Penambahan

i. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$

ii. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

iii. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

iv. Terdapat $0 \in V$, $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$

v. Terdapat $-\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$

Perkalian

vi. $\alpha \mathbf{u} \in V$

vii. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{u}) = \alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}$

viii. $(\alpha \beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta \mathbf{u})$

ix. $I\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Maka V adalah ruang vektor dan elemen-elemennya disebut vektor.

Definisi 2.1.1.4.

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ adalah sembarang vektor pada R_n, maka dot product didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Contoh 2.1.1.4 :

$\mathbf{u} = (2,3,1,4)$ $\qquad$ $\mathbf{v} = (1,0,1,3)$

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = (2.1+3.0+1.1+4.3) = 15$$

Definisi 2.1.1.5.

Sebuah vektor $\mathbf{u}$ dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $u_1, u_2, ..., u_n$ jika terdapat skalar-skalar α_i, sedemikian sehingga :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i \quad \text{dengan } \alpha_i \neq o$$

Contoh 2.1.1.5 :

a = (2,1,2) **b**= (1,0,3) **c**= (3,1,5). **a** bisa dikatakan kombinasi linier dari **b** dan **c** terlebih menghitung harga-harga α_1 dan α_2.

$(2,1,2) = \alpha_1 (1,0,3) + \alpha_2 (3,1,5)$

$2 = \alpha_1 + 3\alpha_2$ .... (1)

$1 = 0\alpha_1 + \alpha_2$ .... (2)

$2 = 3\alpha_1 + 5\alpha_2$ .... (3)

Dari ketiga persamaan tersebut didapat :

dari persamaan (2) $\alpha_2 = 1$

dari persamaan (1) $\alpha_1 = 2 - 3\alpha_2 = -1$

harga $\alpha_1 = -1$ dan $\alpha_2 = 1$ disubstitusi ke persamaan :

$(2,1,2) = \alpha_1 (1,0,3) + \alpha_2 (3,1,5)$

$(2,1,2) = -1 (1,0,3) + 1 (3,1,5)$

maka penulisan persamaan yang diminta **a** = -**b** + **c**

Definisi 2.1.1.6

Suatu vektor **u** dan **v** ditulis $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ dan $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ apabila $\mathbf{u}_i \leq \mathbf{v}_i$ untuk semua i dan terdapat paling sedikit satu elemen dalam **u** yang lebih kecil dari elemen di **v**.

Contoh 2.1.1.6 :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{dan } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

berarti $\mathbf{u}_i \le \mathbf{v}_i$ karena komponen ke-4 dari **u** kurang dari komponen ke-4 dari **v**.

2.1.2. Matriks

Definisi 2.1.2.1.

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan yang disusun menurut baris-baris dan kolom-kolom.

Matriks dinotasikan dengan huruf besar A, B, C, dan lain-lain. Secara lengkap ditulis :

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} adalah elemen matriks baris ke-i kolom ke-j dimana i = 1,2, ..., m ; j = 1, 2, ..., n, yang berarti banyaknya baris = m dan banyaknya kolom = n.

Definisi 2.1.2.2.

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang ukurannya sama,maka jumlah A dan B, (A+B) adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan elemen-elemen yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat dijumlahkan.

Contoh 2.1. 2.2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 0 & 4 \\ 14 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Sedang A + C dan B + C tidak dapat didefinisikan.

Definisi 2.1.2.3

Misal A dan B adalah sembarang matriks yang ukurannya sama maka A - B adalah suatu matriks D = (d_{ij}) dimana $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Definisi 2.1.2.4

Pandang matriks A berukuran (m x n) dan matriks B berukuran (n xr). Maka perkalian AB adalah suatu matriks C berukuran (m x r) dimana : $C = c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$; i = 1,...,m; j = 1,...,n.

atau :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\, b_{kj}$$

Contoh 2.1.2.4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{maka} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & -7 \\ 6 & 6 & 15 & -15 \\ 10 & 10 & 23 & -23 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.2.5

Suatu matriks A = (a_{ij}) berukuran (m x n) mempunyai transpose A^T berukuran (n x m) yang diperoleh dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A , i = 1,2, ...,m sebagai kolom ke-i dari A^T dan menuliskan kolom ke-j dari A, j = 1,...,n sebagai baris ke-j dari A^T. Dengan kata lain $A^T = (a_{ji})$.

Contoh 2.1.2.5 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Transpose dari matriks A adalah $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Operasi Transpose mempunyai 4 sifat dalam teorema berikut :

Teorema 2.1.2.1

$(A + B)^T = A^T + B^T$

Bukti : Misal $A = (a_{ij})$ matriks berukuran mxn dan $B = (b_{ij})$ matriks berukuran mxn maka $(A+B)^T = (a_{ij}+b_{ij})^T = (c_{ij})^T = (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = A^T + B^T$.

Teorema 2.1.2.2

$(A^T)^T = A$

Bukti : Misal $A = (a_{ij})$, maka $(A^T)^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$

Teorema 2.1.2.3

$(kA)^T = kA^T$; dimana k adalah skalar

Bukti : Ambil $A = (a_{ij})$, maka $A^T = (a_{ji})$

$(kA) = ka_{ij}$, maka $(kA)^T = (k)^T(a_{ij})^T = (k)(a_{ji}) = kA^T$

Teorema 2.1.2.4

$(AB)^T = B^TA^T$

Bukti : Ambil $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, maka elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dari AB adalah $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Yang juga merupakan elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari $(AB)^T$. Dilain pihak baris ke-j dari B^T adalah kolom ke-j dari B yaitu $(b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj})$ dan kolom ke-i dari A^T adalah baris ke-i dari A yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

Jadi elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i dari B^TA^T adalah :

$$\begin{bmatrix} b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \\ a_{i3} \end{bmatrix}$$

$$= b_{1j}\, a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \ldots + b_{nj}a_{in}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

benar untuk semua i dan j sehingga $(AB)^T = B^TA^T$

Definisi 2.1.2.6

Matriks identitas adalah matriks bujursangkar yang unsur-unsur diagonal utamanya semua sama dengan satu, dengan kata lain (u_{ij}) adalah matriks satuan bila $u_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $u_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Matriks satuan sering ditulis u_n, n menunjukkan ukuran matriks bujursangkar.

Contoh 2.1.2.6 :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.2.7

Pandang matriks A berukuran (nxn) dan M_{ij} suatu submatriks dari A dengan ukuran (n-1)x(n-1) dimana baris ke-i dan kolom ke-j dari A dihilangkan.

Contoh 2.1.2.7 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Maka $M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Definisi 2.1.2.8

Kofaktor dari suatu matriks A adalah $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ dimana A_{ij} adalah suatu skalar.

Contoh 2.1.2.8 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Maka $A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -10$

$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7$

Definisi 2.1.2.9

Determinan dari suatu matriks A adalah jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris dengan kofaktor-kofaktornya atau sebarang kolom dengan kofaktor-kofaktornya. Dengan perkataan lain:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \text{ dengan } i = 1,\ldots,n$$

Contoh 2.1.2.9 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \det(A) = |A| &= a_{11}A_{ii} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 1.(1) + 2.(-10) + 3.(7) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Definisi 2.1.2.10

Matriks Adjoin adalah matriks transpose dari matriks (A_{ij}) dengan A_{ij} adalah kofaktor dari elemen a_{ij}.

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & \left[A\right]_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1.2.10 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A_{33}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka Adj(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -10 & 4 & 1 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.2.11

A adalah matriks n x n dikatakan non singular jika determinannya tidak sama dengan nol. Jika determinannya sama dengan nol dikatakan matriks singular.

Contoh 2.1.2.11 :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ adalah Matriks singular karena $|A| = (2.4 - 2.4) = 0$

Definisi 2.1.2.12

Jika A matriks bujursangkar nonsingular, invers dari A ada, didefinisikan sebagai A^{-1} maka $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Dengan adanya matriks adjoin dapat dicari invers suatu matriks dimana A^{-1} diberikan :

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj.A}}{\text{Det(A)}} = \frac{\text{Adj.A}}{A}, \quad |A| \neq 0$$

Contoh 2.1.2.12 :

$$\text{Diberikan matriks } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } A^{-1} = \frac{\text{AdjA}}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -10 & 4 & 1 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -5 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.2. Masalah Program Linier

Masalah program linier dalam bentuk standar secara matriks dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{Memaksimumkan } f = \mathbf{px} \quad \text{.................................... (2.1.1)}$$

$$\text{dengan kendala } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad \text{.................................... (2.2.2)}$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{.................................... (2.2.3)}$$

dimana,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini diasumsikan bahwa $m < n$. Untuk $m > n$, akan ada $m - n$ persamaan kendala yang dieliminasi dan untuk kasus $m = n$, ada dua kemungkinan. Pertama, Solusi kendalanya tunggal (yang berarti tidak ada proses optimasi) dan kedua, kendalanya tidak mempunyai solusi.

Definisi 2.2.1 :

Solusi fisibel dari masalah program linier adalah suatu vektor **x** = (x_1, x_2, ..., x_n) yang memenuhi (2.2.2) dan (2.2.3).

Definisi 2.2.2 :

Solusi basis adalah sebuah solusi dari (2.2.2) di mana (n-m) variabel diantaranya diberi nilai nol. Ke (n-m) variabel yang bernilai nol ini disebut variabel nonbasis, sedang yang lainnya sebanyak m variabel disebut variabel basis.

Definisi 2.2.3 :

Solusi basis fisibel adalah solusi yang memenuhi syarat kenonnegatifan (2.2.3).

Definisi 2.2.4 :

Solusi fisibel yang mengoptimumkan fungsi sasaran (2.2.1) disebut solusi optimum.

Definisi 2.2.5 :

Suatu himpunan S dikatakan tertutup (*Closed Sets*) jika titik limit dari S termasuk didalam S, yaitu S memuat semua titik limitnya.

Contoh 2.2.5 :

Himpunan semua z sehingga $|z| \leq 1$ adalah himpunan tertutup.

Definisi 2.2.6 :

Suatu himpunan S dikatakan terbatas (*Bounded Sets*) jika dapat menentukan suatu konstanta M sehingga $|z| \leq M$ untuk setiap z dalam S.

Contoh 2.2.6 :

Himpunan Semua titik z sehingga $z \leq 1$ untuk setiap z dalam S.

2.3. Himpunan Konveks

Definisi 2.3.1 :

Misalkan $x_i \in R^n$, i = 1, 2, ..., k dimana $0 < \lambda_i < 1$ dimana $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. x disebut kombinasi linier konveks dari x_i jika dapat dinyatakan $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$.

Contoh 2.3.1 :

a. $x = 0{,}5\, x_1 + 0{,}5\, x_2$

b. $x = x_1 + 0{,}1\, x_2 - 0{,}1\, x_3$

c. $x = 0{,}5\, x_1 + 0{,}2\, x_2 + 0{,}3\, x_3$

Dari definisi 2.3.1 bisa diketahui bahwa contoh 2.3.1.a dan contoh 2.3.1.c. adalah kombinasi linier konveks, sedang contoh 2.3.1.b bukan kombinasi linier konveks karena $\lambda_3 = -0{,}1 < 0$.

Definisi 2.3.2

$S \subseteq R^n$ disebut sebagai himpunan konveks jika $x_i \in S$ (i =1, ..., k), maka $x \in S$, dimana $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ dan $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $0 < \lambda_i < 1$, atau dengan kata lain, S merupakan himpunan konveks jika setiap kombinasi linier konveks dari titik-titik dalam S yaitu $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ termuat di S juga.

Contoh 2.3.2 :

1. $S_1 = \{ x \mid |x| \leq 1 \}$.

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in S_1$, maka $|x_1| \leq 1$ dan $|x_2| \leq 1$. Untuk $0 \lambda < 1$:

$$|x| = |\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2| \leq \lambda |x_1| + (1-\lambda) |x_2|$$

$$\leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Jadi, $|x| \leq 1$ dengan demikian $x \in S_1$. Oleh karena itu S_1 adalah himpunan konveks.

2. $S_2 = \{ x \mid |x| \geq 1 \}$.

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in S_2$, maka $|x_1| \geq 1$ dan $|x_2| \geq 1$.

Untuk $|x_1| = |x_2| = 1$

$$|x| = |\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2| > \lambda |x_1| + (1-\lambda) |x_2|$$

$$> \lambda . 1 + (1-\lambda).1$$

$$> 1$$

Maka $|x| \leq 1$, padahal $S_2 = \{ x \mid |x| \geq 1 \}$.

Jadi ada $x \notin S_2$, maka S_2 non konveks.

Untuk $|x_1| > 1$ dan $|x_2| > 1$

$$|x| = |\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2|$$

$$\leq \lambda |x_1| + (1-\lambda) |x_2|$$

Karena $|x_1| > 1$ dan $|x_2| > 1$, maka $|x| > \lambda |x_1| + (1-\lambda) |x_2|$
Padahal $S_2 = \{ x \mid |x| \geq 1 \}$.

Jadi ada $x \notin S_2$, maka S_2 non konveks.

Definisi 2.3.3

Titik ekstrim dari himpunan konveks S adalah titik-titik dalam S yang tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linier konveks dari 2 titik yang lain yang berada dalam S.

Teorema 2.3.1

Daerah fisibel dari masalah program linier adalah himpunan konveks.

Bukti :

Misalkan daerah fisibel dari masalah program linier tersebut adalah S. Maka S didefinisikan sebagai $S = \{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \}$.

Akan dibuktikan bahwa jika x_λ merupakan kombinasi linier konveks dari x_1 dan x_2, dimana $x_1, x_2 \in S$, maka $x_\lambda \in S$.

Ambil sembarang $x_1, x_2 \in S$, maka didapat :

(i) $Ax_1 = b, x_1 \geq 0$

(ii) $Ax_2 = b, x_2 \geq 0$

Dengan mengalikan (i) dengan λ dan (ii) dengan $(1-\lambda)$ serta menambahkan keduanya, diperoleh :

$$A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2$$

$$= \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Jadi, didapatkan $Ax_\lambda = b$, dimana $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, karena $0 < \lambda < 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, maka $x_\lambda \geq 0$. Jadi $x_\lambda \in S$.

Teorema 2.3.2

Setiap solusi basis fisibel adalah titik ekstrim dari himpunan konveks solusi fisibel.

Bukti :

$$\text{Misalkan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

adalah solusi basis fisibel dari masalah program linier dengan variabel basis $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Dari Teorema 2.3.1 diketahui bahwa daerah fisibelnya merupakan himpunan konveks. Untuk menunjukkan $\mathbf{x}$ adalah sebuah titik ekstrim, harus dibuktikan bahwa tidak ada solusi fisibel $\mathbf{y}$ dan $\mathbf{z}$, sehingga $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$, $0 < \lambda < 1$. Andaikan ada solusi fisibel $\mathbf{y}$ dan $\mathbf{z}$ sehingga $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$, $0 < \lambda < 1$.

$$\text{Misalkan } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \text{ maka (n-m) komponen}$$

akhir dari persamaan tersebut memberikan :

$$\lambda y_i + (1-\lambda) z_i = 0 \quad (i = m+1, \ldots, n).$$

Karena λ, $(1-\lambda)$, y_i, $z_i \geq 0$, maka didapat $y_i = z_i = 0$ ($i = m+1, \ldots, n$). Karena **y** dan **z** solusi fisibel, maka masing-masing harus memenuhi persamaan :

$$A\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \text{dan} \quad A\mathbf{z} = \mathbf{b}, \text{ jadi}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari sini disimpulkan bahwa $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$ dan terbukti bahwa **x** tidak bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier konveks dari **y** dan **z**. Oleh karena itu, **x** adalah titik ekstrim dari himpunan konveks solusi fisibel tersebut.

Teorema 2.3.3.

Misalkan S adalah daerah fisibel dari masalah program linier yang terbatas dan tertutup, dengan x_i^e ($i = 1, \ldots, m$) titik ekstrimnya. Maka setiap vektor $\mathbf{x} \in S$ dapat ditulis sebagai :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^e, \quad \text{dimana} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ \lambda_i > 0.$$

Bukti :

Karena S daerah fisibel maka menurut Teorema 2.3.1, S merupakan himpunan konveks. Sesuai Definisi 2.3.2, jika $x_i^e \in S$ ($i = 1, \ldots, q$) maka $\mathbf{x} \in S$ dimana $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^e$ dan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$; $\lambda_i > 0$.

Teorema 2.3.4

Misalkan S daerah fisibel dari masalah program linier yang tertutup dan terbatas. Maka nilai maksimum dari sebuah fungsi linier pada S dicapai di titik ekstrimnya.

Bukti :

Misalkan fungsi linier tersebut adalah **px** dan **x*** memaksimumkan **px** pada S dan x_i^e (i = 1, ..., q) titik-titik ekstrim dari S.

Andai nilai maksimum dari **px** tidak dicapai di titik-titik ekstrim dari S. Maka : $\mathbf{px^*} > \mathbf{px}_i^e$ (i = 1, ..., q).

Untuk $0 < \lambda < 1$ berlaku : $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, \mathbf{px^*} > \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i^e$

Dari Teorema 2.3.3 memungkinkan untuk memilih $\lambda_i = \lambda_i^*$, sehingga :

$\mathbf{x^*} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^* \, x_i^e$, dimana $0 < \lambda_i^* < 1$ dan $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^* = 1$.

dengan demikian didapat :

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^* \, \mathbf{px^*} > \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^* \, \mathbf{px}_i^e$$

$$\mathbf{px^*} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^* > \mathbf{p} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^* \, x_i^e$$

px* > **px***, dimana ini adalah suatu kontradiksi. Jadi haruslah nilai maksimum dari **px** dicapai di titik ekstrim dari S.

2.4. Dualitas dalam Program Linier

Tinjau masalah program linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &\text{Memaksimumkan} \quad f = \mathbf{px} \\ &\text{dengan kendala} \quad A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

dimana A berukuran m x n, **b** berukuran m x 1, **p** berukuran 1 x n, sedangkan **x** berukuran n x 1.

Masalah program linier ini disebut masalah primal.

Masalah dual dari program linier tersebut didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &\text{Meminimumkan} \quad f_1 = \mathbf{b}^T \mathbf{u} \\ &\text{dengan kendala} \quad A^T\mathbf{u} \ge \mathbf{p}^T \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{u} \ge 0 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

dimana **u** adalah vektor kolom dari variabel keputusan yang baru dan berukuran m x 1.

Contoh 2.4.1 :

Tinjau masalah program linier berikut :

$$\begin{aligned} &\text{Memaksimumkan} \quad f = 30x_1 + 60x_2 + 72x_3 \\ &\text{dengan kendala} \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 3 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 3 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Program linier dualnya adalah :

$$\begin{aligned} &\text{Meminimumkan} \quad f_1 = 3u_1 + 3u_2 \\ &\text{dengan kendala} \quad 2u_1 + 2u_2 \ge 30 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad 2u_1 + 3u_2 \ge 60 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad 4u_1 + 3u_2 \ge 72 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad u_1 \ge 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad u_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.4.1

Dual dari masalah dual adalah masalah primal

Bukti :

Tinjau masalah primal (2.4.1) dan dual dari masalah ini, yaitu (2.4.2). Akan dibuktikan bahwa dual dari masalah (2.4.2) adalah (2.4.1). Masalah (2.4.2) ekivalen dengan :

Memaksimumkan $f_2 = (-\mathbf{b})^T \mathbf{u}$

dengan kendala $(-A)^T\mathbf{u} \leq -\mathbf{p}^T$

$\mathbf{u} \geq 0$

dimana **u** adalah variabel keputusan dengan ukuran m x 1. Dual dari masalah ini menurut definisi adalah :

Meminimumkan $f_3 = (-\mathbf{p})\,\mathbf{w}$

dengan kendala $(-A)\mathbf{w} \geq -\mathbf{b}$

$\mathbf{w} \geq 0$

Dimana **w** adalah variabel keputusan dengan ukuran n x 1. Dengan mengubah masalah ini sebagai masalah maksimasi, maka diperoleh :

Memaksimumkan $f_4 = \mathbf{pw}$

dengan kendala $A\mathbf{w} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{w} \geq 0$

Dimana ini adalah ekivalen dengan masalah (2.4.1)

2.5. Masalah Program Linier dalam Bentuk Matriks

Masalah umum program linier dalam bentuk standar dapat dituliskan sebagai berikut :

Memaksimumkan $f = \mathbf{px}$ .... (2.5.1)

dengan kendala $(A, I)\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{b} \geq 0$ .... (2.5.2)

$\mathbf{x} \geq 0$ .... (2.5.3)

dimana :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})^T$$

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{m+n})$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{m+n})^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

x terdisi dari tiga jenis variabel, yaitu variabel **x** sendiri, variabel artifisial dan variabel slack. Vektor **p** berhubungan dengan koefisien fungsi sasaran, bila variabelnya adalah variabel slack maka koefisien sasaran bernilai nol, dan bila variabelnya artifisial maka koefisien fungsi sasaran dimodifikasikan.

Contoh 2.5.1 :

Tinjau masalah program linier berikut :

Maksimumkan $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 430 \\ 3x_1 + 2x_3 &\le 460 \\ x_1 + 4x_2 &\le 420 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Maka masalah program linier diatas dalam bentuk kanonik adalah sebagai berikut :

Maksimumkan $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 &= 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + s_2 &= 460 \\ x_1 + 4x_2 + s_3 &= 420 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Ambil $x_4 = s_1$, $x_5 = s_2$, $x_6 = s_3$

Maksimumkan $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 &= 420 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Jadi dalam bentuk matriks :

Maksimumkan $f = (3, 2, 5, 0, 0, 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$

dengan kendala $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix}$

$x_j \geq 0$, untuk $j = 1, 2, ..., 6$.

Disini $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_6)$

$\mathbf{p} = (3, 2, 5, 0, 0, 0)$

$\mathbf{b} = (430, 460, 420)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pada persamaan 1, x_4 merupakan variabel slack, pada persamaan 2, x_5 merupakan variabel slack, dan pada persamaan 3, x_6 juga merupakan variabel slack. Sedangkan pada fungsi sasaran, koefisien dari variabel x_4, x_5, x_6 bernilai nol.

2.6. Metoda Simpleks

Penyelesaian Masalah program linier dengan metoda simpleks tidak lain merupakan penyelesaian basis yang melangkah dari penyelesaian basis yang satu ke penyelesaian basis yang lain sambil mengoptimalkan nilai fungsi sasaran.

Sebelum metoda simpleks diterapkan, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan :

a. Semua elemen dari konstanta b harus diubah menjadi bentuk tak negatif.
b. Variabel yang tak dibatasi harus diubah menjadi variabel yang terbatas dengan menyatakan sebagai hasil pengurangan dari dua variabel positif.
c. Masalah program linier diubah menjadi bentuk standar dengan menambahkan variabel slack dan artificial jika diperlukan.

Secara garis besar langkah-langkah penyelesaian masalah program linier dengan metoda simpleks adalah sebagai berikut :

Langkah 1.

Masalah yang ada diubah dalam bentuk kanonik, yaitu dari bentuk pertidaksamaan diubah menjadi persamaan dengan menambahkan atau mengurangi dengan peubah slack (s_k). Peubah-peubah slack tersebut dapat diikutsertakan dalam fungsi sasaran dengan koefisien nol.

Langkah 2.

Penelitian terhadap ada / tidaknya matriks identitas pada matriks A.

a. Jika tidak ada matriks identitas maka ditambahkan peubah semu (R_k) secukupnya sehingga timbul matriks identitas. Koefisien untuk peubah semu pada fungsi sasaran sebesar -M untuk kasus maksimal dan M untuk kasus minimal, dimana M adalah bilangan positif terbesar.

b. Jika terdapat matriks identitas maka dapat disusun Tabel simpleks dengan bentuk sebagai berikut :

Tabel 2.6.1

	p_j			
p_i	$x_i \backslash x_j$		b_i	R_i
		A		
	f_j			
	$f_j - p_j$			

dimana :

- Baris p_j diisi dengan koefisien-koefisien pada fungsi sasaran.
- Baris x_j diisi dengan nama-nama variabel.
- Kolom x_i diisi dengan nama-nama variabel slack.
- Kolom p_i diisi dengan koefisien pada fungsi sasaran yang sesuai.
- Baris f_j diisi dengan $\sum_{i=1} a_{ij}p_i$.

Langkah 3.

Diadakan penelitian terhadap nilai $f_j - p_j$, proses dihentikan jika $f_j - p_j \geq 0$ untuk kasus maksimal atau $f_j - p_j < 0$ untuk kasus minimal.

Jika syarat tersebut tidak dipenuhi, dimana untuk kasus maksimal masih terdapat $f_j - p_j < 0$, sedang untuk kasus minimal masih terdapat $f_j - p_j \geq 0$, maka diadakan langkah menyusun tabel baru :

a. Menentukan kolom kunci

Untuk kasus maksimum ditentukan kolom ke -k sedemikian sehingga $f_k - p_k$ terkecil. Sedang untuk kasus minimal ditentukan kolom ke -k sedemikian sehingga $f_k - p_k$ terbesar. Elemen-elemen pada kolom kunci diberi simbol a_{ik}.

b. Menentukan baris kunci

Dengan memilih nilai $R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$, $a_{ik} > 0$ yang terkecil, dengan simbol R_r maka baris ke-r menjadi baris kunci.

Jika dalam menentukan elemen pivot terdapat :

- Dua atau lebih pada baris $f_j - p_j$ yang mempunyai nilai terkecil (pada kasus maksimal) atau nilai terbesar (pada kasus minimal) untuk menentukan kolom kunci.
- Dua atau lebih pada kolom R_i yang nilainya terkecil untuk memilih baris kunci.

Maka untuk mengatasi hal tersebut dapat dipilih secara sebarang, yang nantinya akan menghasilkan keputusan yang sama.

c. Langkah Iterasi.

Perhatikan baris pivot. Baris r baru (pada baris pivot) didapat dengan membagi semua elemen pada baris pivot dengan elemen pivot. Selain baris kunci berlaku baris i baru yang lain, dimana baris i baru sama dengan baris i lama dikurangi hasil kali a_{ik} dengan baris r baru. Kemudian proses diulang untuk meneliti nilai $f_j - p_j$ sasaran /obyektif yang sesuai.. Baris f_j diisi dengan $\sum_{i=1} a_{ij}p_i$.

Contoh 2.5.1 :

Selesaikan masalah program linier berikut dengan menggunakan metoda simpleks :

Memaksimumkan $f = 3x_1 + 2x_2$

dengan kendala

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 6\\
2x_1 + x_2 &\le 8\\
-x_1 + x_2 &\le 1\\
x_2 &\le 2\\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Penyelesaian :

Merubah persoalan dalam bentuk kanonik yaitu dari bentuk pertidaksamaan menjadi persamaan :

Maksimumkan $f = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

dengan kendala

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + s_1 &= 6\\
2x_1 + x_2 + s_2 &= 8\\
-x_1 + x_2 + s_3 &= 1\\
x_2 + s_4 &= 2\\
x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Masalah program linier diatas mempunyai 4 kendala (m = 4) dan 6 variabel (n = 6). Kemudian disusun tabel simpleks :

Tabel 2.6.2

	p_j	3	2	0	0	0	0		
	x_i \ x_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	R_i
0	s_1	1	2	1	0	0	0	6	6
0	s_2	2	1	0	1	0	0	8	4
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1	-
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2	-
	f_j	0	0	0	0	0	0	0	
	$f_j - p_j$	-3	-2	0	0	0	0		

Terkecil   elemen pivot

Disini variabel non basisnya adalah x_1 dan x_2 sedangkan s_1, s_2, s_3, dan s_4 merupakan variabel basis.

Dari tebel terlihat bahwa x_1 merupakan variabel yang memasuki basis, sedangkan s_2 merupakan variabel yang keluar dari basis.

Selanjutnya iterasi akan dimulai dengan melakukan penghitungan sebagai berikut :

(i) Persamaan pivot yang baru sama dengan persamaan yang lama dibagi elemen pivot.

(ii) Persamaan baru sama dengan persamaan lama dikurangi (Koefisien kolom yang memasuki basis dikali persamaan pivot yang baru)

sehingga :

Tabel 2.6.3

	p_j	3	2	0	0	0	0		
p_i	x_i \ x_j	X_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	R_i
0	s_1 x_1 s_3 s_4	1	1/2	0	1/2	0	0	4	
	f_j								
	$f_j - p_j$								

(1) Persamaan s_1 = (1 2 1 0 0 0 6)

$$\frac{1x(1\ 1/2\ 0\ 1/2\ 0\ 0\ 4)}{0\ 3/2\ 1-1/2\ 0\ 0\ 2} -$$

(2) Persamaan s_3 $\quad = \quad$ (-1 1 0 0 1 0 1)

$$\begin{array}{l} -1x\,(1 \;\; 1/2 \;\; 0 \;\; 1/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 4) \\ \hline 0 \;\; 3\backslash 2 \;\; 0 \;\; 1/2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 5 \end{array} -$$

(3) Persamaan s_4 $\quad = \quad$ (0 1 0 0 0 1 2)

$$\begin{array}{l} 0x\,(1 \;\; 1/2 \;\; 0 \;\; 1/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 4) \\ \hline 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \end{array} -$$

Tabel simpleks yang baru :

Tabel 2.6.4

	p_j	3	2	0	0	0	0		
p_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	R_i
0	s_1	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	4/3
0	x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8
0	s_3	0	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2	2
	f_j	3	0	0	0	0	0	0	
	f_j - p_j	0	-2	0	0	0	0		

Terkecil $\qquad$ elemen pivot

Dari tabel diatas terlihat bahwa x_2 akan memasuki basis, sedangkan s_1 keluar dari basis. Dengan cara yang sama diperoleh :

(1) Persamaan x_1 $\quad = \quad$ (1 1/2 0 1/2 0 0 4)

$$\begin{array}{l} 1/2x\,(0 \;\; 1 \;\; 2/3 \;\; -1/3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 4/3) \\ \hline 1 \;\; 0 \;\; -1/3 \;\; 2/3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 10/3 \end{array} -$$

(2) Persamaan s_3 = (0 3/2 0 1/2 1 0 5)

$$\frac{3/2x(0\ \ 1\ \ 2/3\ -1/3\ \ 0\ \ 0\ \ 4/3)}{0\ \ 0\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 3} -$$

(3) Persamaan s_4 = (0 1 0 0 0 1 2)

$$\frac{4x(0\ \ 1\ \ 2/3\ \ -1/3\ \ 0\ \ 0\ \ 4/3)}{0\ \ 0\ \ -2/3\ \ 1/3\ \ 0\ \ 1\ \ 2/3} -$$

Sehingga tabel simpleks sekarang :

Tabel 2.6.5

	p_j	3	2	0	0	0	0		
p_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i	R_i
2	x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3	
3	x_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3	
0	s_3	0	0	-1	1	1	0	5	
0	s_4	0	1	-2/3	1/3	0	1	2/3	
	f_j	3	2	1/3	4/3	0	0	12 2/3	
	$f_j - p_j$	0	0	1/3	4/3	0	0		

Terlihat bahwa tabel sudah mencapai optimal. Jadi x_1 = 10/3 dan x_2 = 4/3 yang mengoptimalkan :

$$\begin{aligned} f &= 3x_1 + 2x_2 \\ &= 3(10/3) + 2(4/3) \\ &= 12\ 2/3. \end{aligned}$$

2.7. Program Linier Parametrik dengan Variasi Linier pada b

Masalah program linier sebelum diberi parameter adalah :

$$
\begin{array}{lll}
\text{Memaksimumkan} & f & = \mathbf{px} \\
\text{dengan kendala} & A\mathbf{x} & \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} & \geq 0
\end{array} \qquad (2.7.1)
$$

$$\text{dimana} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \geq 0$$

Diasumsikan solusi optimal dari (2.7.1) sudah didapat. Jika $\mathbf{b}_i$ (i =1, ..., m) berubah-ubah nilainya secara linier, maka $\mathbf{b}(\theta)$ sebagai fungsi linier dari parameter θ didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{b} + \theta k \quad \text{atau } \mathbf{b}_i(\theta) = \mathbf{b} + \theta k_i$$

dimana $k = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$ adalah konstanta yang diberikan, dan θ adalah parameter yang harus dicari.

Disini hanya akan ditinjau untuk $\theta > 0$, karena untuk $\theta < 0$ peninjauannya dapat dilakukan dengan cara yang sama.

Variasi pada **b** akan mempengaruhi kefisibelan masalah. Jika $\theta = 0$, maka $\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{b}$ dan ini adalah kondisi keoptimalan semula.

Prosedur untuk menentukan nilai kritis dari θ dimulai dengan menggunakan solusi $x_b(\theta) = x_b$, yaitu solusi basis yang akan berkaitan dengan $\theta = 0$. Misalnya α dan β adalah dua nilai kritis yang berurutan dan $\alpha < \beta$. Diasumsikan bahwa solusi basis pada

$\theta = \beta$ sudah diketahui dan diberikan oleh $x_b(\alpha)$. Nilai $\alpha = \beta$ akan ditentukan dengan prosedur sebagai berikut :

Solusi basis $x_b(\alpha)$ akan tetap fisibel untuk $\theta > \alpha$ selama kondisi $x_b(\alpha) = A_b^{-1}(\alpha)\, b(\theta) > 0$ dipenuhi.

Perhatikan bahwa :

$$
\begin{aligned}
x_b(\alpha) &= A_b^{-1}(\alpha)\, b(\theta) = A_b^{-1}(\alpha)\, \{\mathbf{b} + \theta k\} \\
&= A_b^{-1}(\alpha)\, \mathbf{b} + A_b^{-1}(\alpha)\, \theta k \\
&= A_b^{-1}(\alpha)\, \mathbf{b} + A_b^{-1}(\alpha)\, \alpha k + A_b^{-1}(\alpha)\, \theta k - A_b^{-1}(\alpha)\, \alpha k \\
&= A_b^{-1}(\alpha)\, b(\alpha) + (\theta - \alpha)\, A_b^{-1}(\alpha)\, \alpha k
\end{aligned}
$$

Misalkan $[A_b^{-1}(\alpha)\, \mathbf{b}\, (A_b^{-1})]_i$ dan $[A_b^{-1}(A_b^{-1})\, k]_i$ berturut-turut adalah elemen dari $A_b^{-1}(\alpha)\, b(\alpha)$ dan $A_b^{-1}(\alpha)\, k$, yang terkait dengan variabel X_i. Karena $A_b^{-1}(\alpha)\, b(\alpha) > 0$ bernilai non negatif, maka kondisi $A_b^{-1}(\alpha)\, b(\theta) > 0$ berlaku jika :

1. $[A_b^{-1}(\alpha)\, k]_i > 0$, $\forall$ i. Dengan demikian $x_b(\alpha)$ tetap fisibel untuk semua $\theta > \alpha$.

2. $[A_b^{-1}(\alpha)\, k]_i < 0$, untuk sekurang-kurangnya satu I, dan terdapat nilai kritis $\theta = \beta$ yang diberikan oleh :

$$\beta = \alpha + \min_i \frac{[A_b^i(\alpha)\, b(\alpha)]_i}{[A(\alpha) k]_i} \quad [A_b^{-1}(\alpha)\, k]_i < 0.$$

Misal nilai minimumnya dicapai pada i = r , maka :

$$\beta = \alpha + \frac{[A_b^i(\alpha)\, b(\alpha)]_r}{[A(\alpha) k]_r}$$

$$\text{dan } x_r = [x_b(\alpha)]_r = [\ A_b^{-1}(\alpha)\, b(\beta)\ ]_r$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa jika $\theta > \beta$, maka $x_r < 0$, atau dengan kata lain, pada harga θ ini $x_b(\alpha)$ sudah tidak fisibel lagi. Karena $x_r = [x_b(\alpha)]_r$ adalah variabel pertama yang tidak fisibel yang berhubungan dengan nilai kritis β, maka x_r dipilih sebagai variabel keluar pada $\theta = \beta$.

Contoh 2.7.1 :

Memaksimumkan $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 430 + 100\,\theta \\ 2x_1 + \quad 2x_3 &\le 460 - 200\,\theta \\ x_1 + 4x_2 &\le 420 + 400\,\theta \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Masalah program linier tersebut dalam bentuk standar sesudah ditambahkan variabel slack s_1, s_2, s_3 adalah :

Maksimumkan $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0s_4 + 0s_5 + 0s_6$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 &= 430 + 100\,\theta \\ 3x_1 + 2x_3 + s_2 &= 460 - 200\,\theta \\ x_1 + 4x_2 + s_3 &= 420 + 400\,\theta \\ x_i \ge 0,\ i &= 1, 2, 3. \\ s_i \ge 0,\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Dalam hal ini $b(\theta) = (430, 460, 420)^T + \theta\,(100, -200, 400)^T$. Untuk $\theta = 0$, maka ini adalah masalah program linier biasa dan jika diselesaikan dengan metoda simpleks didapat :

Tabel 2.7.1.

	p_j	3	2	5	0	0	0		
p_i	x_j / x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	1	2	1	1	0	0	430	430
0	s_2	3	0	2	0	1	0	460	230
0	s_3	1	4	0	0	0	1	420	-
	f_j	0	0	0	0	0	0	0	
	$f_j - p_j$	-3	-2	-5	0	0	0		

Tabel 2.7.2.

	p_j	3	2	5	0	0	0		
p_i	x_j / x_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	R_i
0	s_1	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200	100
0	s_2	3/2	0	1	1	1/2	0	230	-
0	s_3	1	4	0	0	0	1	420	105
	f_j	15/ 2	0	5	0	5/2	0	1150	
	$f_j - p_j$	-9/2	-2	0	0	5/2	0		

Mencari persamaan s_1 = 1 2 1 1 0 0 430

$$\frac{1\,x\,(3/2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \quad 230)}{-1/2 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad -1/2 \quad 0 \quad 200} -$$

Tabel dimana kondisi optimal dicapai disajikan dalam Tabel 2.7.3

Tabel 2.7.3

		3	2	5	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
2	x_1	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
5	x_2	3/2	0	1	0	1/2	0	230
0	x_3	2	0	0	-2	1	1	20
	$f_j - p_j$	4	0	0	1	2	0	1350

Dari tabel 2.7.3. dapat diketahui bahwa :

$$x_b = (x_2, x_3, s_3) = (100, 230, 20)$$
$$= x_b(0) = A_b^{-1}(0)\, b(0)$$

$$A_b^{-1}(0)\,k = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ -200 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ -200 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \alpha + \min_i \frac{\left[A_b^i\,(0)\; b(0)\right]_i}{\left[A\;(0)k\right]_i}\;, \quad \left[\; A_b^{-1}\,(0)\,k\;\right]_i < 0.$$

$$= 0 + \min_i \left[-, \frac{-230}{-100}, - \right] \;—\; = 2{,}3.$$

Nilai kritis ini berhubungan dengan variabel basis x_3, sehingga x_3 akan dipilih sebagai variabel keluar.

Untuk $\theta = 2{,}3$, maka :

$$b(\theta) = b + \theta k$$
$$= (430, 460, 420)^T + 2{,}3\,(100, -200, 400)^T$$
$$= (430, 460, 420)^T + (230, -460, 920)^T$$
$$= (660, 0, 1340)^T$$

$$x_b(\theta) = A_b^{-1}(0)\, b(\theta)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 660 \\ 0 \\ 1340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Tabel dari solusi untuk $0 < \theta < 2{,}3$ disajikan tabel 2.7.4.

Tabel 2.7.4

	p_j	3	2	5	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
2	x_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	330
5	x_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	0
0	s_3	2	0	0	-2	1	1	20
	f_j	7	2	5	1	2	0	660
	$f_j - p_j$	4	0	0	1	2	0	660

Dari Tabel 2.7.4 diketahui bahwa $a_{3j} > 0$ untuk semua $j \in J$. Maka untuk $\theta > 2{,}3$, $x_b(\theta)$ tidak fisibel lagi. Jadi $x_b(\theta)$ fisibel untuk $\theta > 2{,}3$, sedang untuk $\theta > 2{,}3$, $x_b(\theta)$ tidak fisibel lagi. Harga f_{max} dalam hal ini adalah $1350 - 300\theta$ $(0 < \theta < 2{,}3)$.