

## BAB II

### DASAR TEORI

Dalam bab ini akan diberikan beberapa materi penunjang yang akan diperlukan didalam pembahasan, seperti: ruang vektor, transformasi linier, dan ruang perkalian dalam.

#### 2.1 Ruang Vektor

Berikut ini akan diberikan definisi dari lapangan, ruang vektor, subruang, kombinasi linier, basis dan dimensi ruang vektor beserta contoh-contohnya.

##### Definisi 2.1.1

Misal  $R$  adalah himpunan tak kosong.  $R$  dikatakan lapangan bilangan riil jika untuk setiap  $a, b, c \in R$  memenuhi aksioma berikut:

##### Aksioma Jumlahan

1.  $a + b \in R$
2.  $a + (b + c) = (a + b) + c$
3.  $\exists 0 \in R$  sedemikian sehingga  $a + 0 = a$
4.  $\forall a \in R, \exists -a \in R$  sedemikian sehingga  $a + (-a) = 0$
5.  $a + b = b + a$

##### Aksioma Pergandaan

6.  $a \cdot b \in R$
7.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
8.  $\exists 1 \in R$  sedemikian sehingga  $a \cdot 1 = a$

$$9. \forall a \in R, \exists a^{-1} \in R \text{ ( dengan } a \neq 0 \text{) sedemikian sehingga } a \cdot a^{-1} = 1$$

$$10. a \cdot b = b \cdot a$$

Aksioma Distributif

$$11. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

### Definisi 2.1.2

Misal  $V$  adalah sebarang himpunan tak kosong yang di dalamnya didefinisikan dua operasi, yaitu : operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

Yang dimaksud operasi penjumlahan disini adalah suatu operasi yang menghubungkan setiap  $u, v$  dalam  $V$  dengan elemen  $u + v$ , yang disebut sebagai jumlah  $u$  dan  $v$ .

Sedangkan operasi perkalian skalar adalah suatu operasi yang menghubungkan setiap  $u \in V$  dan sebarang skalar  $k$  dengan elemen  $ku$ , yang disebut sebagai perkalian skalar  $u$  oleh  $k$ .

### Definisi 2.1.3

Misalkan  $V$  adalah himpunan tak kosong.  $V$  dikatakan sebagai ruang vektor jika untuk setiap  $u, v, w \in V$  dan  $k, l$  sebarang skalar di lapangan  $F$  memenuhi 10 aksioma berikut:

1. Jika  $u, v \in V$  maka  $u + v \in V$

2.  $u + v = v + u$

3.  $u + (v + w) = (u + v) + w$

4.  $\exists \bar{0} \in V$  sedemikian sehingga  $\bar{0} + u = u + \bar{0} = u, \forall u \in V$

5.  $\forall u \in V, \exists -u \in V$  sedemikian sehingga  $u + (-u) = (-u) + u = \bar{0}$
6. Untuk  $k$  sebarang skalar di  $F$  dan  $u \in V$  berlaku  $ku \in V$
7.  $k(u+v) = ku + kv$
8.  $(k+l)u = ku + lu$
9.  $k(lu) = (kl)u$
10.  $1.u = u$

### Contoh 2.1.1

Tunjukkan bahwa himpunan  $V$  dari semua matrik  $2 \times 2$  dengan anggota bilangan riil merupakan suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matrik dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matrik.

### Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa himpunan  $V$  dari matrik  $2 \times 2$  memenuhi 10 aksioma diatas.

(1) Ambil sebarang matrik  $2 \times 2$ , yaitu:

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2} \quad \text{dan} \quad v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

$$(2) u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = v + u$$

(3) Jika  $w = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ , maka:

$$u + (v + w) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \right\}$$

$$u + (v + w) = \left\{ \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (u + v) + w$$

(4) Jika  $\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , maka:

$$\bar{0} + u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + u_{11} & 0 + u_{12} \\ 0 + u_{21} & 0 + u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

$$u + \bar{0} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + 0 & u_{12} + 0 \\ u_{21} + 0 & u_{22} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

$$\text{Jadi, } \bar{0} + u = u + \bar{0} = u.$$

(5) Jika  $-u = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$ , maka:

$$u + (-u) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + (-u_{11}) & u_{12} + (-u_{12}) \\ u_{21} + (-u_{21}) & u_{22} + (-u_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$(-u) + u = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-u_{11}) + u_{11} & (-u_{12}) + u_{12} \\ (-u_{21}) + u_{21} & (-u_{22}) + u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\text{Jadi, } u + (-u) = (-u) + u = \bar{0}.$$

$$(6) \text{ k sebarang skalar, maka } ku = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

$$(7) k(u+v) = k \left\{ \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} k(u_{11}+v_{11}) & k(u_{12}+v_{12}) \\ k(u_{21}+v_{21}) & k(u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix}$$

$$k(u+v) = \begin{bmatrix} ku_{11} + kv_{11} & ku_{12} + kv_{12} \\ ku_{21} + kv_{21} & ku_{22} + kv_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix}$$

$$k(u+v) = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = ku + kv$$

$$(8) (k+l)u = (k+l) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k+l)u_{11} & (k+l)u_{12} \\ (k+l)u_{21} & (k+l)u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} + lu_{11} & ku_{12} + lu_{12} \\ ku_{21} + lu_{21} & ku_{22} + lu_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = ku + lu$$

$$(9) k(lu) = k \left\{ l \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \right\} = k \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} klu_{11} & klu_{12} \\ klu_{21} & klu_{22} \end{bmatrix} = kl \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (kl)u$$

$$(10) 1 \cdot u = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

Jadi, terbukti benar bahwa  $M_{2 \times 2}$  adalah suatu ruang vektor. ■

Berikut akan diberikan teorema yang memberikan sifat- sifat penting suatu vektor.

### **Teorema 2.1.1**

Misal  $V$  adalah sebuah ruang vektor atas lapangan  $F$ , dan  $u$  suatu vektor dalam  $V$  dan  $k$  sebarang skalar di  $F$ , maka:

$$(a) 0 \cdot u = \bar{0}$$

$$(b) k \cdot 0 = 0$$

$$(c) (-1)u = -u$$

$$(d) \text{ Jika } k \cdot u = \bar{0}, \text{ maka } k = 0 \text{ atau } u = \bar{0}$$

**Bukti:**

$$(a) \text{ Dapat ditulis bahwa: } 0 \cdot u + 0 \cdot u = (0 + 0)u \quad \dots\dots\dots \text{(aksioma 8)}$$

$$= 0 \cdot u \quad \dots\dots\dots \text{(sifat bilangan 0)}$$

Berdasarkan aksioma 5, vektor  $0u$  mempunyai suatu negatif yaitu  $-0u$ .

Dengan menjumlahkan negatif ini pada kedua ruas diatas, maka diperoleh:

$$[0u + 0u] + [-0u] = 0u + (-0u)$$

$$0u + [0u + (-0u)] = 0u + (-0u) \quad \dots\dots\dots \text{(aksioma 3)}$$

$$0u + \bar{0} = \bar{0} \quad \dots\dots\dots \text{(aksioma 5)}$$

$$0u = \bar{0} \quad \dots\dots\dots \text{(aksioma 4)}$$

$$(b) k + 0 = k$$

$$k + k \cdot 0 = k$$

Dengan menjumlahkan negatif dari  $k$ , yaitu  $-k$  pada kedua ruas diatas, maka akan diperoleh:

$$-k + (k + k \cdot 0) = -k + k$$

$$(-k + k) + k \cdot 0 = -k + k$$

$$0 + k \cdot 0 = 0$$

$$k \cdot 0 = 0$$

(c) Untuk menunjukkan bahwa  $(-1)u = -u$ , akan ditunjukkan dahulu bahwa:

$$u + (-1)u = \bar{0}.$$

$$u + (-1)u = 1.u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0.u = \bar{0}$$

Karena  $u + (-1)u = \bar{0}$  maka jelas bahwa  $(-1)u$  adalah negatif dari vektor  $u$ , atau ditulis  $(-1)u = -u$ .

(e) Jika  $k.u = \bar{0}$  dan  $k \neq 0$ , maka  $u = \bar{0}$

$$1/k (ku) = (1/k)\bar{0}$$

$$((1/k)k)u = (1/k)\bar{0}$$

$$1.u = \bar{0}$$

$$u = \bar{0}$$

Jika  $ku = \bar{0}$  dan  $u \neq \bar{0}$ , maka  $k = 0$

$$(ku) 1/u = \bar{0} (1/u)$$

$$k (u(1/u)) = \bar{0} (1/u)$$

$$k.1 = 0$$

$$k = 0. \blacksquare$$

#### Definisi 2.1.4

$V$  adalah ruang vektor atas lapangan  $F$ . Suatu himpunan tak kosong  $W$  dari  $V$  disebut subruang dari  $V$  jika  $W$  sendiri adalah suatu ruang vektor dibawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada  $V$ .

**Teorema 2.1.2**

Misal  $V$  adalah ruang vektor atas lapangan  $F$ . Suatu himpunan bagian tak kosong  $W$  dari  $V$  dikatakan subruang dari  $V \Leftrightarrow$  untuk setiap  $x_1$  dan  $x_2 \in W$  dan  $k$  sebarang skalar di  $F$  berlaku 2 syarat berikut:

- (1)  $\forall x_1, x_2 \in W$  berlaku  $x_1 + x_2 \in W$
- (2)  $k$  sebarang skalar di  $F$  berlaku  $kx_1 \in W$

Atau dengan kata lain, himpunan tak kosong  $W$  dari  $V$  dikatakan subruang dari  $V$  jika dan hanya jika untuk setiap  $x_1, x_2 \in W$  dan  $\alpha, \beta \in F$  berlaku  $(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W$ .

**Bukti:**

( $\Rightarrow$ ) Akan dibuktikan bahwa jika  $W$  subruang dari  $V$  maka kedua syarat diatas dipenuhi.

Jika  $W$  adalah subruang dari  $V$ , maka semua aksioma ruang vektor pasti terpenuhi, khususnya aksioma 1 dan 6.

Karena syarat 1 dan 2 diatas sama dengan aksioma 1 dan 6, maka syarat 1 dan 2 pasti terpenuhi.

( $\Leftarrow$ ) Akan dibuktikan jika kedua syarat diatas dipenuhi, maka  $W$  subruang  $V$ .

Syarat 1 dan 2 telah terpenuhi. Karena syarat ini merupakan aksioma ruang vektor 1 dan 6, maka hanya akan ditunjukkan bahwa  $W$  memenuhi 8 aksioma lainnya.

Aksioma 2,3,7,8,9,10 otomatis dapat dipenuhi oleh vektor-vektor dalam  $W$  karena aksioma-aksioma ini terpenuhi oleh semua vektor dalam  $V$ . Oleh karena itu untuk melengkapi bukti tersebut, hanya akan diperiksa bahwa

aksioma 4 dan 5 terpenuhi oleh vektor-vektor dalam  $W$ . Misalkan  $u$  sebarang vektor pada  $W$ . Menurut syarat 2 maka  $ku \in W$ , untuk  $k$  sebarang skalar di  $F$ . Dengan menetapkan  $k = 0$ , maka dari Teorema 2.1.1, diperoleh bahwa  $0 \cdot u = \bar{0} \in W$  dan jika  $k = -1$  maka  $(-1)u = -u \in W$ . ■

### Contoh 2.1.2

Misalkan  $n$  adalah sebuah bilangan bulat positif, dan misalkan  $W$  terdiri dari fungsi nol dan semua fungsi polinomial riil yang mempunyai derajat  $\leq n$ .

Jadi  $W$  adalah himpunan semua fungsi yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

dengan  $a_0, \dots, a_n$  adalah bilangan-bilangan riil.

Tunjukkan bahwa  $W$  adalah subruang dari ruang vektor semua fungsi bernilai riil.

#### Penyelesaian:

Misalkan  $p, q$  adalah suatu polinom yang dinyatakan dalam bentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ dan}$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

Maka:

$$1. (p+q)(x) = p(x) + q(x)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$2. (kp)(x) = (ka_0) + (ka_1)x + \dots + (ka_n)x^n \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

Dapat dilihat bahwa persamaan (2.2) dan (2.3) mempunyai bentuk yang diberikan dalam persamaan (2.1). Jadi,  $p+q$  dan  $kp$  terletak didalam  $W$ . Hal ini berarti bahwa  $W$  subruang dari  $V$ . ■

**Definisi 2.1.5**

Suatu vektor  $w$  dikatakan kombinasi linier vektor-vektor  $v_1, v_2, \dots, v_r$  jika vektor-vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r, \text{ dengan } k_1, k_2, \dots, k_r \text{ adalah skalar.}$$

**Contoh 2.1.3**

Pandang vektor-vektor  $u = (1, 2, -1)$  dan  $v = (6, 4, 2)$  di  $\mathbb{R}^3$ . Perhatikan bahwa  $w = (9, 2, 7)$  adalah kombinasi linier  $u$  dan  $v$ .

**Penyelesaian:**

Supaya  $w$  merupakan kombinasi linier dari  $u$  dan  $v$ , berarti harus ada skalar  $k_1$  dan  $k_2$  sedemikian sehingga:  $w = k_1 u + k_2 v$

$$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$$

$$(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyamakan komponen yang berpadanan, akan diperoleh:

$$k_1 + 6k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

Dengan memecahkan persoalan diatas,

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh  $k_1 = -3$  dan  $k_2 = 2$ , sehingga ditulis  $w = -3u + 2v$ .

Jadi,  $w$  adalah kombinasi linier dari  $u$  dan  $v$ . ■

**Definisi 2.1.6**

Jika  $v_1, v_2, \dots, v_r$  adalah vektor-vektor didalam  $V$  dan jika setiap vektor didalam  $V$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari  $v_1, v_2, \dots, v_r$  maka vektor-vektor tersebut dikatakan membangun atau merentang  $V$ .

**Contoh 2.1.4**

Polinom  $1, x, x^2, \dots, x^n$  merentang ruang vektor  $P_n$  yang didefinisikan pada contoh 2.2. Setiap polinom  $p$  dalam  $P_n$  dapat ditulis sebagai  $p = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  yang merupakan suatu kombinasi linier dari  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Atau dapat juga ditulis:  $P_n = \text{span} \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ . ■

**Definisi 2.1.7**

Jika  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, maka persamaan vektor  $k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = \bar{0}$  mempunyai paling sedikit satu solusi, yaitu  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .

Jika  $k_i = 0$ , untuk  $i = 1, \dots, r$  adalah satu-satunya solusi, maka himpunan  $S$  disebut Bebas Linier (Linearly Independent).

Jika terdapat solusi lain (selain  $k_i = 0$ , untuk  $i = 1, \dots, r$ ), maka himpunan  $S$  disebut Tak Bebas Linier (Linearly Dependent).

**Contoh 2.1.5**

Tunjukkan bahwa vektor-vektor  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$ , dan  $k = (0, 0, 1)$  dalam  $R^3$  adalah bebas linier.

**Penyelesaian:**

Bentuk persamaan vektor  $k_1i + k_2j + k_3k = \bar{0}$

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$$

Dari perhitungan diperoleh bahwa hanya ada satu solusi, yaitu  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ .

Hal ini berarti bahwa  $S = \{i, j, k\}$  adalah bebas linier. ■

**Definisi 2.1.8**

Jika  $V$  adalah sebarang ruang vektor dan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada  $V$ , maka  $S$  dinamakan Basis untuk  $V$  jika:

(1)  $S$  bebas linier

(2)  $S$  merentang  $V$

**Contoh 2.1.6**

Tunjukkan bahwa  $i = (1,0,0)$ ,  $j = (0,1,0)$ , dan  $k = (0,0,1)$  adalah sebuah basis untuk  $\mathbb{R}^3$ .

**Penyelesaian:**

(1) Akan ditunjukkan bahwa  $\{i, j, k\}$  bebas linier.

$$k_1i + k_2j + k_3k = \bar{0}$$

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$$

atau  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 0$ .

Jadi  $\{i,j,k\}$  bebas linier.

(2) Akan ditunjukkan bahwa  $\{i,j,k\}$  merentang  $\mathbb{R}^3$ .

Ambil sebarang vektor  $x \in \mathbb{R}^3$ , maka  $x$  dapat dinyatakan sebagai  $x = (x_1, x_2, x_3)$

Akan ditunjukkan bahwa  $x = k_1i + k_2j + k_3k$

$$(x_1, x_2, x_3) = k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (k_1, k_2, k_3)$$

atau  $x_1 = k_1, x_2 = k_2, x_3 = k_3$ .

artinya  $x$  adalah kombinasi linier dari  $\{i,j,k\}$ , sehingga  $\{i,j,k\}$  merentang  $\mathbb{R}^3$ .

Dari (1) dan (2) jelas bahwa  $\{i,j,k\}$  adalah basis dari  $\mathbb{R}^3$ . ■

### Definisi 2.1.9

Suatu ruang vektor tak nol  $V$  dikatakan berdimensi berhingga (finite dimensional) dengan dimensinya adalah  $n$  jika ruang vektor tersebut mengandung sebuah himpunan berhingga dari vektor-vektor  $\{v_1, \dots, v_n\}$  yang membentuk sebuah basis. Jika tidak terdapat himpunan seperti tersebut, maka  $V$  dinamakan berdimensi tak hingga (infinite dimensional).

Selain itu, ruang vektor nol dianggap sebagai ruang vektor berdimensi berhingga meskipun ruang vektor tersebut tidak mempunyai himpunan bebas linier, sehingga basispun tidak ada.

### Contoh 2.1.7

(a) Ruang-ruang vektor  $\mathbb{R}^n, P_n$ , dan  $M_{mn}$  adalah ruang vektor dengan dimensi berhingga.

- (b) Ruang- ruang vektor  $F(-\infty, \infty)$ ,  $C(-\infty, \infty)$ , dan  $C^m(-\infty, \infty)$  adalah ruang vektor dengan dimensi tak hingga. ■

### Definisi 2.1.10

Dimensi suatu ruang vektor berdimensi hingga  $V$ , yang dinyatakan dengan  $\dim(V)$  didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam suatu basis untuk  $V$ .

### Contoh 2.1.8

- (a)  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ , basis standarnya mempunyai  $n$  vektor.  
 (b)  $\dim(P_n) = n + 1$ , basis standarnya mempunyai  $n + 1$  vektor.  
 (c)  $\dim(M_{mn}) = mn$ , basis standarnya mempunyai  $mn$  vektor. ■

## 2.2 Transformasi Linier

Berikut ini akan diberikan definisi dari pemetaan, transformasi linier dan sifat-sifatnya, beserta contoh-contohnya.

### Definisi 2.2.1

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan tak kosong.  $T: A \rightarrow B$  dikatakan pemetaan jika untuk setiap unsur di  $A$  memiliki tepat satu kawan di  $B$ .

### Definisi 2.2.2

Misalkan  $V$  suatu ruang vektor atas lapangan  $F$ .  $T: V \rightarrow V$  dikatakan transformasi linier, jika untuk setiap  $x_1, x_2 \in V$  dan  $k$  sebarang skalar di  $F$ , maka berlaku:

$$(1) T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$$

$$(2) T(kx) = kT(x)$$

### Contoh 2.2.1

Jika  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dengan aturan  $T(x) = Ax$ , dimana  $A_{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $T(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$ . Tunjukkan bahwa  $T$  adalah transformasi linier.

**Penyelesaian:**

$$(1) \text{ Ambil sebarang } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= T \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} = Ax_1 + Ax_2 = T(x_1) + T(x_2) \end{aligned}$$

(2) Ambil  $k$  sebarang skalar.

$$T(kx_1) = T \begin{bmatrix} kx_{11} \\ kx_{12} \\ \vdots \\ kx_{1n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} kx_{11} \\ kx_{12} \\ \vdots \\ kx_{1n} \end{bmatrix} = kA \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} = k(Ax_1) = kT(x_1)$$

Karena kedua syarat dipenuhi, maka  $T$  adalah transformasi linier. ■

Berikut ini akan diberikan beberapa sifat transformasi linier, yaitu Kernel dan Peta.

### Teorema 2.2.1

Jika  $T: V \rightarrow V$  adalah transformasi linier, maka:

- (1)  $T(\bar{0}) = \bar{0}$
- (2)  $T(-v) = -T(v)$ , untuk setiap  $v \in V$
- (3)  $T(v-w) = T(v) - T(w)$ , untuk setiap  $v, w \in V$

### Bukti:

Misalkan  $v, w$  sebarang vektor di  $V$ .

- (1) Karena  $0 \cdot v = \bar{0}$ , maka  $T(\bar{0}) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = \bar{0}$ .
- (2)  $T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$ .
- (3) Karena  $v-w = v + (-w)$ , maka  $T(v-w) = T(v + (-w)) = T(v) - T(w)$ . ■

### Definisi 2.2.3

Misal  $V$  dan  $W$  suatu ruang vektor atas lapangan  $F$ . Jika  $T: V \rightarrow W$  adalah suatu transformasi linier, maka:

- (1) Kernel dari  $T$  adalah himpunan semua vektor di  $V$  yang oleh transformasi

linier  $T$  dipetakan ke  $\bar{0}$  di  $W$ , atau bisa juga ditulis:

$$\text{Ker}(T) = \{ x \in V \mid T(x) = \bar{0} \}$$

- (2) Peta dari  $T$  adalah himpunan semua vektor di  $W$  yang merupakan hasil peta dari vektor-vektor di  $V$ , atau bisa juga ditulis:

$$\text{Peta}(T) = \{ y \in W \mid y = T(x), x \in V \}$$

**Contoh 2.2.2**

Misalkan  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  adalah perkalian oleh matrik  $A$ . Jika,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ maka:}$$

(1) Kernel dari  $T$  terdiri dari semua  $x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}$ , yang merupakan vektor pemecahan

$$\text{dari sistem homogen } A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Peta dari  $T$  terdiri dari vektor-vektor  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ , yang memenuhi sistem

$$\text{persamaan } A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Teorema 2.2.2**

Jika  $T: V \rightarrow W$  suatu transformasi linier, maka:

- (1)  $\text{Ker}(T)$  adalah subruang dari  $V$
- (2) Peta ( $T$ ) adalah subruang dari  $W$

**Bukti:**

(1) Akan ditunjukkan bahwa  $\text{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(x) = \bar{0}\}$  adalah subruang dari  $V$ .

Jelas bahwa  $\text{Ker}(T) \subseteq V$  dan  $\text{Ker}(T) \neq \emptyset$  karena  $\bar{0} \in \text{Ker}(T)$  yaitu  $T(\bar{0}) = \bar{0}$ .

Ambil sebarang  $x_1, x_2 \in \text{Ker}(T)$  dan  $k$  sebarang skalar di  $F$ , maka:

$$(a) T(x_1) = \bar{0} \text{ dan } T(x_2) = \bar{0}$$

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

Jadi  $x_1 + x_2 \in \text{Ker}(T)$ .

$$(b) T(kx_1) = kT(x_1) = k \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Jadi  $kx_1 \in \text{Ker}(T)$

Dari (a) dan (b) jelas bahwa  $\text{Ker}(T)$  adalah subruang dari  $V$ .

(2) Akan ditunjukkan bahwa  $\text{Peta}(T) = \{y \in W \mid y = T(x), x \in V\}$  subruang dari  $W$ .

Jelas bahwa  $\text{Peta}(T) \subseteq W$  dan  $\text{Peta}(T) \neq \emptyset$  karena  $\bar{0} \in \text{Peta}(T)$  yaitu  $\bar{0} = T(\bar{0})$ .

Ambil sebarang  $y_1, y_2 \in \text{Peta}(T)$  maka  $y_1 = T(x_1)$  dan  $y_2 = T(x_2)$ , untuk suatu  $x_1, x_2 \in V$ .

$$(a) y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2), \text{ karena } T \text{ adalah transformasi linier.}$$

Karena  $x_1, x_2 \in V$  dan  $V$  adalah ruang vektor, maka  $x_1 + x_2 \in V$ .

Jadi  $y_1 + y_2 \in \text{Peta}(T)$ .

$$(b) ky_1 = kT(x_1) = T(kx_1), \text{ karena } T \text{ adalah transformasi linier.}$$

Karena  $x_1 \in V$ ,  $k$  sebarang skalar, dan  $V$  adalah ruang vektor maka

$kx_1 \in V$ . Jadi  $ky_1 \in \text{Peta}(T)$ .

Dari (a) dan (b)  $\text{Peta}(T)$  adalah subruang dari  $W$ . ■

**Definisi 2.2.4**

Suatu pemetaan  $T: V \rightarrow W$ , dikatakan pada (surjektif), jika untuk setiap unsur  $y \in W$  terdapat  $x \in V$  sedemikian sehingga  $y = T(x)$  atau Peta  $(T) = W$ .

Pemetaan  $T: V \rightarrow W$  dikatakan satu-satu (injektif) jika untuk setiap dua vektor  $u$  dan  $v$  di  $V$  yang saling berlainan dipetakan oleh  $T$  menjadi vektor  $T(u)$  dan  $T(v)$  yang berlainan pula. Secara similar, ditulis:

$u, v \in V$ , dengan  $u \neq v \Rightarrow T(u) \neq T(v)$ . Yang ekuivalen dengan mengatakan, jika  $T(u) = T(v)$ , maka haruslah  $u = v$ .

**Sifat 2.2.1**

Misalkan  $T: V \rightarrow W$  suatu pemetaan linier. Maka  $T$  bersifat satu-satu  $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{0\}$ .

**Bukti:**

( $\Rightarrow$ ) Diketahui  $T$  bersifat satu-satu.

Jelas bahwa  $\{0\} \subseteq \text{Ker}(T)$ . selanjutnya ambil sebarang  $x \in \text{Ker}(T)$ , maka:

$T(x) = \bar{0} = T(\bar{0})$ . Karena  $T$  bersifat satu-satu, haruslah  $x = \bar{0}$ . Jadi,  $x \in \{0\}$  atau  $\text{Ker}(T) \subseteq \{0\}$ . Dengan demikian  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Diketahui  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .

Ambil sebarang vektor  $u$  dan  $v$  di  $V$  sedemikian sehingga  $T(u) = T(v)$ . Maka diperoleh  $T(u) - T(v) = \bar{0}$  atau  $T(u-v) = \bar{0}$ . Jadi  $u-v \in \text{Ker}(T)$ .

Karena  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , haruslah  $u-v = \bar{0}$  atau  $u = v$ . Hal ini memperlihatkan bahwa  $T: V \rightarrow W$  bersifat satu-satu. ■

**Definisi 2.2.5**

Misalkan  $F$  adalah suatu lapangan dan  $V, W$  adalah ruang vektor atas  $F$ . Jika  $S, T: V \rightarrow W$  adalah suatu transformasi linier, maka  $S + T: V \rightarrow W$  adalah suatu transformasi yang didefinisikan oleh:  $(S + T)v = S(v) + T(v)$ , untuk suatu  $v \in V$ . Untuk selanjutnya,  $(S + T)$  disebut jumlahan dari transformasi  $S$  dan  $T$ .

**Definisi 2.2.6**

Misalkan  $M, N, P$  adalah ruang vektor atas  $F$ . Jika  $S: M \rightarrow N$  dan  $T: N \rightarrow P$  adalah suatu transformasi linier, maka:

- (1)  $TS: M \rightarrow P$  adalah product dari transformasi linier  $T$  dan  $S$ , yang didefinisikan oleh  $(TS)(m) = T(S(m))$ , untuk setiap  $m \in M$ .
- (2)  $kS: M \rightarrow N$  adalah transformasi linier yang didefinisikan oleh  $(kS)(m) = k(S(m))$ , untuk setiap  $m \in M$  dan  $k \in F$ .

**Teorema 2.2.3**

Misalkan  $V$  adalah suatu ruang vektor atas  $F$ , dan misalkan  $S, T, U \in L(V, V)$ ,  $k \in F$ . Maka:

- (1)  $S + T, ST, kS$  adalah elemen dari  $L(V, V)$
- (2)  $S(TU) = (ST)U$  ..... (Hukum Asosiatif)
- (3)  $S(T + U) = ST + SU$  dan  $(S + T)U = SU + TU$  ..... (Hukum Distributif)

**Bukti:**

- (1) i. Akan ditunjukkan bahwa  $(S + T) \in L(V, V)$ .

Ambil sebarang  $v_1, v_2 \in V$ . Maka:

$$\begin{aligned}
(S + T)(v_1 + v_2) &= S(v_1 + v_2) + T(v_1 + v_2) \\
&= [S(v_1) + S(v_2)] + [T(v_1) + T(v_2)] \\
&= [S(v_1) + T(v_1)] + [S(v_2) + T(v_2)] \\
&= (S + T)v_1 + (S + T)v_2 \in L(V, V).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S + T)(lv_1) &= S(lv_1) + T(lv_1), \text{ untuk suatu } l \in F \\
&= l[S(v_1)] + l[T(v_1)] \\
&= l[S(v_1) + T(v_1)] \\
&= l[(S + T)v_1] \in L(V, V).
\end{aligned}$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa  $(ST) \in L(V, V)$ .

$$\begin{aligned}
(ST)(v_1 + v_2) &= S[T(v_1 + v_2)] \\
&= S[T(v_1) + T(v_2)] \\
(ST)(v_1 + v_2) &= S[T(v_1)] + S[T(v_2)] \\
&= ST(v_1) + ST(v_2) \in L(V, V).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ST)(lv_1) &= S[T(lv_1)] \\
&= S[lT(v_1)] = l[S(T(v_1))] = l[ST(v_1)] \in L(V, V).
\end{aligned}$$

iii. Akan ditunjukkan bahwa  $kS \in L(V, V)$ .

$$\begin{aligned}
(kS)(v_1 + v_2) &= k[S(v_1 + v_2)] \\
&= k[S(v_1) + S(v_2)] \\
&= kS(v_1) + kS(v_2) \in L(V, V).
\end{aligned}$$

$$(kS)(lv_1) = k[S(lv_1)] = k[lS(v_1)] = (kl)S(v_1) = (lk)S(v_1) = l[kS(v_1)] \in L(V, V).$$

(2) Ambil sebarang  $v \in V$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $[S(TU)](v) = [(ST)U](v)$ .

$$i. [S(TU)](v) = S[(TU)(v)] = S[T(U(v))]$$

$$\text{ii. } [(ST)U](v) = ST[U(v)] = S[T(U(v))]$$

Dari (i) dan (ii) jelas bahwa  $[S(TU)](v) = [(ST)U](v)$ .

(3) Ambil sebarang  $v \in V$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $[S(T + U)](v) = [ST + SU](v)$  dan

$$[(S + T)U](v) = [SU + TU](v)$$

$$\begin{aligned} \text{i. } [S(T + U)](v) &= S[(T + U)(v)] \\ &= S[T(v) + U(v)] \\ &= S[T(v)] + S[U(v)] \\ &= (ST)(v) + (SU)(v) = (ST + SU)(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } [(S + T)U](v) &= (S + T)U(v) \\ [(S + T)U](v) &= S[U(v)] + T[U(v)] \\ &= (SU)(v) + (TU)(v) \\ &= (SU + TU)(v). \blacksquare \end{aligned}$$

### Definisi 2.2.7

Transformasi linier  $T \in L(V, V)$  dikatakan invertible jika terdapat transformasi linier  $T^{-1} \in L(V, V)$  sedemikian sehingga  $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ .

### Teorema 2.2.4

Transformasi linier  $T \in L(V, V)$  invertible  $\Leftrightarrow T$  adalah pemetaan satu-satu dan pada.

**Bukti:**

( $\Rightarrow$ ) Diketahui  $T$  invertible. Akan ditunjukkan bahwa  $T$  adalah Pemetaan satu-satu dan pada.

i. Akan ditunjukkan bahwa  $T$  adalah pemetaan satu-satu.

Ambil sebarang  $v_1, v_2 \in V$ ,

dengan  $T(v_1) = T(v_2)$ , maka:

$$T^{-1}(T(v_1)) = T^{-1}(T(v_2))$$

$$(T^{-1}T)(v_1) = (T^{-1}T)(v_2)$$

$$v_1 = v_2$$

Jadi benar bahwa  $T$  adalah pemetaan satu-satu.

ii. Akan ditunjukkan bahwa  $T$  adalah pemetaan pada.

Ambil sebarang  $v \in V$ . Maka:

$$v = I(v)$$

$$v = (TT^{-1})(v) = T(T^{-1}(v)) = T(u), \text{ dengan } u = T^{-1}(v) \text{ dan } v \in V.$$

Jadi untuk setiap  $v \in V$  terdapat  $u = T^{-1}(v)$  sedemikian sehingga  $v = T(u)$ .

Jadi  $T$  bersifat pada.

Dari (i) dan (ii) jelas bahwa  $T$  invertible maka  $T$  adalah pemetaan satu-satu dan pada.

( $\Leftarrow$ ) Diketahui  $T$  pemetaan satu-satu dan pada. Akan ditunjukkan bahwa  $T$  punya balikan/ invertible, artinya  $\exists S$  sedemikian sehingga  $ST = TS = I$ .

i. Akan ditunjukkan bahwa  $S$  adalah suatu pemetaan.

Ambil sebarang  $v \in V$ . Karena  $T$  bersifat pada maka terdapat  $u \in V$  sedemikian sehingga  $v = T(u)$ .

Definisikan pengaitan  $S: v \mapsto u, \forall v \in V$ .

Akan ditunjukkan bahwa  $S$  mendefinisikan suatu pemetaan dari  $V$  ke  $V$  atau  $S: V \rightarrow V$ .

Misalkan  $u_1, u_2$  adalah peta-peta dari  $v$  oleh  $S$ , dengan  $T(u_1) = v = T(u_2)$ .

Karena  $T$  bersifat satu-satu, maka haruslah  $u_1 = u_2$ .

Jadi benar bahwa  $S$  adalah suatu pemetaan.

ii. Akan ditunjukkan bahwa  $S: V \rightarrow V$  adalah pemetaan linier.

a. Ambil sebarang  $v_1, v_2 \in V$ .

Karena  $T$  bersifat pada maka  $v_1 = T(u_1)$  dan  $v_2 = T(u_2)$ , untuk suatu  $u_1, u_2 \in V$ .

Dengan demikian  $T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2$ , karena  $T$  pemetaan linier

$$T(u_1 + u_2) = v_1 + v_2$$

Dari definisi pemetaan  $S$ , maka:

$$S(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = S(v_1) + S(v_2)$$

b. Ambil sebarang  $k$  skalar di  $F$  dan  $v \in V$ .

Karena  $T$  bersifat pada, maka  $v = T(u)$ , untuk suatu  $u \in V$ .

Karena  $T$  pemetaan linier, maka  $T(ku) = kT(u) = kv$ .

Akibatnya  $S(kv) = ku$

$$= kS(v)$$

Dari (a) dan (b) jelas bahwa  $S: V \rightarrow V$  adalah pemetaan linier.

iii. Akan ditunjukkan bahwa  $ST = TS = I$ .

Ambil sebarang  $v \in V$ . Karena  $T$  bersifat pada maka  $v = T(u)$ , untuk suatu  $u \in V$ .

$$TS(v) = T(u) = v = I(v)$$

$$ST(u) = S(v) = u = I(u)$$

Jadi jelas bahwa  $ST = TS = I$ .

Jelas bahwa  $T$  pemetaan satu-satu dan pada maka  $T$  invertible. ■

### Definisi 2.2.8

Misalkan  $V$  adalah ruang vektor atas lapangan  $F$ , dan  $V = K \oplus L$ . Suatu pemetaan linier  $p: V \rightarrow V$  disebut proyeksi pada  $K$  sepanjang  $L$  jika  $V = K \oplus L$ , dan  $\forall z \in V$  dan  $z = x + y$ ,  $x \in K$  dan  $y \in L$  berlaku  $p(z) = x$ .

### Teorema 2.2.5

Misalkan  $p: V \rightarrow V$  adalah proyeksi pada  $K$  sepanjang  $L$ , maka berlaku:  
 $V = K + L$ , dengan  $K = \text{Peta}(p)$  dan  $L = \text{Ker}(p)$ .

#### Bukti:

(a) Akan ditunjukkan bahwa  $K = \text{Peta}(p)$ .

i. Akan ditunjukkan bahwa  $K \subseteq \text{Peta}(p)$ .

Ambil sebarang  $x \in K$ , maka  $x \in V = K + L$ .

Tulis:  $x = x + \bar{0}$ , dengan  $x \in K$  dan  $\bar{0} \in L$ , maka  $p(x) = x \in \text{Peta}(p)$ .

Karena untuk sebarang  $x \in K$  juga berlaku  $x \in \text{Peta}(p)$  maka  $K \subseteq \text{Peta}(p)$ .

ii. Akan ditunjukkan  $\text{Peta}(p) \subseteq K$ .

Ambil sebarang  $x \in \text{Peta}(p)$ . Tulis  $x = p(z)$ , untuk suatu  $z \in V = K + L$ .

Tulis  $z = a + b$ , dengan  $a \in K$  dan  $b \in L$ . Dengan demikian.

$$x = p(z) = p(a + b) = a \in K.$$

Karena untuk sebarang  $x \in \text{Peta}(p)$  juga berlaku  $x \in K$ , maka  $\text{Peta}(p) \subseteq K$ .

Dari (i) dan (ii) jelas bahwa  $K = \text{Peta}(p)$ .

(b) Akan ditunjukkan bahwa  $L = \text{Ker}(p)$ .

i. Akan ditunjukkan bahwa  $L \subseteq \text{Ker}(p)$ .

Ambil sebarang  $y \in L$ , maka  $y \in V = K + L$ .

Tulis  $y = \bar{0} + y$ , dengan  $\bar{0} \in K$  dan  $y \in L$ , maka  $p(y) = p(\bar{0} + y) = \bar{0}$ .

Jadi,  $y \in \text{Ker}(p)$ .

Karena untuk sebarang  $y \in L$  juga berlaku  $y \in \text{Ker}(p)$ , maka  $L \subseteq \text{Ker}(p)$ .

ii. Akan ditunjukkan bahwa  $\text{Ker}(p) \subseteq L$ .

Ambil sebarang  $x \in \text{Ker}(p)$  maka berlaku  $p(x) = \bar{0}$

$x \in \text{Ker}(p) \subseteq V = K + L$ .

Tulis  $x = y + z$ , dengan  $y \in K$  dan  $z \in L$ .

$$p(x) = p(y + z)$$

$$\bar{0} = y$$

Jadi,  $x = \bar{0} + z = z \in L$ .

Karena untuk sebarang  $x \in \text{Ker}(p)$  juga berlaku  $x \in L$ , maka  $\text{Ker}(p) \subseteq L$ .

Dari (i) dan (ii) jelas bahwa  $L = \text{Ker}(p)$ . ■

### 2.3 Ruang Perkalian Dalam

Berikut ini akan diberikan definisi, contoh dari ruang perkalian dalam kompleks, dan definisi komplemen orthogonal dari suatu subruang.

#### Definisi 2.3.1

Suatu perkalian dalam (inner product) pada ruang vektor kompleks  $V$  adalah sebuah fungsi yang mengawankan setiap vektor  $u, v \in V$  dengan bilangan kompleks  $\langle u, v \rangle$  yang memenuhi aksioma berikut:

(1)  $\langle u, v \rangle$  adalah fungsi bilinear, sehingga dipenuhi:

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \text{ untuk } u, v, w \in V \text{ dan } \alpha \in \mathbb{C}.$$

(2)  $\langle u, v \rangle$  adalah simetris sehingga dipenuhi:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \text{ untuk } u, v \in V.$$

(3)  $\langle u, u \rangle \geq 0$  dan  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Ruang vektor kompleks yang mempunyai perkalian dalam disebut Ruang Perkalian Dalam Kompleks.

#### Contoh 2.3.1

Misalkan  $u = (u_1, \dots, u_n)$  dan  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Tunjukkan bahwa  $\langle u, v \rangle$  adalah perkalian dalam, jika  $\langle u, v \rangle = u \bar{v} = u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_n \bar{v}_n$ .

**Penyelesaian:**

$$(1) \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \text{ dan } \alpha \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \overline{\mathbf{w}} \\ &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) (\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n}) \\ &= (u_1 + v_1) \overline{w_1} + \dots + (u_n + v_n) \overline{w_n} \\ &= (u_1 \overline{w_1} + \dots + u_n \overline{w_n}) + (v_1 \overline{w_1} + \dots + v_n \overline{w_n}) \\ &= \mathbf{u} \overline{\mathbf{w}} + \mathbf{v} \overline{\mathbf{w}} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \mathbf{u} \overline{(\mathbf{v} + \mathbf{w})} \\ &= (u_1, \dots, u_n) (\overline{v_1 + w_1}, \dots, \overline{v_n + w_n}) \\ &= u_1 (\overline{v_1 + w_1}) + \dots + u_n (\overline{v_n + w_n}) \\ &= (u_1 \overline{v_1} + \dots + u_n \overline{v_n}) + (u_1 \overline{w_1} + \dots + u_n \overline{w_n}) \\ &= \mathbf{u} \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{u} \overline{\mathbf{w}} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \alpha \mathbf{u} \overline{\mathbf{v}} = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n) (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}) \\ &= \alpha u_1 \overline{v_1} + \dots + \alpha u_n \overline{v_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \alpha (u_1 \overline{v_1} + \dots + u_n \overline{v_n}) \\ &= \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

$$(2) \langle u, v \rangle = u\bar{v} = u_1\bar{v}_1 + \dots + u_n\bar{v}_n = \overline{v_1u_1} + \dots + \overline{v_nu_n} = v_1\bar{u}_1 + \dots + v_n\bar{u}_n = v\bar{u} \\ = \langle v, u \rangle$$

$$3) \langle u, u \rangle = u\bar{u} = u_1\bar{u}_1 + \dots + u_n\bar{u}_n \geq 0$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \text{ maka } \langle u, u \rangle = u_1\bar{u}_1 + \dots + u_n\bar{u}_n = 0 \Leftrightarrow u_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Dari (1),(2), dan (3) jelas bahwa  $\langle u, v \rangle = u\bar{v} = u_1\bar{v}_1 + \dots + u_n\bar{v}_n$  adalah perkalian dalam. ■

### Definisi 2.3.2

Jika  $W$  adalah subruang dari  $V$ , maka komplemen orthogonal dari  $W$ , yang dinotasikan  $W^\perp$  didefinisikan oleh  $W^\perp = \{ x \in V \mid \langle x, w \rangle = 0, \forall w \in W \}$ .