BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 GRAPH BERARAH

2.1.1 Beberapa Pengertian pada Graph Berarah

Definisi 2.1

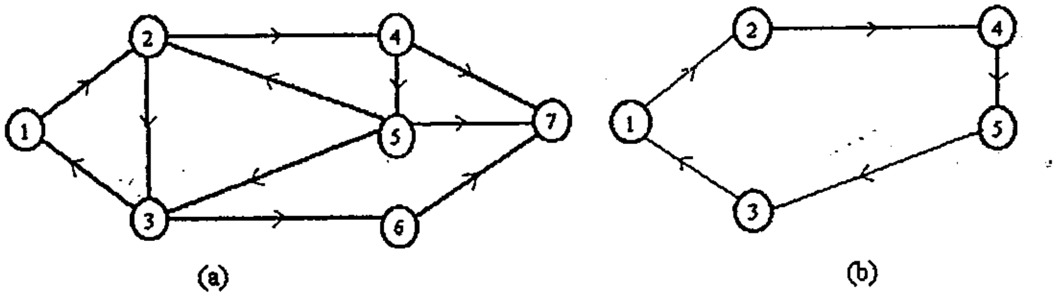
Graph berarah G dinotasikan dengan $G(V,E)$ terdiri dari himpunan titik V dan himpunan garis E yang merupakan pasangan berurutan (x,y) dimana $(x,y) \in E$.

Selanjutnya x disebut titik awal dan y disebut titik akhir dari garis (x,y). Arah dari suatu garis(x,y) ditunjukkan dengan tanda panah pada garis tersebut.

Definisi 2.2

Graph g dikatakan sebagai subgraph dari graph G jika seluruh titik dan garisnya berada dalam G.

Contoh 2.1



Gambar 2.1. (a) Suatu penyajian graph berarah dengan V={1,2,3,4,5,6,7} dan E={(1,2), (2,4),(2,3), (3,1), (3,6), (4,5), (4,7), (5,2), (5,3), (5,7), (6,7)}.
(b) Salah satu subgraph dari graph pada gambar (a)

Definisi 2.3

Path dari graph berarah G (V, E) adalah suatu subgraph dari graph berarah G (V,E) yang terdiri dari barisan titik dan garis $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - \ldots - v_{r\text{-}1} - e_{r\text{-}1} - v_r$ tanpa pengulangan titik.

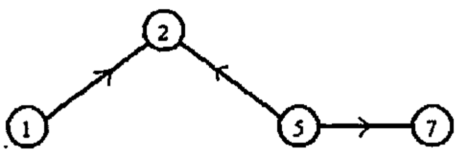
Untuk setiap $1 \leq k \leq r\text{-}1$, $e_k = (v_k , v_{k+1}) \in E$ disebut garis maju, dan

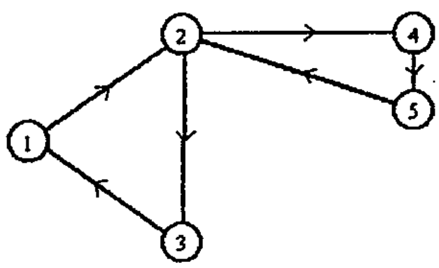
$e_k = (v_{k+1,} v_k) \in E$ disebut garis balik.

Jika $v_1 = v_r$, maka disebut path tertutup atau *cycle*, dan jika $v_1 \neq v_r$, maka disebut path terbuka.

Contoh 2.2

Subgraph pada gambar 2.2 (a), yaitu 1–(1,2)–2–(2,5)–5–(5,7) adalah salah satu path dari graph pada gambar 2.1(a). Tetapi subgraph pada gambar 2.2(b), yaitu 1–(1,2)–2–(2,4)–4–(4,5)–5–(5,2)–2–(2,3)–3–(3,1)–1 bukan patah karena titik 2 diulang dua kali.





Gambar 2.2 (a) Salah satu path dari graph pada gambar (a)
(b) Salah satu subgraph yang bukan path

2.1.2 Beberapa Operasi pada Graph Berarah

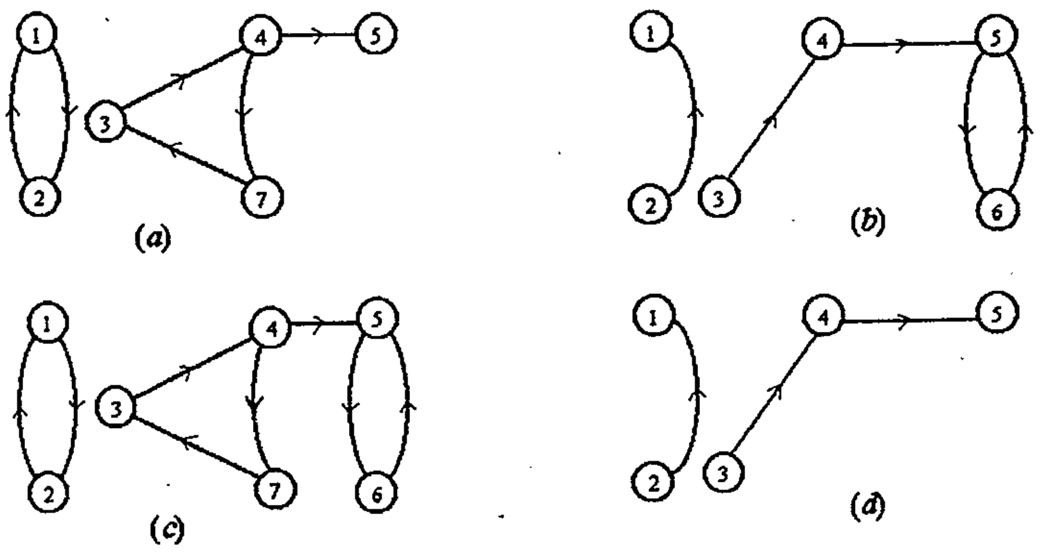
Definisi 2.4

Gabungan dari dua graph $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graph G_3 yang ditulis sebagai $G_3 = G_1 \cup G_2$ dengan himpunan titiknya $V_3 = V_1 \cup V_2$ dan himpunan garisnya $E_3 = E_1 \cup E_2$.

Definisi 2.5

Irisan dari dua graph $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah suatu graph G_4, ditulis dengan $G_4 = G_1 \cap G_2$ dimana himpunan titiknya $V_4 = V_1 \cap V_2$ dan himpunan garisnya $E_4 = E_1 \cap E_2$

Contoh 2.3



Gambar 2.3 (*a*) dan (*b*) Graph berarah G_1 dan G_2
(*c*) Graph G_3 yang merupakan union (gabungan) dari graph G_1 dan G_2 atau $G_3 = G_1 \cup G_2$
(*d*) Graph G_4 yang merupakan intersection (irisan) dari graph G_1 dan G_2 atau $G_4 = G_1 \cap G_2$

2.1.3 Sifat-sifat Operasi pada Graph Berarah

1. $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$
2. $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$
3. $G \cup G = G \cap G = G$

2.2 JARINGAN

Jaringan $G(V, E, c, f)$ merupakan suatu graph berarah dengan himpunan titik V, himpunan garis E, dimana masing-masing garis $(x, y) \in E$ mempunyai kapasitas garis $c(x, y)$ dan nilai aliran $f(x, y)$.

Kapasitas garis pada jaringan $G(V, E, c, f)$ merupakan suatu fungsi c dari himpunan garis E ke bilangan riil tidak negatif, dan nilai aliran pada jaringan $G(V, E, c, f)$ adalah suatu fungsi f dari himpunan garis E ke bilangan riil tidak negatif.

Pada penyajian jaringan $G(V, E, c, f)$, nilai fungsi c dan f secara berurutan akan disajikan sebagai pasangan bilangan pada garis tersebut.

2.2.1 Aliran dalam Jaringan

Definisi 2.6

Suatu pola aliran $\{f(x, y)\}$ dikatakan fisibel dalam $G(V, E, c, f)$ dan mempunyai nilai aliran f_{st} dari titik sumber s ke titik terminal t jika untuk setiap $x \in V$ terpenuhi :

$$\sum_{y} f(x,y) - \sum_{y} f(y,x) = f_{st}, \qquad x = s \tag{2.1a}$$

$$= 0, \qquad x \neq s,t \tag{2.1b}$$

$$= -f_{st}, \qquad x = t \tag{2.1c}$$

$$c(x,y) \geq f(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in E, \tag{2.2}$$

Persamaan (2.1*b*) di atas disebut *persamaan konservasi aliran*.

Titik-titik di antara s dan t disebut titik perantara.

Garis (x, y) pada jaringan $G\,(V, E, c, f)$ dikatakan mempunyai aliran jenuh jika:

$$f(x,y) = c(x,y) \tag{2.3}$$

dan dikatakan tidak mempunyai aliran jika:

$$f(x,y) = 0 \tag{2.4}$$

Definisi 2.7

Pada jaringan $G\,(V, E, c, f)$, jika X dan Y sebagai subset tidak kosong dari V, maka didefinisikan:

$$(X,Y) = \{(x,y) \in E \mid x \in X, y \in Y\} \tag{2.5}$$

Definisi 2.8

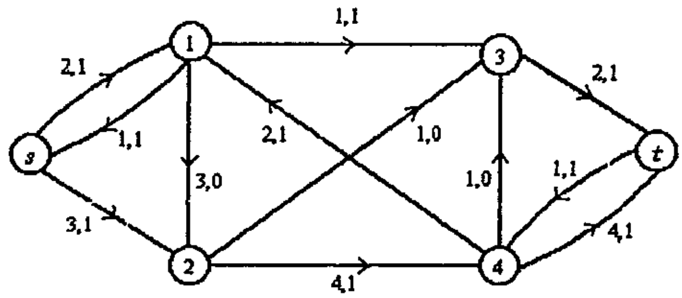
Nilai fungsi aliran f dan kapasitas c dari suatu himpunan garis (X, Y) pada jaringan $G\,(V, E, c, f)$ didefinisikan :

$$f(X,Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} f(x,y) \tag{2.6}$$

$$c(X,Y) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)} c(x,y) \tag{2.7}$$

Contoh 2.4

Diberikan jaringan $G\,(V, E, c, f)$ sebagai berikut:



Gambar 2.4 Suatu jaringan $G\,(V, E, c, f)$ dengan s adalah titik sumber dan t adalah titik terminal, dan titik-titik 1,2,3,4 adalah titik perantara.

diperoleh:

$$c(s,1)=2 \qquad c(1,s)=1 \qquad c(s,2)=3 \qquad c(3,t)=2$$

$$c(1,2)=3 \qquad c(1,3)=1 \qquad c(2,3)=1 \qquad c(4,t)=4$$

$$c(2,4)=4 \qquad c(4,1)=2 \qquad c(4,3)=1 \qquad c(t,4)=1 \tag{2.8}$$

dan

$$f(s,1)=1 \qquad f(1,s)=1 \qquad f(s,2)=1 \qquad f(3,t)=1$$

$$f(1,2)=0 \qquad f(1,3)=1 \qquad f(2,3)=0 \qquad f(4,t)=1$$

$$f(2,4)=1 \qquad f(4,1)=1 \qquad f(4,3)=0 \qquad f(t,4)=1 \tag{2.9}$$

Akan dihitung $f(X,Y)$ dan $c(X,Y)$ dalam jaringan tersebut untuk:

(i) $X=\{s,1,2\}$ dan $Y=\{3,4,t\}$

(ii) $X=\{3,4,t)$ dan $Y=\{s,1,2\}$

Penyelesaian:

(i) Untuk $X=\{s,1,2\}$ dan $Y=\{3,4,t\}$, diperoleh:

$$(X,Y)=\{(1,3),(2,3),(2,4)\} \tag{2.10}$$

$$f(X,Y) = f\{(1,3), (2,3), (2,4)\}$$
$$= f(1,3) + f(2,3) + f(2,4)$$
$$= 1 + 0 + 1 = 2 \quad (2.11a)$$

$$c(X,Y) = c\{(1,3), (2,3), (2,4)\}$$
$$= c(1,3) + c(2,3) + c(2,4)$$
$$= 1 + 1 + 4 = 6 \quad (2.11b)$$

(ii) Untuk $X = \{3,4,t\}$ dan $Y = \{s,1,2\}$, diperoleh:

$$(X,Y) = \{(4,1)\} \quad (2.12)$$

$$f(X,Y) = f(4,1) = 1 \quad (2.13a)$$

$$c(X,Y) = c(4,1) = 2 \quad (2.13b)$$

2.2.2 Potongan-potongan *s-t*

Definisi 2.9

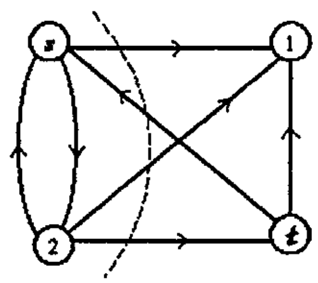
Potongan dari s ke t (*s-t cut*) pada jaringan $G(V, E, c, f)$ adalah himpunan garis $(X, \overline{X})$ dengan $s \in X$ dan $t \in \overline{X}$ dimana X subset dari V dan $\overline{X} = V - X$.

Definisi 2.10

Himpunan potong dari s ke t (*s-t cutset*) pada jaringan $G(V, E, c, f)$ adalah minimal himpunan garis $(X, \overline{X})$ dengan $s \in X$ dan $t \in \overline{X}$ dimana X subset dari V dan $\overline{X} = V - X$., dan jika dihapus akan mematahkan semua path berarah dari s ke t.

Dari definisi 2.9 dan definisi 2.10, dapat dikatakan bahwa suatu s-t cut belum tentu merupakan suatu s-t cutset, tetapi setiap s-t cutset pasti merupakan s-t cut.

Diambil contoh pada suatu jaringan $G(V, E, c, f)$ pada gambar berikut :



Gambar 2.5 Suatu graph berarah.

Untuk $X = \{s,2\}$ dan $\overline{X} = \{1, t\}$, maka $(X, \overline{X}) = \{(s,1),(2,1),(2,t)\}$ adalah s-t cut dan $\{(2,t)\}$ adalah s-t cutset karena penghapusan $(2, t)$ akan mematahkan semua path berarah dari s ke t.

Kemudian diambil Q sebagai suatu s-t cutset pada jaringan $G(V, E, c, f)$, dan definisikan subset X pada V sebagai berikut:

1. $s \in X$

2. Jika $x \in X$ dan $(x, y) \in E$-Q, maka $y \in X$

Sehingga $t \in \overline{X} = V - X$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap garis $(x, y) \in (X, \overline{X})$, terdapat suatu garis $(x, y) \in (X, \overline{X})$ yang berada dalam Q.

Andai setiap garis (x,y) tidak berada dalam Q, maka dalam E-Q terdapat path berarah dari s ke y terbentuk oleh path berarah dari s ke x kemudian melalui (x, y).

Mengakibatkan $y \in X$, terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa $y \in \overline{X}$. Sebaliknya, jika terdapat garis $(x,y) \in Q$ yang tidak berada dalam $(X, \overline{X})$, maka Q bukan *s-t* cutset.

Definisi 2.11

Kapasitas pada suatu *s-t* cut $(X, \overline{X})$ dalam jaringan $G\,(V, E, c, f)$ didefinisikan:

$$c(X, \overline{X}) = \sum_{(x,y) \in (X, \overline{X})} c(x, y) \tag{2.14}$$

Minimum *s-t* cut ($C_{\min}$) adalah suatu potongan *s-t* dengan kapasitas minimum dari semua *s-t* cut:

$$c(C_{\min}) = \min_i \{c(X_i, \overline{X}_i)\} \tag{2.15}$$

dimana $(X_i, \overline{X}_i)$ adalah *s-t* cut pada G.

Definisi 2.12

Kapasitas suatu *s-t* cutset Q dalam G didefinisikan dengan:

$$c(Q) = \sum_{(x,y) \in Q} c(x, y) \tag{2.16}$$

Minimum *s-t* cutset Q_{min} adalah suatu *s-t* cutset dengan kapasitas minimum dari semua *s-t* cutset:

$$c(Q_{\min}) = \min_k \{c(Q_k)\} \tag{2.17}$$

dimana Q_k adalah *s-t* cutset pada G.

Karena semua fungsi kapasitas garis bernilai positif, maka persamaan (2.15) dan persamaan (2.17) bisa digabungkan menjadi:

$$c(C_{\min}) = \min_i \{c(X_i, \bar{X}_i)\} = \min_k \{c(Q_k)\} = c(Q_{\min}) \tag{2.18}$$

Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut:

Akan ditunjukkan $c(C_{\min}) \leq c(Q_{\min})$:

Jelas, karena *s-t* cutset merupakan minimal himpunan garis yang jika dihapus akan mematahkan semua path berarah dari *s* ke *t*. Sehingga tidak ada subset sejati pada $Q_{\min}$ yang menjadi *s-t* cutset yang akan mempunyai kapasitas kurang dari $Q_{\min}$.

Maka diperoleh:

$$c(C_{\min}) \leq c(Q_{\min}) \tag{2.19}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $c(C_{\min}) \geq c(Q_{\min})$:

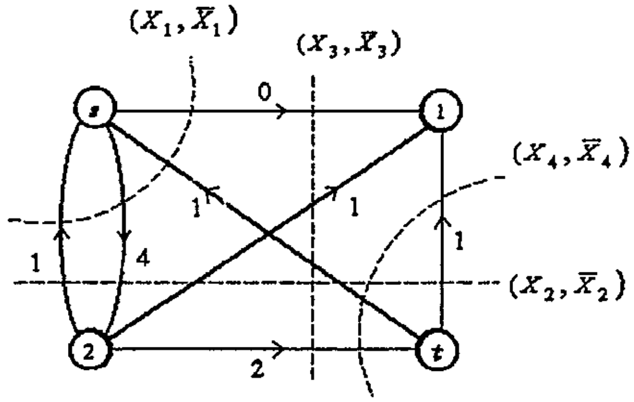
Dari definisi bahwa $C_{\min}$ adalah minimum *s-t* cut, dan kapasitas garis positif, maka tidak ada subset sejati dalam $C_{\min}$ yang menjadi *s-t* cut, yang akan mempunyai kapasitas kurang dari $C_{\min}$.

Maka diperoleh:

$$c(C_{\min}) \geq c(Q_{\min}) \tag{2.20}$$

Dari pertidaksamaan (2.19) dan pertidaksamaan (2.20), maka persamaan (2.18) terbukti.

Contoh 2.5:



Gambar 2.6 Suatu jaringan dengan empat s-t cut.

Jaringan pada gambar 2.6 tersebut mempunyai empat s-t cut sebagai berikut:

$$(X_1, \bar{X}_1) = (s, \{1,2,t\}) = \{(s,1),(s,2)\} \tag{2.21a}$$

$$(X_2, \bar{X}_2) = (\{s,1\},\{2,t\}) = \{s,2)\} \tag{2.21b}$$

$$(X_3, \bar{X}_3) = (\{s,2\},\{1,t\}) = \{(2,t),(2,1),(s,1)\} \tag{2.21c}$$

$$(X_4, \bar{X}_4) = (\{s,1,2\},t) = \{(2,t)\} \tag{2.21d}$$

dengan nilai kapasitasnya adalah:

$$c(X_1, \bar{X}_1) = c\,(s,1) + c\,(s,2) = 4 \tag{2.22a}$$

$$c(X_2, \bar{X}_2) = c\,(s,2) = 4 \tag{2.22b}$$

$$c(X_3, \bar{X}_3) = c\,(2,t) + c\,(2,1) + c\,(s,1) = 3 \tag{2.22c}$$

$$c\,(X_4, \bar{X}_4) = c\,(2,t) = 2 \tag{2.22d}$$

Selanjutnya terdapat dua s-t cutset $Q_1 = (X_2, \bar{X}_2)$ dan $Q_2 = (X_4, \bar{X}_4)$ dengan nilai kapasitasnya:

$$c(Q_1) = c\,(s,2) = 4 \tag{2.22 e}$$

$$c(Q_2) = c\,(2,t) = 2 \tag{2.22 f}$$

Menunjukkan bahwa $C_{min} = Q_{min} = 2$ dan persamaan (2.18) terpenuhi.

Theorema 2.1

Misal $(X, \overline{X})$ adalah *s-t* cut pada jaringan *G* (*V, E, c, f*). Nilai aliran f_{st} dari *s* ke *t* didefinisikan:

$$f_{st} = f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \leq c(X, \overline{X}) \tag{2.23}$$

Bukti:

Sebelumnya dilihat pola aliran $\{f(x,y)\}$ pada persamaan (2.1). Jika $x \in X$, maka diperoleh:

$$f_{st} = \sum_{x \in X} [f(x,V) - f(V,x)] = f(X,V) - f(V,X) \tag{2.24}$$

Karena $V = X \cup \overline{X}$, maka persamaan (2.24) menjadi:

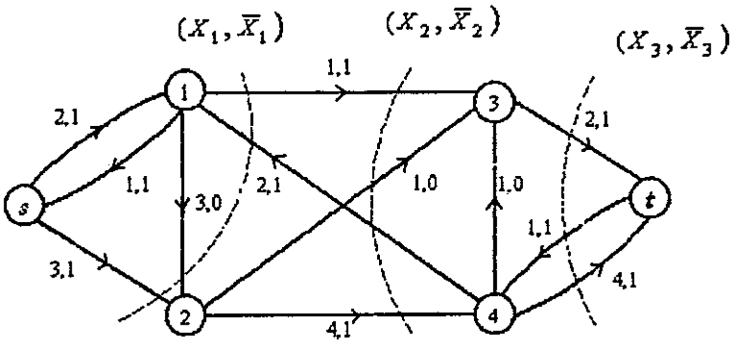
$$\begin{aligned} f_{st} &= f(X, X \cup \overline{X}) - f(X \cup \overline{X}, X) \\ &= f(X, X) + f(X, \overline{X}) - f(X, X) - f(\overline{X}, X) \\ &= f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Dari $f(\overline{X}, X) \geq 0$ dan $f(X, \overline{X}) \leq c(X, \overline{X})$ maka

$f(X, \overline{X}) - f(\overline{X}, X) \leq c(X, \overline{X})$. Theorema terbukti.

Contoh 2.6

Diberikan jaringan G (V, E, c, f) pada gambar berikut:



Gambar 2.7 Suatu jaringan G (V, E, c, f) dengan tiga s-t cut

Pada gambar 2.7 tersebut terdapat tiga s-t cut dengan nilai alirannya masing-masing adalah:

$$f(X_1,\overline{X}_1) - f(\overline{X}_1,X_1) = f(1,3) + f(1,2) + f(s,2) - f(4,1)$$
$$= 1 + 0 + 1 - 1 = 1$$
$$\leq c(X_1,\overline{X}_1) = 1 + 3 + 3 = 7 \qquad (2.26a)$$

$$f(X_2,\overline{X}_2) - f(\overline{X}_2,X_2) = f(1,3) + f(2,3) + f(2,4) - f(4,1)$$
$$= 1 + 0 + 1 - 1 = 1$$
$$\leq c(X_2,\overline{X}_2) = 1 + 1 + 4 = 6 \qquad (2.26b)$$

$$f(X_3,\overline{X}_3) - f(\overline{X}_3,X_3) = f(3,t) + f(4,t) - f(t,4)$$
$$= 1 + 1 - 1 = 1$$
$$\leq c(X_3,\overline{X}_3) = 2 + 4 = 6 \qquad (2.26c)$$

Nilai aliran dari s ke t adalah 1, sama dengan nilai aliran pada sembarang s-t cutnya.

2.2.3 Aliran Maksimum

Theorema 2.2 (*Theorema max-flow min-cut*)

Nilai aliran maksimum f_{maks} dari s ke t dalam jaringan $G(V, E, c, f)$ sama dengan nilai kapasitas minimum s-t cutnya, yaitu:

$$f_{maks} = \text{maks } \{f_{st}\} = \min_i \{c(X_i, \overline{X}_i)\} \tag{2.27}$$

Dimana $(X_i, \overline{X}_i)$ adalah sembarang s-t cut , dan maks$\{f_{st}\}$ memenuhi pola aliran fisibel dalam G.

Bukti:

Diambil $(X_i, \overline{X}_i)$ sembarang s-t cut pada G. Dengan theorema 2.1, nilai f_{st} ditentukan dari kapasitas s-t cut:

$$f_{st} = f(X_i, \overline{X}_i) - f(\overline{X}_i, X_i) \leq c(X_i, \overline{X}_i) \tag{2.28}$$

Sehingga nilai aliran maksimum (f_{maks}) ditentukan dari kapasitas minimum s-t cut, atau:

$$f_{maks} = \text{maks } \{f_{st}\} \leq \min_i \{c(X_i, \overline{X}_i)\} \tag{2.29}$$

Dengan demikian untuk membuktikan theorema 2.2 ini, harus dipenuhi:

$$f(X, \overline{X}) = c(X, \overline{X}) \tag{2.30a}$$

$$f(\overline{X}, X) = 0 \tag{2.30b}$$

Untuk menunjukkan bahwa syarat pada persamaan (2.30) dipenuhi, diasumsikan f suatu aliran maksimum pada G (V, E, c, f). Kemudian didefinisikan suatu subset X pada himpunan titik V sebagai berikut:

1. $s \in X$
2. Jika $x \in X$ dan $f(x, y) < c(x, y)$, maka $y \in X$
3. Jika $x \in X$ dan $f(y, x) > 0$, maka $y \in X$.

sehingga $t \in \overline{X} = V - X$.

Andai $t \notin \overline{X}$, maka terdapat path diantara titik s dan t ,

$$P_{st} = (s, v_2)(v_2, v_3) ... (v_{r-1}, t) \tag{2.31}$$

Sedemikian hingga semua garis maju (v_k, v_{k+1}) pada P_{st} tidak jenuh,

$$f(v_k, v_{k+1}) < c(v_k, v_{k+1}) \tag{2.32}$$

dan semua garis balik (v_{k+1}, v_k) pada P_{st} mempunyai aliran tidak kosong,

$$f(v_{k+1}, v_k) > 0 \tag{2.33}$$

Misal diambil :

$$w_1 = \min\{ c(v_k, v_{k+1}) - f(v_k, v_{k+1})\} \tag{2.34}$$

untuk semua garis maju (v_k, v_{k+1}) pada P_{st}, dan:

$$w_2 = \min\{ f(v_{k+1}, v_k)\} \tag{2.35}$$

untuk semua garis balik (v_{k+1}, v_k) pada P_{st}, dan ditentukan:

$$w = \min(w_1, w_2) \tag{2.36}$$

Maka bisa didefinisikan aliran baru f^* berdasarkan aliran awal f sebagai berikut:

$$f^*(v_k, v_{k+1}) = f(v_k, v_{k+1}) + w \tag{2.37a}$$

untuk semua garis maju (v_k, v_{k+1}) pada P_{st}, dan

$$f^*(v_{k+1}, v_k) = (v_{k+1}, v_k) - w \tag{2.37b}$$

untuk semua garis balik (v_{k+1}, v_k) pada P_{st}.

Fungsi aliran baru f^* yang didefinisikan tersebut adalah pola aliran fisibel yang mempunyai nilai $f_{st} + w$ dimana f_{st} adalah nilai awal aliran f. Hal ini menunjukkan bahwa f bukan aliran maksimum, kontradiksi dengan asumsi bahwa f aliran maksimum. Sehingga t harus berada dalam $\overline{X}$ dan $(X, \overline{X})$ adalah suatu minimum s-t cut. Maka diperoleh:

$$f(x, y) = c(x, y) \tag{2.38a}$$

untuk $(x, y) \in (X, \overline{X})$, dan

$$f(y, x) = 0 \tag{2.38b}$$

untuk $(y, x) \in (\overline{X}, X)$.

Sehingga dipenuhi:

$$f(X, \overline{X}) = c(X, \overline{X}) \tag{2.39a}$$

$$f(\overline{X}, X) = 0 \tag{2.39b}$$

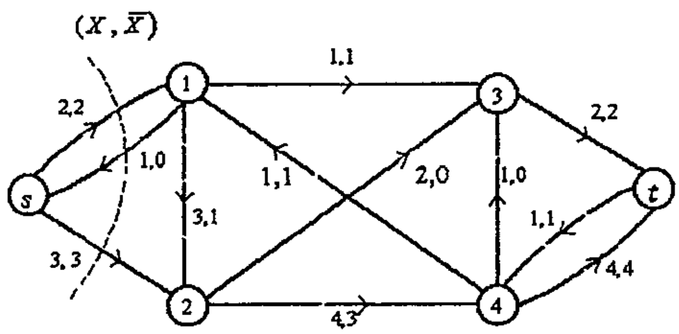
Definisi 2.13

Path diantara titik s dan t (P_{st}) dalam jaringan $G(V, E, c, f)$ dikatakan sebagai path aliran tambahan untuk nilai f jika semua garis maju (x, y) pada P_{st} tidak jenuh, atau $f(x, y) < c(x, y)$ dan semua garis balik (y, x) mempunyai nilai aliran tidak kosong, atau $f(y, x) > 0$.

Dengan demikian aliran dalam jaringan $G(V, E, c, f)$ dikatakan maksimum jika tidak ada path aliran tambahan yang akan menambah nilai aliran f dalam jaringan $G(V, E, c, f)$

Contoh 2.7

Disajikan jaringan $G(V, E, c, f)$ pada gambar 2.8, dengan pola aliran fisibel.



Gambar 2.8 Suatu jaringan $G(V, E, c, f)$ dengan pola aliran fisibel

Akan dihitung nilai aliran maksimum pada jaringan dengan menggunakan theorema *max-flow min-cut*, sebagai berikut:

Diambil s-t cut:

$$(X,\overline{X}) = (s,\{1,2,3,4,t\}) = \{(s,1),(s,2)\} \tag{2.40}$$

yang mempunyai kapasitas minimum:

$$c\left(X,\overline{X}\right) = c(s,1) + c(s,2) = 2 + 3 = 5 \tag{2.41}$$

Maka dengan menggunakan theorema *max-flow min-cut*, aliran maksimum dari s ke t pada jaringan tersebut sama dengan kapasitas minimum s-t cutnya, yaitu:

$$f_{maks} = c\left(X,\overline{X}\right) = 5 \tag{2.42}$$