BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1 Matriks

Definisi 2.1

Sebuah matriks adalah susunan empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diapit oleh tanda [ ]. Bilangan-bilangan ini dinamakan elemen matriks. Secara umum matriks **A** dituliskan dengan $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, dimana i menyatakan baris dan j menyatakan kolom. Ukuran matriks disebut ordo.

Definisi 2.2

Matriks **A** dan **B** dikatakan sama jika mempunyai ordo yang sama dan elemen-elemen yang bersesuaian sama.

Contoh 1:

Tinjau matriks: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

Dari keempat matriks tersebut: $\mathbf{A=B}$, $\mathbf{A\neq C}$, $\mathbf{B\neq C}$, $\mathbf{A\neq D}$, $\mathbf{B\neq D}$, $\mathbf{D\neq C}$

Definisi 2.3

Jika **A** dan **B** matriks yang mempunyai ordo yang sama maka jumlahan **A+B** adalah suatu matriks **C** yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yamg bersesuaian dalam kedua matriks.

Contoh 2:

Jika **A**=$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ dan **B**=$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ maka:

A+B=C=$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 2 & 10\end{bmatrix}$

Definisi 2.4

Jika **A** suatu matriks m x n dan **B** adalah matriks n x r maka hasil kali **AB** didefinisikan sebagai matriks **C** berordo m x r yang elemen–elemennya dihitung dari **A,B** menurut rumus:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad ,i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,..,r$$

Contoh 4:

Diberikan matriks **A**=$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$ dan **B**=$\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ maka perkalian antara **A** dan **B** yaitu:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1)(-1)+(3)(2)+(2)(-1) & (1)(3)+(3)(5)+(2)(1)\\ (2)(-1)+(4)(2)+(1)(-1) & (2)(3)+(4)(5)+(1)(1)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3 & 20\\ 5 & 27\end{bmatrix}$$

Definisi 2.5

Jika **A** suatu matriks berordo n x m maka transpos dari matriks **A** ditulis dengan $\mathbf{A}^T$ didefinisikan sebagai matriks m x n yang kolom pertamanya adalah baris pertama matriks **A**, kolom kedua adalah baris kedua dari matriks **A** dan seterusnya.

Contoh 5:

Jika $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$ maka $\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

Definisi 2.6

Sebuah matriks bujur sangkar berordo n x n (selanjutnya disingkat persegi order n) disebut matriks simetris jika $a_{ij}=a_{ji}$, untuk i,j=1,2,…,n.

Contoh 6:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Definisi 2.7

Misal **A** adalah matriks persegi order n dan jika dapat dicari matriks **B** sedemikian sehingga **AB=BA=I** (dimana **I** adalah matriks persegi order n dengan elemen diagonal utamanya 1 dan elemen lainya 0) maka **B** dikatakan invers dari **A** dan ditulis $\mathbf{A}^{-1}$.

Contoh 7:

Diberikan matriks **A**=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ maka invers dari **A** yaitu $\mathbf{A}^{-1}$=$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

2.2 Ruang Vektor dan Vektor

Definisi 2.8

Kumpulan (collection) dari n bilangan riil yang disusun dalam urutan $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ atau dapat ditulis dengan simbol **X** dinamakan tuple-n terurut dan himpunan yang terdiri dari tuple-n dituliskan dengan R^n. Dalam bentuk matriks dituliskan dengan matriks kolom:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Definisi 2.9

Misal V adalah himpunan tidak kosong sedemikian sehingga jika $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z} \in V$ dan $a,b \in R$ memenuhi aksioma-aksioma:

-penjumlahan

i. $\mathbf{X}+\mathbf{Y} \in V$

ii. X+Y=Y+X

iii. (X+Y)+Z=X+(Y+Z)

iv. terdapat $\mathbf{0} \in V$; $\mathbf{X}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{X}$, untuk setiap $\mathbf{X} \in V$

v. terdapat $-\mathbf{X} \in V$ sedemikian sehingga $\mathbf{X}+(-\mathbf{X})=\mathbf{0}$

- perkalian

vi. $a\mathbf{X} \in V$

vii. $a(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=a\mathbf{X}+a\mathbf{Y}$

viii. $(a+b)\mathbf{X}=a\mathbf{X}+b\mathbf{X}$

ix. $(ab)\mathbf{X}=a(b\mathbf{X})$

x. $1\mathbf{X}=\mathbf{X}$

maka V disebut ruang vektor dan elemen-elemennya disebut vektor.

Definisi 2.10

Sebuah vektor $\mathbf{X}$ disebut kombinasi linier dari vektor-vektor $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_m$ jika vektor tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\mathbf{X}=k_1\mathbf{X}_1+k_2\mathbf{X}_2+\ldots+k_m\mathbf{X}_m$$

dengan $k_1,k_2,\ldots,k_m$ skalar.

Contoh 8:

Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{X}=(9,2,7)$ merupakan kombinasi linier dari vektor $\mathbf{X}_1=(1,2,-1)$, $\mathbf{X}_2=(6,4,2)$.

Penyelesaian:

Agar $\mathbf{X}$ merupakan kombinasi linier dari $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$ maka ada k_1,k_2 sehingga:

$$\mathbf{X}=k_1\mathbf{X}_1+k_2\mathbf{X}_2$$

$$\begin{bmatrix}9\\2\\7\end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}$$

atau:

$k_1+6k_2=9$

$2\ k_1+4\ k_2=2$

$-k_1+2\ k_2=7$

Dengan menyelesaikan sistim persamaan ini diperoleh $k_1= -3$,$k_2=2$. Jadi

$\mathbf{X}=-3\mathbf{X}_1+2\mathbf{X}_2$

Teorema 2.1

Jika **A** matriks bujur sangkar n x n yang mempunyai invers maka untuk setiap matriks **B** yang berordo n x 1, sistem persamaan **AX=B** mempunyai penyelesaian yang tunggal yaitu $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

Bukti:

Karena $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})=(\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1})=\mathbf{B}$ maka $\mathbf{X}= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ merupakan penyelasaian. Untuk membuktikan bahwa penyelesaiannya tunggal, misal $\mathbf{X}_1$ adalah sebarang penyelesaian dan selanjutnya dibuktikan $\mathbf{X}_1= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Jika $\mathbf{X}_1$ merupakan pemyelesaian maka $\mathbf{AX}_1=\mathbf{B}$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan $\mathbf{A}^{-1}$ diperoleh $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}_1)= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ atau $\mathbf{X}_1= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Definisi 2.11

Hasil kali dalam (inner product) $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ dari dua vektor $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathrm{R}^n$ didefinisikan sebagai $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dan memenuhi:

i. $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle$

ii. $\langle \mathbf{X} + \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \rangle ; \mathbf{Z} \in \mathrm{R}^n$

iii. $\langle a\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = a\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle ; a \in \mathrm{R}^n$

iv. $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle > 0, \text{jika} \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$; $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0, \text{jika} \mathbf{X} = \mathbf{0}$

Definisi 2.12

Misal R^n adalah himpunan tuple-n dari bilangan riil. Untuk setiap pasangan tuple-n $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathrm{R}^n$, misalkan didefinisikan:

i. jumlahan: $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathrm{R}^n$

ii. perkalian: $a\mathbf{X} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) \in \mathrm{R}^n, a \in \mathrm{R}$

iii. inner product: $\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^T = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \in R$

selanjutnya tuple-n disebut vektor dan R^n disebut ruang Euclidis

Definisi 2.13

Misal diberikan vektor-vektor, **X**,**Y**. Suatu bilangan riil $\|\mathbf{X}\|$ merupakan norm jika memenuhi:

i. $\|\mathbf{X}\| \geq 0, \|\mathbf{X}\| = 0$ jika dan hanya jika **X**=0

ii. $\|a\mathbf{X}\| = |a| \, \|\mathbf{X}\|$ untuk setiap $a \in R$ dan $\mathbf{X} \in R^n$

iii. $\|\mathbf{X}+\mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|$ untuk setiap $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in R^n$

Definisi 2.14

Jika V sebuah ruang hasil kali dalam ,maka norm Euclidis dari vektor **X**=($x_1, x_2, \ldots, x_n$) dinyatakan dengan $\|\mathbf{X}\|$, didefinisikan sebagai:

$$\|\mathbf{X}\| = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

Contoh 12:

Diberikan vektor **X**=(2,2,1) maka $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3$

Teorema 2.2 (ketaksamaan Cauchy-Schwars)

Jika **X,Y** vektor dalam R^n maka $|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| \leq \|\mathbf{X}\| \, \|\mathbf{Y}\|$

Bukti:

Jika $\mathbf{Y} = 0$ maka $|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| = 0 = \|\mathbf{X}\| \, \|\mathbf{Y}\|$

Jika $\mathbf{Y} \neq 0$ dan **X** bukan kelipatan dari **Y** maka **X**+t**Y** $\neq 0$, $\forall t$ sehingga

$$\|\mathbf{X} + t\mathbf{Y}\|^2 > 0, \forall t$$

karena $\|\mathbf{X} + t\mathbf{Y}\|^2 = \langle \mathbf{X} + t\mathbf{Y}, \mathbf{X} + t\mathbf{Y} \rangle > 0, \forall t$

atau $\|\mathbf{X}\|^2 + 2t|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}| + t^2\|\mathbf{Y}\|^2 > 0$

Jadi diskriminan bentuk kuadrat diatas negatif yaitu:

$$4|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}|^2 - 4\|\mathbf{X}\|^2\|\mathbf{Y}\|^2 < 0$$

sehingga :

$$|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}|^2 < \|\mathbf{X}\|^2\|\mathbf{Y}\|^2$$

atau $$|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}| < \|\mathbf{X}\|\,\|\mathbf{Y}\| \qquad (2.1)$$

Secara analog jika **Y** bukan kelipatan dari **X** maka diperoleh:

$$|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}| < \|\mathbf{X}\|\,\|\mathbf{Y}\| \qquad (2.2)$$

Selanjunya ditinjau untuk **X**=c**Y** maka:

$$|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}| = |c\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}| = |c(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y})|$$

$$= |c|\,\|\mathbf{Y}\|^2$$

$$= \|c\mathbf{Y}\|\,\|\mathbf{Y}\| \qquad (2.3)$$

Jadi dari (2.1) ,(2.2) dan (2.3) diperoleh $|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}| < \|\mathbf{X}\|\,\|\mathbf{Y}\|$

Contoh 13:

Pandang vektor $\mathbf{X}_1$=(-1,2,1) dan $\mathbf{X}_2$=(3,4,2) maka:

$|\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_2| = (-1)(3) + (2)(4) + (1)(2) = 7, \|\mathbf{X}_1\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$,

$\|\mathbf{X}_2\| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{29}$, sehingga $|\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_2| = 7 < \sqrt{174} = \|\mathbf{X}_1\|\|\mathbf{X}_2\|$.

2.3 Bentuk Kuadratik

Definisi 2.15

Suatu polinomial homogen

$$f(\mathbf{X}) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \ldots + c_{nn}x_n^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \ldots \quad c_{ij} \in R\,;\ \text{i,j=1,2,\ldots,n}$$

disebut bentuk kuadratik dalam n variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Jika c_{ii} disubstitusi dengan a_{ii} dan c_{ij} dengan $a_{ij} + a_{ji}$ dimana $a_{ij} = a_{ji} = 1/2c_{ij}$ maka bentuk kuadratik dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(\mathbf{X}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

dimana **A** adalah matriks simetris order n dan **X** vektor kolom.

Contoh 14:

$$f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$a_{11} = 2, a_{22} = 1, a_{33} = 1, a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}c_{12} = -2, a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2}c_{13} = 2, a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2}c_{23} = 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.16

Suatu bentuk kuadratik $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}$ dikatakan semidefinit positif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{AX} \geq 0$ untuk semua $\mathbf{X}$ dan ada $\mathbf{X} \neq 0$ sehingga $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}=0$ dan dikatakan definit positif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}>0$ untuk semua $\mathbf{X}$ dimana $\mathbf{X} \neq 0$. Suatu bentuk kuadratik dikatakan semidefinit negatif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{AX} \leq 0$ dan dikatakan definit negatif jika $\mathbf{X}^T\mathbf{AX}<0$ untuk semua $\mathbf{X}$ dengan $\mathbf{X} \neq 0$. Bentuk kuadratik yang tidak definit positif (semidefinit positif) atau definit negatif (semidefinit negatif) dikatakan indefinit.

Contoh 15:

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = (x_1 - x_2)^2 + 2x_3^2$ merupakan yang semidefinit positif, karena selalu bernilai positif untuk $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ dan ada $x_1 = x_2 \neq 0, x_3 = 0$ sehingga $f(\mathbf{X})$ bernilai nol.

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = -(x_1 - x_2)^2 - 3x_3^2$ merupakan bentuk kuadratik yang semidefinit negatif, karana selalu bernilai negatif untuk $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ dan ada $x_1 = x_2 \neq 0, x_3 = 0$ sehingga $f(\mathbf{X})$ bernilai nol.

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = -2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2$ merupakan bentuk kuadratik yang definit negatif karena selalu bernilai negatif untuk $x_1, x_2, x_3 \neq 0$.

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ merupakan bentuk kuadratik yang definit positif karena selalu bernilai positif untuk $x_1, x_2 \neq 0$.

Bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ merupakan bentuk kuadratik yang indefinit karena dapat bernilai positif dan juga negatif.

2.4 Ekstrim Fungsi

2.4.1 Fungsi berharga riil

Definisi 2.17

Jika untuk setiap vektor $\mathbf{X} \in R^n$ terdapat suatu bilangan riil $f(\mathbf{X})$ yang tunggal maka $f(\mathbf{X})$ dikatakan fungsi berharga riil dari **X**. Dinotasikan $f : \mathbf{X} \in R^n \to R$

Definisi 2.18

Suatu fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan kontinu pada $\mathbf{X}_0$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \delta$ berlaku $|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0)| < \varepsilon$ dimana

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2;\ \mathbf{X}_0, \mathbf{X} \in R^n$$

2.4.2 Derivatif parsial dan vektor gradien

Definisi 2.19

Misal $(\Delta x)_j^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad \delta x_j \quad \ldots \quad 0 \quad 0]$ vektor dalam R^n dengan semua komponennya nol kecuali yang ke-j yaitu δx_j. Derivatif parsial dari $f(\mathbf{X})$ terhadap komponen x_j dari **X** didefinisikan sebagai

$$\lim_{\delta x_j \to 0} \frac{f(\mathbf{X} + \Delta x_j) - f(\mathbf{X})}{\delta x_j}$$

dan dinotasikan dengan $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

Vektor yang komponen-komponennya terdiri dari n derivatif parsial dari $f(\mathbf{X})$ dikatakan gradien dari $f(\mathbf{X})$ atau dapat ditulis:

$$grad\, f = (\nabla f)^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.20

Jika $f(\mathbf{X})$ mempunyai derivatif parsial yang kontinu terhadap masing-masing variabelnya maka dikatakan diferensiabel.

2.4.3 Deret Tailor

Misal $f(\mathbf{X})$ fungsi berharga riil yang diferensiabel dua kali dalam R^n dan misal $\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X}$ adalah suatu titik persekitaran dari $\mathbf{X}$ dalam R^n dimana $(\Delta\mathbf{X})^T = [\delta x_1 \quad \delta x_2 \quad \ldots \quad \delta x_n]$ dan $(\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X})^T = [x_1+\delta x_1 \quad x_2+\delta x_2 \quad \ldots \quad x_n+\delta x_n]$

.Derat tailor untuk fungsi dari n variabel dapat ditulis

$$f(x_1+\delta x_1 \quad x_2+\delta x_2 \quad \ldots \quad x_n+\delta x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (\delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})$$
$$+ \frac{1}{2}(\delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n})^2 f + suku - suku\ sisa$$

Dalam bentuk vektor dapat ditulis dengan

$$f(\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + (\Delta\mathbf{X})^T \nabla f(\mathbf{X}) + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{X})^T \nabla^2 f(\mathbf{X})(\Delta\mathbf{X}) + suku\ sisa$$

Dari persamaan diatas dapat didefinisikan matriks Hessian n x n dari fungsi $f(\mathbf{X})$ yaitu:

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \nabla^2 f(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j} \right]; i, j = 1,2,\ldots,n$$

2.4.4 Nilai Ekstrim

Definisi 2.21

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan mempunyai nilai minimum lokal di $\mathbf{X}=\mathbf{X}^*$ jika terdapat persekitaran $N(\mathbf{X}^*,\delta)$ yang memuat $\mathbf{X}^*$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$, untuk semua $\mathbf{X}$ dalam persekitaran $N(\mathbf{X}^*,\delta)$.

Definisi 2.22

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan mempunyai minimum global di $\mathbf{X}=\mathbf{X}^*$ jika $f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}^*)$, untuk semua $\mathbf{X} \in R^n$

2.5 Fungsi konveks dan Konkaf

Definisi 2.23

Titik $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2;\ 0 \leq \lambda \leq 1$ dinamakan kombinasi linier konveks dari titik $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$.

Definisi 2.24

Himpunan $K \subseteq R^n$ dikatakan sebagai himpunan konveks jika setiap kombinasi linier konveks dari dua titik dalam K adalah anggota K. Dengan kata lain setiap titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ dan $\lambda \in R; 0 \le \lambda \le 1$ berlaku : $\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2 \in K$.

Definisi 2.25

Misalkan $K \subseteq R^n$ adalah himpunan konveks dan $f(\mathbf{X})$ terdefinisi pada K. Untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K, \lambda \in R; 0 \le \lambda \le 1$, $f(\mathbf{X})$ disebut fungsi konveks jika:

$$f(\mathbf{X}) = f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda))\mathbf{X}_2) \le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

Definisi 2.26

Misalkan $K \subseteq R^n$ adalah himpunan konveks dan $f(\mathbf{X})$ terdefinisi pada K. Untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K, \lambda \in R; 0 \le \lambda \le 1$, $f(\mathbf{X})$ disebut fungsi konkaf jika:

$$f(\mathbf{X}) = f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \ge \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

Definisi 2.27

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan konveks seksama jika:

$$f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) < \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

Definisi 2.28

Fungsi $f(\mathbf{X})$ dikatakan konkaf seksama jika:

$$f(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) > \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

Teorema 2.6

Diberikan $\mathbf{X} \in K$ dan bentuk kuadratik $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$. Jika $f(\mathbf{X})$ semidefinit positif maka $f(\mathbf{X})$ fungsi konveks.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa : $f(\mathbf{X}) \le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$

Ambil sebarang dua titik $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ sehingga $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2$, $0 \le \lambda \le 1$

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}) = \lambda\mathbf{X}_1^T\mathbf{A}\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T\mathbf{A}\mathbf{X}_2 -$$

$$\{\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2\}^T \mathbf{A} \{\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T\}$$

$$= \lambda\mathbf{X}_1^T\mathbf{A}\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2^T\mathbf{A}\mathbf{X}_2$$

$$- \lambda^2\mathbf{X}_1^T\mathbf{A}\mathbf{X}_1 - 2\lambda(1-\lambda)\mathbf{X}_1^T\mathbf{A}\mathbf{X}_2 - (1-\lambda)^2\mathbf{X}_2^T\mathbf{A}\mathbf{X}_2$$

$$= \lambda(1-\lambda)\{\mathbf{X}_1^T\mathbf{A}\mathbf{X}_1 - 2\mathbf{X}_1^T\mathbf{A}\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2^T\mathbf{A}\mathbf{X}_2\}$$

$$= \lambda(1-\lambda)(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)^T \mathbf{A}(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1) \quad 0 \le \lambda \le 1$$

karena $\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ sebarang vektor dan $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} \ge 0$ maka

$$\lambda(1-\lambda)(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)^T \mathbf{A}(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1) \ge 0$$

Jadi $\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}) \ge 0$ atau $\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \ge f(\mathbf{X})$

Teorema 2.7

Fungsi $f(\mathbf{X})$ konveks pada himpunan konveks K jika dan hanya jika untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ berlaku:

$$f(\mathbf{X}_1) \ge f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Bukti

(→)

Misal $f(\mathbf{X})$ konveks pada K maka dari definisi (2.25) diperoleh:

$$f(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \qquad (2.5.1)$$

Persamaan (2.5.1) untuk $\lambda > 0$ dapat ditulis:

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \ge \left\{ \frac{f(\mathbf{X}_2 + \lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)) - f(\mathbf{X}_2)}{\lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)} \right\} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Dengan mendefinisikan $\Delta\mathbf{X} = \lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$ maka didapat:

$$f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_2)\geq\left\{\frac{f(\mathbf{X}_2+\Delta\mathbf{X})-f(\mathbf{X}_2)}{\Delta\mathbf{X}}\right\}(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)$$

Dengan mengambil $\Delta\mathbf{X}\to 0$ maka:

$$f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_2)\geq\nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)$$

Atau $f(\mathbf{X}_1)\geq f(\mathbf{X}_2)(+\nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)$

($\Leftarrow$)

Diketahui $f(\mathbf{X}_1)\geq f(\mathbf{X}_2)+\nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)$ akan ditunjukkan bahwa $f(\mathbf{X})$ konveks.

Untuk $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2\in K\ dan\ 0\leq\lambda\leq 1$ misalkan

$\mathbf{X}_3=\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2,\quad \mathbf{X}_3\in K$ maka:

$$f(\mathbf{X}_2)-f(\mathbf{X}_3)\geq\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_3) \tag{2.5.2}$$

dan $f(\mathbf{X}_1)-f(\mathbf{X}_3)\geq\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_3)$ (2.5.3)

Dengan mengalikan persaman (2.5.2) dengan $(1-\lambda)$ dan persamaan (2.5.3) dengan λ dan dijumlahkan maka diperoleh:

$$(1-\lambda)[f(\mathbf{X}_2)-f(\mathbf{X}_3)]+\lambda f(\mathbf{X}_1)-\lambda f(\mathbf{X}_3)\geq$$

$$(1-\lambda)\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_3)+\lambda\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_3)$$

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_3) - \lambda f(\mathbf{X}_2) + \lambda f(\mathbf{X}_3) + \lambda f(\mathbf{X}_1) - \lambda f(\mathbf{X}_3) \geq$$

$$\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3 - \lambda\mathbf{X}_2 + \lambda\mathbf{X}_3 + \lambda\mathbf{X}_1 - \lambda\mathbf{X}_3)$$

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f(\mathbf{X}_3) + (\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2)\nabla f^T(\mathbf{X}_3) - \mathbf{X}_3\nabla f^T(\mathbf{X}_3)$$

$$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f(\mathbf{X}_3) + \mathbf{X}_3\nabla f^T(\mathbf{X}_3) - \mathbf{X}_3\nabla f^T(\mathbf{X}_3)$$

$\lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \geq f(\mathbf{X}_3)$ atau

$$f(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \leq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2)$$

Jadi $f(\mathbf{X})$ konveks.

Teorema 2.8

Fungsi $f(\mathbf{X})$ konkaf pada himpunan konveks K jika dan hanya jika untuk setiap $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ berlaku

$$f(\mathbf{X}_1) \leq f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Bukti:

(→)

Misal $f(\mathbf{X})$ konkaf pada K maka dari definisi (2.26) diperoleh:

$$f(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \geq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}_2) \qquad (2.5.4)$$

Persamaan (2.5.4) untuk $\lambda > 0$ dapat ditulis:

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \leq \left\{ \frac{f(\mathbf{X}_2 + \lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)) - f(\mathbf{X}_2)}{\lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)} \right\} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Dengan mendefinisikan $\Delta\mathbf{X} = \lambda(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$ maka didapat:

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \leq \left\{ \frac{f(\mathbf{X}_2 + \Delta\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_2)}{\Delta\mathbf{X}} \right\} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Dengan mengambil $\Delta\mathbf{X} \to 0$ maka:

$$f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_2) \leq \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Atau $f(\mathbf{X}_1) \leq f(\mathbf{X}_2)(+\nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$

($\leftarrow$)

$f(\mathbf{X}_1) \leq f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$ akan ditunjukkan bahwa $f(\mathbf{X})$ konkaf.

Untuk $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ *dan* $0 \leq \lambda \leq 1$ misalkan

$\mathbf{X}_3 = \lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2, \quad \mathbf{X}_3 \in K$ maka:

$$f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_3) \leq \nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3) \qquad (2.5.5)$$

dan $f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{X}_3) \leq \nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3)$ (2.5.6)

Dengan mengalikan persaman (2.5.5) dengan $(1-\lambda)$ dan persamaan (2.5.6) dengan λ dan dijumlahkan maka diperoleh:

$$(1-\lambda)[f(\mathbf{X}_2)-f(\mathbf{X}_3)]+\lambda f(\mathbf{X}_1)-\lambda f(\mathbf{X}_3)\leq$$

$$(1-\lambda)\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_3)+\lambda\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_3)$$

$$f(\mathbf{X}_2)-f(\mathbf{X}_3)-\lambda f(\mathbf{X}_2)+\lambda f(\mathbf{X}_3)+\lambda f(\mathbf{X}_1)-\lambda f(\mathbf{X}_3)\leq$$

$$\nabla f^T(\mathbf{X}_3)(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_3-\lambda\mathbf{X}_2+\lambda\mathbf{X}_3+\lambda\mathbf{X}_1-\lambda\mathbf{X}_3)$$

$$\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)\leq f(\mathbf{X}_3)+(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)\nabla f^T(\mathbf{X}_3)-\mathbf{X}_3\nabla f^T(\mathbf{X}_3)$$

$$\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)\leq f(\mathbf{X}_3)+\mathbf{X}_3\nabla f^T(\mathbf{X}_3)-\mathbf{X}_3\nabla f^T(\mathbf{X}_3)$$

$$\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)\leq f(\mathbf{X}_3) \quad \text{atau}$$

$$f(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)\geq\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)$$

Jadi $f(\mathbf{X})$ konkaf.

Teorema 2.9

Fungsi $f(\mathbf{X})$ konveks pada himpunan konveks K jika dan hanya jika :

$$H(\mathbf{X})=\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i\partial x_j}\right] \text{ semidefinit positif}$$

Bukti

(←)

Misalkan $H(\mathbf{X}) = \left[\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ adalah semidefinit positif pada K, akan dibuktikan bahwa $f(\mathbf{X})$ konveks pada K yaitu memenuhi persamaan

$$f(\mathbf{X}_1) \geq f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2), \quad \forall \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$$

Dengan menggunakan deret tailor diperoleh:

$$f(\mathbf{X}^* + h) = f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^* + \theta h} \qquad (2.5.7)$$

dimana $0 < \theta < 1$

Dengan mengambil $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_2, \mathbf{X}^* + h = \mathbf{X}_1$ *dan* $h = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ sebarang maka persamaan (2.5.7) menjadi:

$$f(\mathbf{X}_1) = f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T H(\mathbf{X}_2 + \theta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Diketahui $H(\mathbf{X}_2 + \theta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))$ semidefinit positif.

Karena $\mathbf{X}_2 + \theta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \in K$, $0 < \theta < 1$ jadi diperoleh:

$$f(\mathbf{X}_1) \geq f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

atau $f(\mathbf{X})$ konveks.

($\rightarrow$)

Ambil sebarang $\mathbf{X}_0 \in K$ akan dibuktikan bahwa H($\mathbf{X}_0$) semidefinit positif.

Untuk sebarang $\mathbf{X} \in K$ dari persamaan tailor diperoleh:

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_0) + \nabla f^T(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

dengan $0 < \theta < 1$

atau $f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0) - \nabla f^T(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) =$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

Karena $f(\mathbf{X})$ konveks pada K maka berlaku:

$$f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}_0) + \nabla f^T(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

Jadi $\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \geq 0$

atau $(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \geq 0$

Karena ini berlaku untuk setiap $\mathbf{X} \in K$ maka $H(\mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))$ semidefinit positif. Kusus $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0, H(\mathbf{X}_0)$ semidefinit positif. Karena $\mathbf{X}_0 \in K$ sebarang maka H($\mathbf{X}$) semidefinit positif.

Teorema 3.0

Fungsi $f(\mathbf{X})$ konkaf pada himpunan konveks K jika dan hanya jika :

$$H(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right] \text{ semidefinit negatif}$$

Bukti

($\leftarrow$)

Misalkan $H(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ adalah semidefinit negatif pada K, akan dibuktikan

bahwa $f(\mathbf{X})$ konkaf pada K yaitu memenuhi persamaan

$$f(\mathbf{X}_1) \le f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2), \quad \forall \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$$

Dengan menggunakan deret tailor diperoleh:

$$f(\mathbf{X}^* + h) = f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*+\theta h} \qquad (2.5.8)$$

dimana $0 < \theta < 1$

Dengan mengambil $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_2, \mathbf{X}^* + h = \mathbf{X}_1 \quad dan \quad h = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in K$ sebarang maka persamaan (2.5.8) menjadi:

$$f(\mathbf{X}_1) = f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^T H(\mathbf{X}_2 + \theta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

Diketahui $H(\mathbf{X}_2 + \theta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2))$ semidefinit negatif.

Karena $\mathbf{X}_2 + \theta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) \in K$, $0 < \theta < 1$ jadi diperoleh:

$$f(\mathbf{X}_1) \leq f(\mathbf{X}_2) + \nabla f^T(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$$

atau $f(\mathbf{X})$ konkaf.

(→)

Ambil sebarang $\mathbf{X}_0 \in K$ akan dibuktikan bahwa $H(\mathbf{X}_0)$ semidefinit negatif.

Untuk sebarang $\mathbf{X} \in K$ dari persamaan tailor diperoleh:

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_0) + \nabla f^T(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

dengan $0 < \theta < 1$

atau $f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0) - \nabla f^T(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) =$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0 + \theta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0))(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

Karena $f(\mathbf{X})$ konkaf pada K maka berlaku:

$$f(\mathbf{X}) \leq f(\mathbf{X}_0) + \nabla f^T(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

Jadi $\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0+\theta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0))(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) \leq 0$

atau $(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T H(\mathbf{X}_0+\theta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0))(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) \leq 0$

Karena ini berlaku untuk setiap $\mathbf{X} \in K$ maka $H(\mathbf{X}_0+\theta(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0))$ semedefinit negatif. Kusus $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0$, $H(\mathbf{X}_0)$ semidefinit negatif . Karena $\mathbf{X}_0 \in K$ sebarang maka H($\mathbf{X}$) semidefinit negatif.

Teorema 3.1

Fungsi $f(\mathbf{X})$ konveks pada K jika dan hanya jika $-f(\mathbf{X})$ konkaf pada K.

Bukti

Dari hubungan $\left[\frac{\partial^2(-f(\mathbf{X}))}{\partial x_i \partial x_j}\right] = -\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]$

Ini diperoleh bahwa $\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ semidefinit positif jika dan hanya jika

$\left[\frac{\partial^2(-f(\mathbf{X}))}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ semidefinit negatif.

Jadi $f(\mathbf{X})$ konveks jika hanya jika - $f(\mathbf{X})$ konkaf

Teorema 3.2

Misalkan $f(\mathbf{X})$ konveks dan $f(\mathbf{X})<0$ maka $\dfrac{1}{f(\mathbf{X})}$ konkaf pada K.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa matriks Hessian dari $\dfrac{1}{f(\mathbf{X})}$ adalah semidefinit negatif.

$$\mathrm{H}(\mathbf{X})=\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f^{-1}(\mathbf{X})\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-f^{-2}(\mathbf{X})\frac{\partial f\ (\mathbf{X})}{\partial x_j}\right]$$

$$=\left[-f^{-2}(\mathbf{X})\frac{\partial^2 f\ (\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]+\left[2f^{-3}(\mathbf{X})\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i}\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right]$$

$$=-\frac{1}{f^2(\mathbf{X})}\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]+\frac{2}{f^3(\mathbf{X})}\left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i}\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right]$$

$$=-\frac{1}{f^2(\mathbf{X})}M(\mathbf{X})+\frac{2}{f^3(\mathbf{X})}N(\mathbf{X})$$

dimana

$$\mathrm{M}(\mathbf{X})=\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

dan

$$\mathrm{N}(\mathbf{X})=\left\lfloor \nabla f(\mathbf{X})\nabla f^T(\mathbf{X})\right\rfloor$$

Karena $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konvek maka matrik M akan semidefinit positif.

Selanjutnya untuk suatu vektor Q kita peroleh

$$Q^T NQ = [Q^T \nabla f(\mathbf{X})][\nabla f^T(\mathbf{X})Q] = R^2 \geq 0$$

dimana R adalah skalar yang diberikan dengan

$$R = Q^T \nabla f(\mathbf{X})$$

Karena $f(\mathbf{X})<0$ maka $f^3(\mathbf{X})<0$ sehingga H(**X**) merupakan jumlah dari semidefinit negatif matriks yang juga H(**X**) akan semedefinit negatif. Jadi $\frac{1}{f(\mathbf{X})}$ konkaf

Catatan : jika $f(\mathbf{X})>0$ dan $f(\mathbf{X})$ konveks pada K maka $\frac{1}{f(\mathbf{X})}$ belum tentu konkaf.

Contoh: $f(x) = x^2$ pada $[1,\infty)$ adalah konveks

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ pada $[1,\infty)$ adalah konveks bukan konkaf.

Teorema 3.3

Misalkan $f(\mathbf{X})$ konkaf dan $f(\mathbf{X})>0$ maka $\frac{1}{f(\mathbf{X})}$ konveks pada K.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa matriks Hessian dari $\frac{1}{f(\mathbf{X})}$ adalah semidefinit positif.

$$\mathrm{H}(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f^{-1}(\mathbf{X})\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-f^{-2}(\mathbf{X})\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right]$$

$$=\left[-f^{-2}(\mathbf{X})\frac{\partial^2 f\ (\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]+\left[2f^{-3}(\mathbf{X})\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i}\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right]$$

$$=-\frac{1}{f^2(\mathbf{X})}\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]+\frac{2}{f^3(\mathbf{X})}\left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i}\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right]$$

$$=-\frac{1}{f^2(\mathbf{X})}M(\mathbf{X})+\frac{2}{f^3(\mathbf{X})}N(\mathbf{X})$$

dimana

$$\mathrm{M}(\mathbf{X})=\left[\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

dan

$$\mathrm{N}(\mathbf{X})=\left[\nabla f(\mathbf{X})\nabla f^T(\mathbf{X})\right]$$

Karena $f(\mathbf{X})$ adalah fungsi konkaf maka matrik M akan semidefinit negatif.

Untuk suatu vektor Q kita peroleh

$$Q^T NQ=[Q^T\nabla f(\mathbf{X})][\nabla f^T(\mathbf{X})Q]=R^2\geq 0$$

dimana R adalah skalar yang diberikan dengan

$$R=Q^T\nabla f(\mathbf{X})$$

Karena $f(\mathbf{X})$>0 maka $f^3(\mathbf{X})>0$ sehingga H($\mathbf{X}$) merupakan jumlah dari semidefinit positif matriks yang juga H($\mathbf{X}$) akan semidefinit positif. Jadi $\frac{1}{f(\mathbf{X})}$ akan konveks.

Catatan: Jika $f(\mathbf{X})$ konkaf dan $f(\mathbf{X})$ <0 maka $\frac{1}{f(\mathbf{X})}$ belum tentu konveks.

Contoh: $f(x) = -x^2$ pada $[1,\infty)$ adalah konkaf

$g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ pada $[1,\infty)$ adalah konkaf bukan konveks

Teorema 3.4

Jika : a. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ konveks pada himpunan konveks K, maka

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i,\ \alpha_i > 0$ adalah konveks pada K.

b. Jika salah satu dari f konveks seksama pada K maka

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i,\ \alpha_i > 0$ konveks seksama pada K.

Bukti

a. Misalkan:

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\mathbf{X}) \qquad \text{dengan } \alpha_i > 0$$

Karena $f_i(\mathbf{X})$ adalah konvek maka:

$$f_i[(1-\lambda)\mathbf{X}_2 + \lambda\mathbf{X}_1] \le (1-\lambda) f_i(\mathbf{X}_2) + \lambda f_i(\mathbf{X}_1)$$

untuk $0 \le \lambda \le 1$ dan untuk dua titik $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$ maka

$$F[(1-\lambda)\mathbf{X}_2 + \lambda\mathbf{X}_1] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i[1-\lambda)\mathbf{X}_2 + \lambda\mathbf{X}_1]$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i (1-\lambda) f_i(\mathbf{X}_2) + \alpha_i \lambda f_i(\mathbf{X}_1)]$$

$$\le (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\mathbf{X}_2)\right] + \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\mathbf{X}_1)\right]$$

$$\leq (1-\lambda)F(\mathbf{X}_2) + \lambda F(\mathbf{X}_1)$$

Ini menunjukan bahwa F(**X**) adalah juga konvek.

b. Misal

f_1 konveks seksama maka :

$$\alpha_1 f_1(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) < \lambda(\alpha_1 f_1)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_1 f_1)(\mathbf{X}_2)$$

f_2 konveks maka:

$$\alpha_2 f_2(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \leq \lambda(\alpha_2 f_2)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_2 f_2)(\mathbf{X}_2)$$

.

.

.

f_n konveks maka:

$$\alpha_n f_n(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) \leq \lambda(\alpha_n f_n)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_n f_n)(\mathbf{X}_2)$$

Akan dibuktikan $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i,\ \alpha_i > 0$ konveks seksama

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n)(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2)$$

$$= \alpha_1 f_1(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) + \alpha_2 f_2(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) + \ldots +$$

$$\alpha_n f_n(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) < \lambda(\alpha_1 f_1)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_1 f_1)(\mathbf{X}_2)$$

$$+ \lambda(\alpha_2 f_2)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_2 f_2)(\mathbf{X}_2) + \ldots +$$

$$\lambda(\alpha_n f_n)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_n f_n)(\mathbf{X}_2)$$

$$= \lambda(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n)(\mathbf{X}_2)$$

Jadi

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n)(\lambda\mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}_2) <$$

$$\lambda(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n)(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda)(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n)(\mathbf{X}_2)$$

Atau

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i,\ \alpha_i > 0 \text{ konveks seksama}$$

Theorema 3.5

Misal $K \subseteq R^n$ merupakan himpunan konveks, $\mathbf{X} \in K$ dan fungsi konveks. Jika $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum lokal maka sekaligus merupakan minimum global.

Bukti:

Misal $f(\mathbf{X})$ mempunyai minimum lokal di $\mathbf{X}^*$ dan $\mathbf{X}_1 \in K$ maka untuk suatu $\delta > 0$ dapat dipilih λ dimana $0 < \lambda < 1$ sedemikian sehingga $\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}^*$ terletak pada persekitaran $N(\mathbf{X}^*, \delta)$.

Dari definisi (2.24) maka:

$$f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X})$$

$$\le f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1-\lambda)\mathbf{X}^*)$$

$$\le \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{X}^*) \quad \text{(karena } f(\mathbf{X}) \text{ fungsi konveks)}$$

$$\lambda f(\mathbf{X}^*) \le \lambda f(\mathbf{X}_1)$$

karena $\lambda > 0$ sehingga $f(\mathbf{X}^*) \le f(\mathbf{X}_1)$

Jadi menurut definisi (2.25), $\mathbf{X}^*$ merupakan minimum global dari $f(\mathbf{X})$.