BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Pemodelan Obyek 3 Dimensi

Pemodelan obyek 3 dimensi adalah suatu metode untuk menggambarkan posisi suatu obyek 3 dimensi dalam bentuk geometri dan topologinya sehingga dapat dianalisa dan diolah lebih lanjut. Secara umum obyek dalam dunia 3 dimensi berupa polihedron, yaitu gambaran obyek yang mempunyai ruang 3 dimensi (panjang, lebar, tinggi). Pada sisi-sisi permukaan dibentuk oleh poligon-poligon yang dibentuk dari kumpulan verteks-verteks, yaitu titik koordinat sehingga membentuk lintasan tertutup sederhana. Contoh polihedron adalah balok, piramid, tabung. Sedangkan contoh poligon adalah bujursangkar, kotak, segitiga, lingkaran.

Geometri obyek 3 dimensi berhubungan dengan ukuran, misalnya : lokasi titik atau ukuran obyek. Topologi digunakan untuk menghubungkan titik-titik koordinat obyek sehingga dapat membentuk suatu poligon, kemudian bagaimana poligon yang terbentuk disusun untuk membentuk obyek (polihedron) yang dimaksud. Sehingga diperlukan sistem koordinat untuk membentuk model obyek.

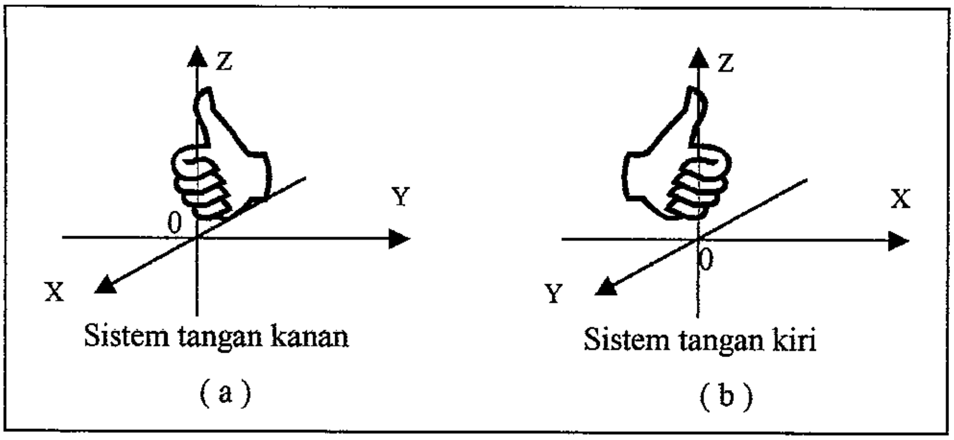
2.2. Sistem Koordinat Cartesian

Sistem Koordinat Cartesian atau koordinat siku-siku dalam ruang tiga dimensi meliputi 3 sumbu koordinat, yaitu sumbu X, sumbu Y dan sumbu Z.

Obyek benda akan terletak pada bidang XYZ. Setiap obyek tersusun dari titik-titik koordinat yang mempunyai koordinat (x, y, z).

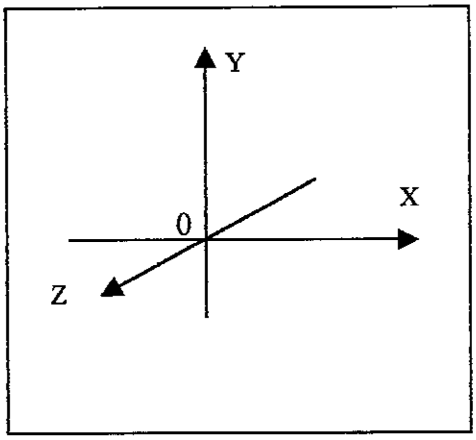
Sistem koordinat Cartesian dalam ruang tiga dimensi dapat digolongkan kedalam dua kategori yakni, sistem tangan kiri dan sistem tangan kanan. Menurut kebiasaan yang baku dalam penggambaran sumbu koordinat cartesian, pada sistem tangan kanan sumbu Y dan sumbu Z terletak pada bidang kertas dengan arah positif masing-masing ke kanan dan ke atas. Kemudian sumbu X tegak lurus kertas dengan arah positif menuju kita. Dinamakan tangan kanan karena jika jari-jari tangan kanan dikepalkan sehingga melengkung dari sumbu X positif ke arah sumbu Y positif, ibu jari akan mengarah ke sumbu ke sumbu Z positif. (gambar 2.1.a).

Sedangkan sistem tangan kiri memiliki sumbu X dan sumbu Z terletak pada bidang kertas dengan arah positif masing-masing ke kanan dan ke atas. Kemudian sumbu Y tegak lurus kertas dengan arah positif menuju kita. Dinamakan tangan kiri karena jika jari-jari tangan kiri dikepalkan sehingga melengkung dari sumbu X positif ke arah sumbu Y positif, ibu jari akan mengarah ke sumbu Z positif. (lihat gambar 2.1.b).



Gambar 2.1. Sistem koordinat cartesian tiga dimensi

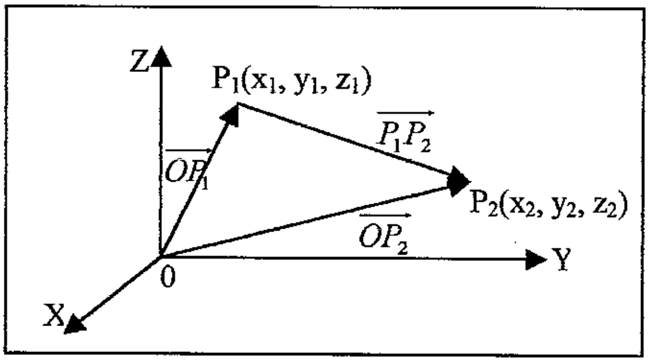
Sistem koordinat Cartesian yang digunakan dalam penulisan Tugas Akhir ini mengunakan sistem tangan kanan, yang telah dimodifikasi yaitu dengan memutar 90^0 ke kanan dengan sumbu Z sebagai sumbu putar, kemudian memutar 90^0 ke bawah dengan sumbu X sebagai sumbu putar sehingga menghasilkan sumbu X sebagai sumbu horisontal, sumbu Y sebagai sumbu vertikal, dan sumbu Z sebagai sumbu kedalaman (gambar 2.2).



Gambar 2.2. Sistem koordinat tangan kanan yang sudah dimodifikasi

2.3. Vektor

Secara geometris vektor dapat dinyatakan sebagai penggal garis berarah, panjang penggal garis menyatakan besarnya vektor dan arah panah menentukan arah vektor. Ekor panah dinamakan titik awal (*initial point*) dari vektor, dan ujung panah dinamakan titik terminal (*terminal point*). Pada penulisan tugas akhir ini, vektor yang digunakan adalah vektor pada ruang 3 dimensi.



Gambar 2.3. Vektor pada ruang 3 dimensi

Pada gambar 2.3 terdapat titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pada bidang XYZ, maka vektor yang dihasilkan adalah :

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{u} = [\, x_1 , y_1 , z_1 \,] \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{OP_2} = \mathbf{v} = [\, x_2 , y_2 , z_2 \,]$$

2.3.1. Panjang Vektor

Panjang vektor disebut juga norma vektor, panjang suatu titik $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ dari titik (0,0,0) didefinisikan sebagai berikut.

$$|\,\overrightarrow{OP_1}\,| = |\,\mathbf{u}\,| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

2.3.2. Penambahan Vektor

Penambahan 2 vektor dilakukan dengan operasi penambahan pada masing-masing komponen vektor. Misal, jika vektor $\mathbf{u} = [\, x_1 , y_1 , z_1 \,]$ dan vektor $\mathbf{v} = [\, x_2 , y_2 , z_2 \,]$ maka :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [(x_1 + x_2) , (y_1 + y_2) , (z_1 + z_2)]$$

2.3.3. Pengurangan Vektor

Pengurangan dua vektor dilakukan dengan 2 operasi pengurangan pada masing-masing komponen vektor. Misal, jika vektor $\mathbf{u} = [\, x_1 , y_1 , z_1 \,]$ dan vektor $\mathbf{v} = [\, x_2 , y_2 , z_2 \,]$ maka :

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = [\, (x_1 - x_2) , (y_1 - y_2) , (z_1 - z_2) \,]$$

2.3.4. Unit Vektor

Unit vektor dari suatu vektor adalah vektor lain yang memiliki panjang vektor = 1, tapi arahnya tetap sama. Setiap vektor mempunyai unit vektor, untuk mencari unit vektor adalah sebagai berikut.

Misal: vektor **u** = [x_1 , y_1 , z_1] , unit vektor dari vektor **u** adalah :

$$e_{\mathbf{u}} = \left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} , \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} , \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right]$$

2.3.5. Hasil Kali Titik (Dot Product)

Jika **u** dan **v** adalah vektor di ruang 3 dimensi, dan θ adalah sudut yang dibentuk antara **u** dan **v** , maka hasil kali titik antara dua vektor menghasilkan besaran skalar yang didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| . |\mathbf{v}| . \cos\theta$$

$$= x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Dengan, **u** = [x_1 , y_1 , z_1]

v = [x_2 , y_2 , z_2]

| **u** | = norma vektor **u**

| **v** | = norma vektor **v**

2.3.6. Hasil kali silang (Cross Product)

Jika **u** = [x_1, y_1, z_1] dan **v** [x_2, y_2, z_2] adalah vektor di ruang 3 dimensi, maka hasil kali silang didefinisikan oleh:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [\, y_1.z_2 - z_1.y_2 \ , \ z_1.x_2 - x_1.z_2 \ , \ x_1.y_2 - y_1.x_2 \,]$$

2.4. Matriks

Definisi matriks adalah larik bujur sangkar atau empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan elemen dari matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal), Sebuah matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks berorde m x n. Elemen-elemen suatu matriks dinyatakan dengan dua buah indeks, indeks pertama menyatakan baris dan indeks kedua menyatakan kolom.

Pada penulisan ini akan digunakan matriks berorde 4 x 4 , sebagai orde matriks transformasi. sedangkan untuk mendefinisikan koordinat obyek digunakan matriks berorde 1 x 4.

Misal : matriks A merupakan matriks berorde 4 x 4 , B adalah matriks orde 1 x 4 yang mendefinisikan koordinat obyek di titik B(a_{11}, a_{12}, a_{13})

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad ; \quad B \; [\; a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad 1 \;]$$

2.4.1. Invers matriks

Invers suatu matriks adalah sebuah matriks yang jika dikalikan dengan matriks dirinya sendiri akan menjadi matriks identitas. Misal : A adalah matriks berorde 4 x 4, A^{-1} adalah invers matriks A , dan I adalah matriks identitas, maka :

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Matriks identitas yang digunakan adalah matriks berorde 4 x 4 . Misal :

I adalah matriks identitas.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5. Transformasi Obyek 3 dimensi

Transformasi geometris pada obyek 3 dimensi digunakan untuk memperlihatkan realita dari obyek yang ditinjau. Aspek penting dalam penyajian transformasi obyek 3 dimensi adalah :

1. Sembarang transformasi dapat disajikan ke dalam matriks transformasi.
2. Transformasi yang lebih rumit dapat dinyatakan oleh sebuah matriks transformasi yang merupakan gabungan dari matriks transformasi dari transformasi dasar.

Berdasarkan sistem koordinat yang digunakan, setiap titik obyek 3 dimensi ditentukan oleh 3 posisi, yaitu : posisi terhadap sumbu X, posisi terhadap sumbu Y, posisi terhadap sumbu Z. Misal : sebuah titik sembarang Q dinyatakan sebagai (q_x, q_y, q_z).

2.5.1. Pergeseran (Translasi)

Pergeseran adalah pergerakan sebuah obyek ke lokasi baru dengan menambahkan suatu nilai konstanta untuk setiap titik koordinat yang terdefinisi dalam obyek tersebut. Jika P (p_x, p_y, p_z) adalah posisi titik asal, Q (q_x, q_y, q_z) adalah posisi titik setelah digeser, I adalah matriks identitas, dan tr_x, tr_y, tr_z

merupakan nilai konstanta yang menunjukkan besarnya penggeseran pada setiap sumbu koordinat, maka hasil penggeseran dapat dinyatakan sebagai :

$$(q_x, q_y, q_z) = (p_x + tr_x , p_y + tr_y , p_z + tr_z)$$

atau

$$q_x = p_x + tr_x$$

$$q_y = p_y + tr_y$$

$$q_z = p_z + tr_z$$

Persamaan matriksnya :

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tr_x \\ tr_y \\ tr_z \end{bmatrix} \quad \ldots (2.1)$$

2.5.2. Pencerminan (Refleksi)

Pencerminan adalah perubahan suatu obyek kedalam kedudukan baru dengan arah tegak lurus terhadap pusat pencerminan yang jaraknya dua kali jarak obyek terhadap pusat pencerminan.

Jika P (p_x, p_y, p_z) adalah posisi titik asal, Q (q_x, q_y, q_z) adalah posisi titik setelah dicerminkan terhadap titik T (t_x, t_y, t_z) , maka pencerminan terhadap suatu titik T (t_x, t_y, t_z) dapat ditulis sebagai :

$$(q_x, q_y, q_z) = (2t_x - p_x , 2t_y - p_y , 2t_z - p_z)$$

atau

$$q_x = 2t_x - p_x$$

$$q_y = 2t_y - p_y$$

$$q_z = 2t_z - p_z$$

Persamaan matriksnya :

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t_x \\ 2t_y \\ 2t_z \end{bmatrix} \qquad \ldots (2.2)$$

2.5.3. Perputaran (Rotasi)

Perputaran adalah perubahan dari suatu koordinat obyek ke dalam kedudukan baru dengan menggerakan seluruh titik koordinat yang didefinisikan pada bentuk awal dengan suatu besaran sudut pada suatu sumbu putar.

Jika Q (q_x, q_y, q_z) adalah posisi setelah rotasi pada suatu sumbu putar, P (p_x, p_y, p_z) adalah posisi awal sebelum dilakukan rotasi, dan R adalah matriks rotasi pada suatu sumbu putar. Sistem koordinat 3 dimensi mempunyai tiga buah sumbu putar, maka rotasi tiap sumbu bisa dituliskan sebagai berikut, dengan θ menunjukkan sudut putar.

A. Rotasi terhadap sumbu X

$(q_x, q_y, q_z) = (1\ ,\ p_y.\cos\theta + p_z.\sin\theta\ ,\ p_y.(-\sin\theta) + p_z.\cos\theta)$

atau

$$q_x = 1$$

$$q_y = p_y . \cos\theta \quad + p_z . \sin\theta$$

$$q_z = p_y . (-\sin\theta) + p_z . \cos\theta$$

Persamaan matriksnya :

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad \ldots (2.3)$$

B. Rotasi terhadap sumbu Y

$(q_x, q_y, q_z) = (p_x.\cos\theta + p_z.(-\sin\theta)\ ,\ 1\ ,\ p_x.\sin\theta + p_z.\cos\theta)$

atau

$q_x = p_x \cdot \cos\theta + p_z \cdot (-\sin\theta)$

$q_y = 1$

$q_z = p_x \cdot \sin\theta + p_z \cdot \cos\theta$

Persamaan matriksnya :

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \ldots (2.4)$$

C. Rotasi terhadap sumbu Z

$(q_x, q_y, q_z) = (p_x \cdot \cos\theta + p_y \cdot (-\sin\theta)\ ,\ p_x \cdot \sin\theta + p_y \cdot \cos\theta\ ,\ 1)$

atau

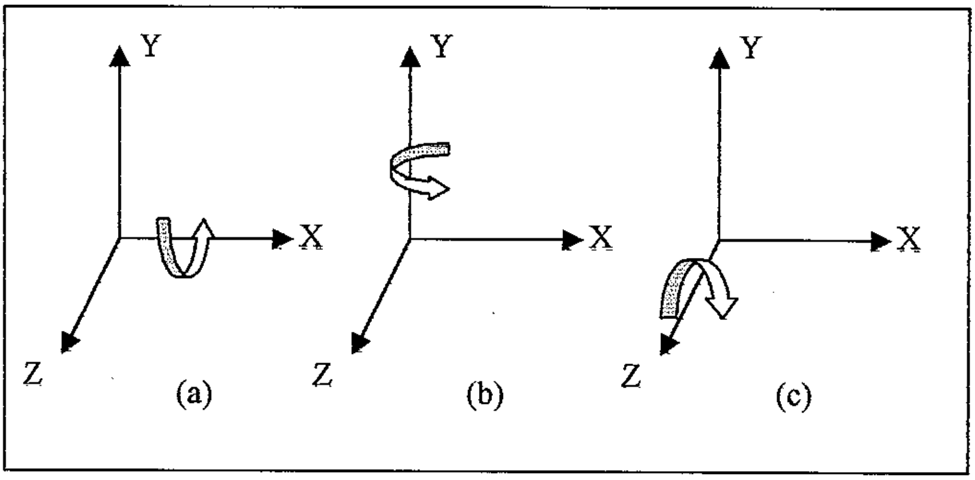
$q_x = p_x \cdot \cos\theta + p_y \cdot (-\sin\theta)$

$q_y = p_x \cdot \sin\theta + p_y \cdot \cos\theta$

$q_z = 1$

Persamaan matriksnya :

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \ldots (2.5)$$



Gambar 2.4. Rotasi pada tiap sumbu putar koordinat.

Rotasi suatu obyek menghasilkan kedudukan baru suatu obyek tergantung dari besar sudut putar (θ), tetapi bentuk dari obyek tidak mengalami perubahan. Pada gambar 2.4.(a) menunjukkan rotasi pada sumbu X, gambar 2.4.(b) merupakan rotasi pada sumbu Y, dan gambar 2.4.(c) merupakan rotasi pada sumbu Z.

2.5.4. Penskalaan

Penskalaan dilakukan dengan melakukan pengalian setiap titik koordinat dari obyek dengan faktor pengali, faktor pengali dapat berbeda pada setiap elemennya. Hasil dari proses penskalaan adalah perubahan ukuran dari obyek, karena dipengaruhi hasil perkalian dari setiap titik koordinatnya dengan faktor pengali.

Jika Q (q_x, q_y, q_z) adalah posisi setelah penskalaan, P (p_x, p_y, p_z) adalah posisi awal, $scal_x$, $scal_y$, $scal_z$ adalah matriks transformasi (faktor pengali) pada setiap sumbu koordinat. Maka penskalaan dapat ditulis sebagai :

$$(q_x, q_y, q_z) = (scal_x \cdot p_x, scal_y \cdot p_y, scal_z \cdot p_z).$$

atau

$$q_x = scal_x \cdot p_x$$

$$q_y = scal_y \cdot p_y$$

$$q_z = scal_z \cdot p_z$$

Persamaan matriksnya :

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} scal_x & 0 & 0 \\ 0 & scal_Y & 0 \\ 0 & 0 & scal_Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad \ldots (2.6)$$

2.5.5. Matriks Transformasi

Matriks transformasi adalah suatu matriks yang berguna untuk mendapatkan titik hasil transformasi (Q (q_x, q_y, q_z)) dari suatu titik P (p_x, p_y, p_z), proses perhitungan untuk mendapatkan titik hasil transformasi yaitu titik Q (q_x, q_y, q_z) dilakukan dalam bentuk persamaan matriks, dengan titik Q (q_x, q_y, q_z) merupakan hasil perkalian antara matriks transformasi dengan titik P (p_x, p_y, p_z).

Dari bentuk persamaan matriks diatas (2.1, 2.2, 2.3, 2.4., 2.5, dan 2.6) , untuk melakukan transformasi obyek terlihat bahwa persamaan matriks untuk pergeseran (2.1) dan persamaan matriks untuk pencerminan (2.2) mempunyai bentuk yang berbeda dengan persamaan matriks untuk perputaran (2.3, 2.4, 2.5) dan persamaan matriks untuk penskalaan (2.6). Pada persamaan matriks untuk pergeseran dan pencerminan selain memerlukan operasi perkalian matriks juga memerlukan operasi penjumlahan matriks. Sedangkan pada persamaan matriks untuk perputaran dan penskalaan hanya memerlukan operasi perkalian matriks. Sehingga perlu dicari suatu cara agar persamaan matriks untuk pergeseran dan pencerminan juga bisa dinyatakan dalam operasi perkalian matriks (untuk mendapatkan matriks transformasi), caranya adalah dengan menambah dimensi titik yang akan ditransformasikan, misal titik P (p_x, p_y, p_z) menjadi P (p_x, p_y, p_z, p_{dim}) dengan dimensi tambahan bernilai konstan misal $p_{dim} = 1$

maka P (p_x, p_y, p_z, 1) , dalam bentuk matriksnya : $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$ dan menghasilkan titik transformasi Q (q_x, q_y, q_z , 1) dalam bentuk matriksnya : $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix}$

2.5.5.1. Persamaan matriks untuk Pergeseran (Translasi)

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka didapatkan matriks transformasinya :

$$M_{translasi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tr_x \\ 0 & 1 & 0 & tr_y \\ 0 & 0 & 1 & tr_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.5.2. Persamaan matriks untuk Pencerminan (Refleksi)

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2t_x \\ 0 & -1 & 0 & 2t_y \\ 0 & 0 & -1 & 2t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka didapatkan matriks transformasinya :

$$M_{Refleksi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2t_x \\ 0 & -1 & 0 & 2t_y \\ 0 & 0 & -1 & 2t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.5.3. Persamaan matriks untuk Perputaran (Rotasi)

A. persamaan Matriks untuk rotasi terhadap sumbu X

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks transformasinya :

$$M_{rotasiX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B. Persamaan Matriks untuk rotasi terhadap sumbu Y

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks transformasinya :

$$M_{rotasiY} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C. Persamaan matriks untuk rotasi terhadap sumbu Z

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks transformasinya :

$$M_{\text{rotasi Z}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.5.4. Persamaan Matriks untuk penskalaan

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} scal_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & scal_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & scal_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks transformasinya :

$$M_{\text{penskalaan}} = \begin{bmatrix} scal_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & scal_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & scal_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

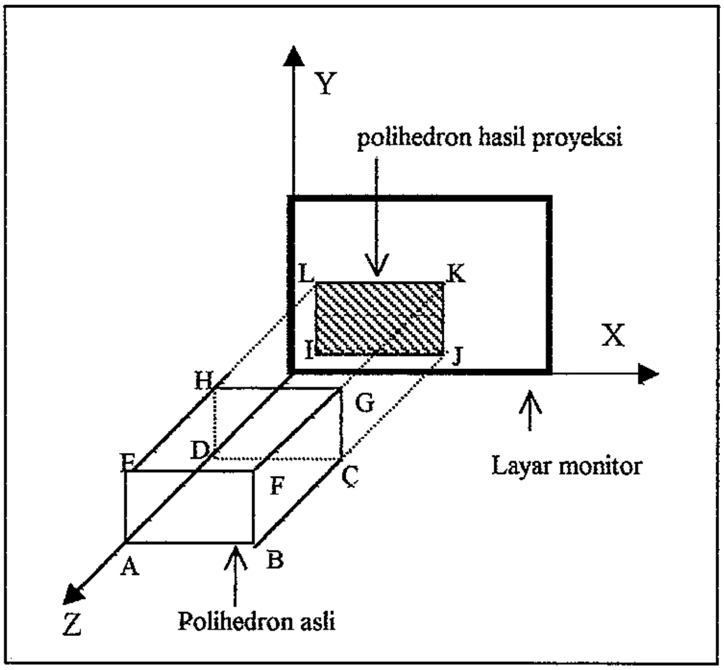
2.6. Proyeksi

Suatu obyek 3 dimensi apabila disinari sinar dari arah tertentu akan membentuk bayangannya pada suatu permukaan. Dengan menggunakan prinsip penyinaran tersebut maka akan dapat dihasilkan suatu proyeksi dua dimensi. Langkah untuk menghasilkan obyek dua dimensi dari hasil proyeksi tiga dimensi adalah dengan memproyeksikan setiap titik dari obyek tiga dimensi ke permukaan gambar dua dimensi, jika titik-titik sudutnya berhingga, cukup diproyeksikan titik-titik sudutnya saja.

2.6.1. Proyeksi paralel

Proyeksi paralel adalah suatu proyeksi yang diperoleh jika suatu sinar tegak lurus dengan bidang proyeksi dikenakan pada obyek yang diproyeksikan, karena yang dianggap sebagai bidang proyeksi adalah bidang XY maka sinarnya sejajar dengan sumbu Z.

Contoh: balok ABCDEFGH, dengan A(4,4,4) , B(8,4,4) , C(8,4,2) , D(4,4,2), E(4,6,4) , F(8,6,4) , G(8,6,2) , H(4,6,2) , maka hasil proyeksinya adalah empat persegi panjang IJKL dengan I(4,4,0) , J(8,4,0) , K(8,6,0) , L(4,6,0).

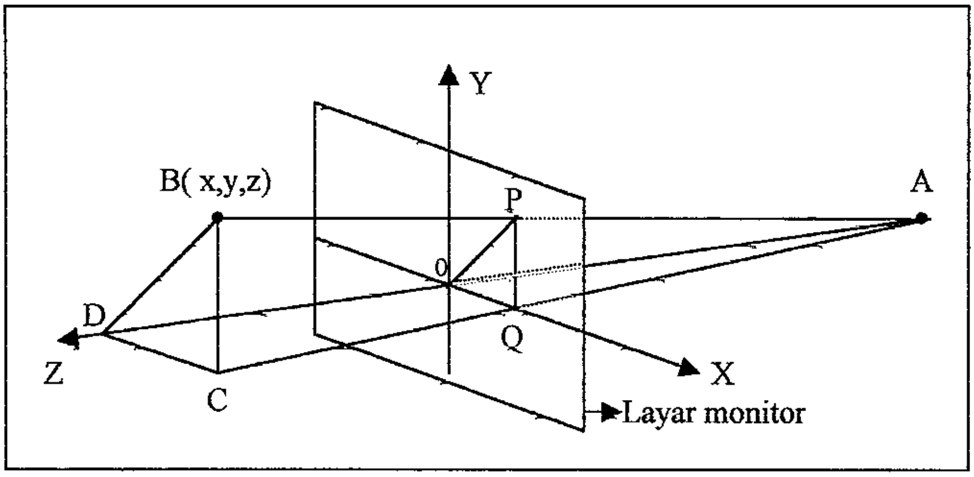


Gambar 2.5. Proyeksi paralel/ orthogonal secara geometris.

2.6.2. Proyeksi Perspektif

Proyeksi perspektif adalah suatu proyeksi dengan arah sinar pada obyek diasumsikan berasal dari posisi/ tempat yang tidak ditentukan (bebas). Proyeksi perspektif berbeda dengan proyeksi paralel yang arah sinarnya diasumsikan tegak lurus dengan obyek dan bidang pandang.

Contoh proyeksi perspektif dari suatu titik B(x, y, z) pada bidang pandang XY, dan titik proyeksi pada AO sumbu Z. Panjang garis AO disebut jarak titik proyeksi ke layar.



Gambar 2.6. Proyeksi perspektif secara geometris

Koordinat obyek terletak pada B(x,y,z) yang terhubungkan dengan titik A (titik proyeksi) oleh garis AO. Titik B akan menembus bidang pandang, yang diasumsikan layar monitor pada titik P(x,y,z). garis DC merupakan panjang obyek terhadap sumbu X bidang pandang, garis BC merupakan tinggi obyek terhadap sumbu Y, dan panjang terhadap sumbu Z diwakili oleh garis DO. pada layar monitor garis OQ merupakan faktor koordinat X dari hasil proyeksi, dan garis PQ sebagai koordinat Y hasil proyeksi.

Panjang garis OQ dan PQ dapat diketahui dengan menggunakan dalil segitiga. Perhatikan segitiga AOQ dan ADC, maka:

$$\frac{OQ}{DC} = \frac{AO}{AD}$$

maka : $$OQ = \frac{AO.DC}{AD}$$

dengan : OQ = koordinat X hasil proyeksi dari obyek.

AO = jarak antara titik proyeksi dengan monitor, misal m pixel.

DC = koordinat X tiga dimensi dari obyek.

AD = koordinat Z tiga dimensi dari obyek

Jadi dari persamaan OQ diatas dapat diasumsikan sebagai :

$$Xp = \frac{m.x}{m+z}$$

Panjang PQ dapat diketahui melalui segitiga APQ dan ABC, maka :

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AO}{AD}$$

sehingga : $$PQ = \frac{AO.BC}{AD}$$

dengan : PQ = koordinat Y hasil proyeksi dari obyek.

AO = jarak antara titik proyeksi dengan monitor, misal m pixel.

BC = koordinat Y tiga dimensi dari obyek.

AD = koordinat Z tiga dimensi dari obyek.

Jadi persamaan PQ diatas dapat diasumsikan sebagai :

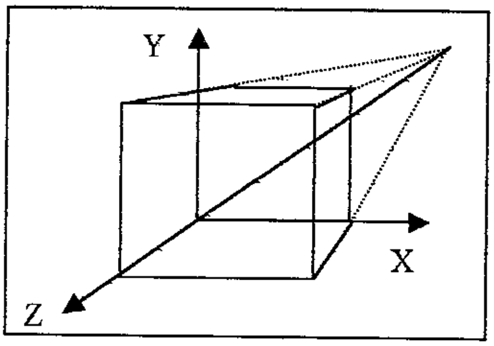
$$Yp = \frac{m.y}{m+z}$$

Dari hasil proyeksi, maka akan dapat disimpulkan bahwa :

1. Semakin jauh obyek dari titik proyeksi , hasil proyeksi akan semakin kecil, dan sebaliknya.
2. Jika suatu titik (x,y,z) terletak tepat pada bidang pandang, maka hasil proyeksinya adalah titik itu sendiri.
3. Hasil proyeksi sebuah garis lurus adalah garis lurus, karena hasil proyeksinya dapat diperoleh dengan memproyeksikan kedua titik ujung garis.

2.6.2.1. Proyeksi Perspektif satu titik

Proyeksi perspektif 1 titik adalah proyeksi perspektif yang mempunyai 1 titik lenyap (*vanishing point*), yang terletak pada salah satu sumbu koordinat. Seperti terlihat pada contoh gambar 2.7

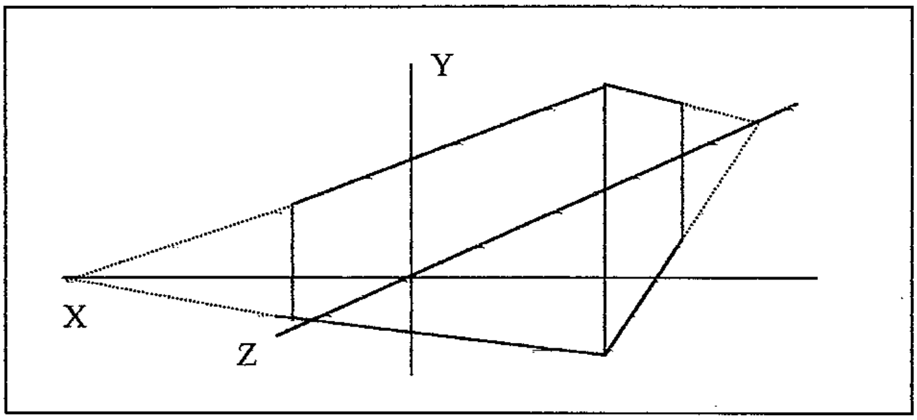


Gambar 2.7. Proyeksi perspektif 1 titik

Pada gambar 2.7. titik lenyap obyek terletak pada sumbu Z. Mata pengamat terletak sejajar pada sumbu Z, sehingga semua garis yang sejajar dengan sumbu Z, atau yang menembus bidang pandang, akan bertemu dengan titik lenyap. Sedangkan garis yang lain adalah garis tegak dan mendatar terhadap bidang pandang.

2.6.2.2. Proyeksi Perspektif dua titik (proyeksi angular)

Proyeksi perspektif dua titik adalah suatu proyeksi perspektif dengan semua garis sejajar yang mengarah pada kedua titik lenyap, akan bertemu pada titik lenyapnya masing-masing, sedangkan garis yang tidak berubah adalah garis yang sejajar terhadap sumbu yang titik lenyapnya tidak berada pada sumbu tersebut.



Gambar 2.8. Proyeksi perspektif 2 titik

Titik lenyap pada gambar 2.8. adalah sumbu X dan sumbu Z, garis yang sejajar sumbu Y tetap, karena tegak lurus dan berada di depan pengamat.

2.7. Mode Grafik VGA

Pada penulisan ini mode grafik VGA mempunyai resolusi 320 x 200 pixel 256 warna, pada prinsipnya hasil tampilan pada monitor berasal dari rekaman memori dari RAM (*Random Accsess Memory*) yang dihasilkan dari monitor card pada komputer. Monitor card akan mentransfer gambar yang dihasilkan pada suatu lokasi alamat memori yang digunakannya pada monitor. Alamat memori tersebut disebut sebagai *visual page* (halaman bayangan).

2.7.1. Alokasi Pixel pada Memori layar

Pemindahan dari mode grafik dapat menggunakan interrupt DOS service 10h, dengan alamat visual page dimulai dari \$A000:0 sampai \$A000:63999 atau pada bilangan heksa desimal di \$A000:00000 sampai \$A000:F9FFh.

Setiap pixel yang digunakan disimpan dalam 1 offset (=1 byte). Sehingga jumlah memori yang digunakan adalah 64000 byte, sebagai latar belakang standar, karena resolusi yang digunakan 320 x 200 pixel, maka tempat penampungan pixel sejumlah 320 x 200 = 64000.

Sebelum dimunculkan pada layar monitor, memori yang digunakan untuk menampung proses sementara, disebut memori buffer. Memori buffer merupakan memori sementara untuk menampung proses yang belum saatnya dimunculkan pada layar monitor. kapasitas memori buffer disesuaikan dengan besar memori yang dibutuhkan dalam suatu proses.

0 Sumbu X 319

Sumbu Y

0	1	...					...	318	319
320	321	...					...	638	639
...	...							...	...
...	...							...	...
63680	63681	...					...	63998	63999

119

Gambar 2.9. Sistem alokasi pixel pada layar monitor VGA

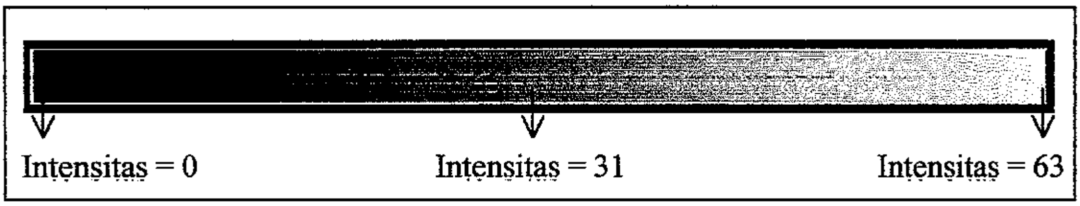
Pixel 0 terletak diposisi (0,0) , pixel 1 terletak di posisi (1,0), begitu seterusnya sampai pixel 63999 terletak di posisi (319,119) pada layar monitor VGA 320 x 200 pixel , 256 warna.

2.7.2. Aplikasi Warna pada VGA

Warna yang dihasilkan merupakan campuran warna primer RGB (Red, Green, Blue), dengan batasan intensitas setiap warna primer 0-63. Intensitas warna menunjukkan sifat warna dari yang paling gelap sampai yang paling terang. Daftar warna pada mode VGA berjumlah 256 dari kombinasi RGB, sedangkan jumlah warna maksimal yang dihasilkan adalah 262144 warna. Jumlah total warna berasal dari :

$$\text{Total warna} = R * G * B = 64 * 64 * 64 = 262144$$

Sistem pewarnaan ini berfungsi untuk memberikan warna pada obyek.



Gambar 2.10. Intensitas warna

2.8. Pemrograman Turbo Pascal untuk Grafik

Pemrograman untuk grafik pada tugas akhir ini digunakan bahasa pemrograman Turbo Pascal yang dibantu oleh rutin-rutin Assembler, yang berguna untuk mempercepat perhitungan-perhitungan matematis suatu program. Penggunaan suatu rutin Asemmbler pada pemrograman Turbo Pascal diawali dengan perintah ASM dan diakhiri dengan perintah END.

Program untuk grafik harus mampu menampung dan menjalankan ribuan *looping* dan pergerakan dalam setiap satuan waktu secara bersamaan. Unit grafik yang akan digunakan dalam penulisan ini adalah VGAGRAF.TPU, yang mampu menangani operasi grafik, penggerak obyek, dan manipulasi matematis yang lebih kompleks.

VGAGRAF.TPU merupakan pengembangan dari unit GRAPH.TPU yang merupakan salah satu unit grafik standar Turbo Pascal 7.0.

Agar proses animasi dapat berjalan maka layar monitor harus bersifat grafik VGA, layar monitor komputer pada awalnya bersifat mode teks sehingga harus diubah menjadi mode grafik VGA. Perpindahan dari mode layar yang berbasis teks (mode standar monitor pc) ke mode grafik dipergunakan perintah VGA256. Untuk menutup mode grafik dan kembali ke mode teks dipergunakan perintah TEXTMODE.