## BAB II

## MATERI PENUNJANG

### 2.1. Rantai Markov

Istilah proses stokhastik seringkali dihubungkan dengan observasi (percobaan) yang berorientasi waktu. Menurut Hines dan Montgomeri [3], proses stokhastik adalah barisan variabel acak $\{X_n\}$ dimana $n \in T$ yaitu waktu atau barisan index.

Himpunan harga-harga yang mungkin dari suatu variabel acak $X_n$ dari suatu proses stokhastik$\{ X_n, n \geq 0\}$disebut ruang state (S) dimana $X_n$ menyatakan state atau keadaan sistem itu pada saat n. Sistem ini disebut mempunyai sifat Markov apabila memenuhi syarat :

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\}$$
$$= P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

untuk setiap bilangan bulat non negative n dan $i_0$, $i_1$, $i_2$,......, i, $j \in S$. Syarat Markov ini dapat dibaca sebagai berikut, probabilitas $X_{n+1} = j$ bila diketahui $X_0 = i_0$, $X_1 = i_1$, ........,$X_n = i$ sama dengan probabilitas $X_{n+1} = j$ bila diketahui $X_n = i$, ini berarti kondisi atau syarat bahwa $X_0 = i_0$, $X_1 = i_1$, ........, $X_{n-1} = i_{n-1}$ tidak mempengaruhi. Yang mempengaruhi probabilitas hanya $X_n = i$. Jadi keadaan (state) sebelumnya tidak berpengaruh terhadap keadaan yang akan datang , yang berpengaruh hanya keadaan saat ini. Keadaan saat ini berarti $X_n$ dan keadaan yang akan datang $X_{n+1}$. Seterusnya akan dikatakan $X_n$, $n \geq 0$ sebagai rantai Markov, bila sistem itu memenuhi sifat Markov dan mempunyai ruang state yang terhitung.

**Contoh 2.1. :**

Misalkan $X_n$ merupakan variabel acak yang menunjukkan keadaan mesin pada hari ke-n. Dengan ruang state $S = \{ 0,1 \}$ dimana state 0 merupakan keadaan mesin rusak dan state 1 adalah keadaan mesin baik. Seandainya mesin itu rusak pada awal hari ke-n, probabilitas bahwa selama hari itu dapat diperbaiki dan pada awal hari berikutnya (n+1) baik, sama dengan p atau $P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0\} = p$. Sedangkan bila mesin pada awal hari ke-n baik, probabilitas pada awal hari selanjutnya (n+1) rusak adalah q atau $P\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1\} = q$. Jadi keadaan mesin pada hari esok hanya bergantung pada keadaan mesin pada hari ini dan bukan pada hari-hari sebelumnya.

## 2.2. Probabilitas dan Matrik Transisi

Menurut Sceerer, Anne E.[6] himpunan state $\{0,1,2,...,N\}$ berhubungan dengan setiap rantai Markov merupakan himpunan probabilitas transisi.

**Definisi 2.1. :** Probabilitas transisi, $P_{ij}$ merupakan probabilitas pada sistem yang bergerak dari state i ke j dalam satu langkah (pada satu parcobaan atau dalam satu interval waktu).

Oleh karena $P_{ij}$ merupakan probabilitas untuk setiap i dan j maka :

$$\mathbf{P_{ij} \geq 0}$$

dan untuk setiap i maka:

$$\sum_{j=0}^{N} \mathbf{P_{ij} = 1}$$

Pada setiap langkah sistem dapat saja bergerak dari suatu state, kembali ke state yang sama atau pindah state yang lain.

Himpunan dari seluruh probabilitas transisi dapat disusun ke dalam suatu matrik transisi yang dimasukkan kedalam baris ke-i dan kolom ke-j. Seandainya diketahui ruang state S adalah berhingga S = {0,1,2,...,N} maka dapat dibuat suatu matrik yang elemen- elemennya $P_{ij}$ dimana $i,j \in S$.

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & N \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N0} & P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{bmatrix}$$

Matrik $P = [P_{ij}]$ diatas disebut sebagai matrik Markov atau matrik probabilitas transisi dari proses. Semua angka dalam matrik transisi adalah non negative dan jumlahan baris $\sum_{j=0}^{N} P_{ij} = 1$ untuk setiap i. Untuk mudahnya matrik ini ditulis sbb:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & N \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N0} & P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{bmatrix} \end{array}$$

## 2.3. State Absorbing

Suatu state atau kedudukan rantai Markov i disebut state absorbing, apabila sekali sistem itu tinggal pada state i maka sistem itu akan tetap tinggal pada state i untuk selamanya, hal ini dapat didefinisikan sbb :

**Definisi 2.2.** : Suatu state $i, j \in S$ pada suatu rantai Markov disebut keadaan menyerap (state absorbing) bila $P_{ii} = 1$ atau $P_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

**Contoh 2.2.** :

Seandainya seorang penjudi pada awal perjudian mempunyai modal sebesar M rupiah. Setiap kali main dia memasang satu rupiah. Probabilitas dia menang adalah p dan kalah q = 1 - p ( menang berarti dia mendapat satu rupiah dan kalah berarti kehilangan satu rupiah ). Bila suatu saat modal penjudi mencapai 0, maka untuk selanjutnya akan tetap sama dengan 0 karena modal penjudi habis sehingga permainan berakhir. Sehingga rantai Markov ini mempunyai fungsi transisi sbb :

$$P_{ij} = \begin{cases} p & \text{jika } i \geq 1, j = i+1 \\ q & \text{jika } i \geq 1, j = i-1 \\ 0 & \text{untuk } j \text{ yang lain} \end{cases}$$

$P_{00} = 1$ karena setelah modal habis maka seterusnya juga 0, atau probabilitas nya = 1, jadi 0 merupakan state absorbing.

### 2.4. Waktu Kena

Misal A adalah himpunan state absorbing yang merupakan himpunan bagian S atau $A \subset S$. Untuk setiap $X_n \in A$ dan $n \geq 0$ maka dimaksud dengan waktu absorbsi T adalah: $T = \min ( n \geq 0 \,;\, X_n \in A)$

Nilai T akan menjadi tak hingga jika $X_n \notin A$ untuk semua $n \geq 0$. Dengan kata lain T adalah waktu yang dibutuhkan rantai Markov untuk absorbsi.

**2.5. Macam - Macam State**

State dalam ruang state rantai Markov mempunyai sifat berlainan diantaranya adalah state absorbing yang mempunyai sifat $P_{ii} = 1$ selain state absorbing dikenal juga state rekuren dan state transien. Untuk itu ditentukan :

$\theta_{ij}$ adalah probabilitas bahwa rantai Markov bermula dari i akan mencapai j pada suatu waktu yang berhingga. Khususnya, $\theta_{jj}$ adalah probabilitas bahwa rantai Markov bermula dari j akan pernah mencapai j lagi.

**Definisi 2.3.** : Suatu state $j \in S$ disebut rekuren jika $\theta_{jj} = 1$ dan disebut transien jika $\theta_{jj}<1$.

Bila j rekuren berarti $\theta_{jj} = 1$, jadi rantai Markov mulai dari j pasti kembali ke j lagi . Bila j transien berarti rantai Markov mulai dari j belum pasti kembali ke j, ada kemungkinan bahwa tidak kembali ke j atau probabilitas dari j tidak kembali ke j = $1 - \theta_{jj} > 0$. Bila j state absorbing maka $\theta_{jj} = P_{jj} =1$, sehingga suatu state absorbing harus state rekuren, tetapi belum tentu sebaliknya.

**2.6. Hukum - Hukum Probabilitas**

**2.6.1. Definisi Dan Sifat-sifat Probabilitas**

**Definisi 2.4.** : Suatu fungsi probabilitas P(.) adalah fungsi himpunan dengan domain $\mathcal{A}$ (suatu aljabar even) dan daerah hasil [0,1] yang memenuhi axiom :

(i) $P(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Jika $A_1, A_2, \ldots$ barisan even yang saling asing dalam $\mathscr{A}$ (dimana $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$) dan jika $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$ maka :

$$P\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}\} = P\{A_i\}$$

Ruang even $\mathscr{A}$ mempunyai sifat-sifat :

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) $A \in \mathscr{A} \rightarrow A^c \in \mathscr{A}$

(iii) $A_1$ dan $A_2 \in \mathscr{A} \rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}$

disebut aljabar even atau aljabar Boole.

Jika diberikan $\Omega$ (ruang sampel) dan $\mathscr{A}$ ( aljabar even) maka fungsi probabilitas P(.) dengan domain $\mathscr{A}$ mempunyai sifat-sifat :

**Theorema 2.1.** : $P(\varnothing) = 0$

**Bukti :**

Misalkan barisan tak hingga dari even-even $A_1, A_2, \ldots$ sedemikian hingga $A_i = \varnothing$ untuk $i = 1,2, \ldots$ .Dengan kata lain setiap even pada barisan itu hanyalah himpunan kosong $\varnothing$. Barisan ini merupakan barisan even yang saling asing karena $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$. Selain itu $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. Oleh karena itu menurut axiom (iii) :

$$P(\varnothing) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

Persamaan diatas menunjukkan bahwa nilai $P(\varnothing)$ dijumlahkan berkali-kali pada barisan yang tak hingga , jumlahnya adalah sama dengan nilai $P(\varnothing)$. Bilangan riil yang mempunyai sifat diatas hanyalah apabila $P(\varnothing) = 0$.

**Theorema 2.2. :** Untuk setiap barisan berhingga dari even-even $A_1, \ldots, A_n$

$$P\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\}$$

**Bukti :**

Misalkan barisan tak hingga dari even-even $A_1, A_2, \ldots$ dimana $A_1, \ldots, A_n$ adalah n even yang saling asing dan $A_i = \varnothing$ untuk $i > n$ sehingga even-even pada barisan tak hingga adalah saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Menurut axiom (iii) maka :

$$P\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

**Theorema 2.3. :** Jika A adalah sebuah even dan $A^c$ adalah komplemennya maka :

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

**Bukti :**

Karena $A^c$ komplemen dari A dalam ruang sampel $\Omega$ maka $\Omega = A \cup A^c$. A dan $A^c$ adalah even yang saling asing karena $A \cap A^c = \varnothing$, sehingga menurut axiom (ii) :

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

**Theorema 2.4.** : Untuk setiap even A , $P(A) \leq 1$

**Bukti :**

Dari theorema 2.3, $P(A) = 1 - P(A^c)$. Juga dari axiom (ii) diketahui bahwa $P(A^c) \geq 0$.

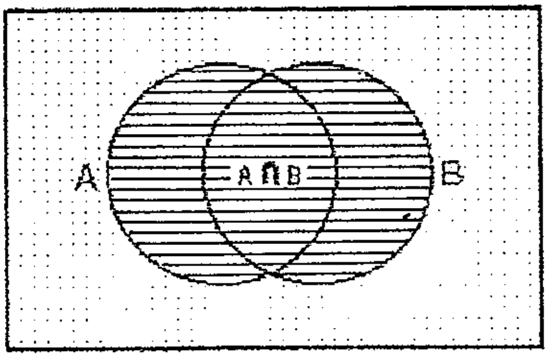
Oleh karena itu, $P(A) \leq 1$.

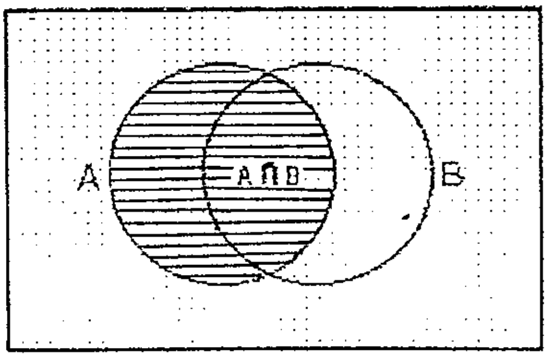
**Theorema 2.5.** : Bila A dan B dua kejadian sembarang, maka :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Bukti :**

Perhatikan diagram venn pada gambar bawah:




$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$ $\qquad\qquad$ $A = (A \cup B) \cup (A \cap B^c)$

Even-even $A \cap B^c$ dan B adalah saling asing karena $(A \cap B^c) \cap B = \varnothing$ sehingga:

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$$

Karena even-even $A \cap B$ dan $A \cap B^c$ juga saling asing maka:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

Dari kedua persamaan diatas didapat :

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### 2.6.2 Probabilitas Bersyarat

**Definisi 2.5.** : Probabilitas bersyarat dari B, jika diberikan A, ditulis dengan $P(B|A)$, didefinisikan :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{jika } P(A) > 0$$

**Theorema 2.6.** : Untuk setiap even A dan B,

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

**Bukti :**

Dari definisi 2.5. didapat bahwa:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

sehingga: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$.

Demikian juga untuk even A dengan syarat B didapat:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

sehingga: $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$

Jadi dari kedua persaman diatas didapat $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$.

**2.6.3. Hukum Total Probabilitas**

Kadang-kadang probabilitas suatu peristiwa A tidak dapat ditentukan secara langsung . Namun terjadinya peristiwa A selalu disertai oleh terjadinya peristiwa-peristiwa lain $B_i$, i = 1,2,....,n ,sedemikian sehingga probabilitas peristiwa A akan tergantung pada peristiwa- peristiwa $B_i$ yang telah terjadi. Dalam hal yang demikian maka probabilitas dari A akan merupakan probabilitas rata-rata dengan bobot $B_i$. Untuk even-even seperti diatas maka dibutuhkan hukum total probabilitas dimana $A \cap B_1$, $A \cap B_2$,........ ,$A \cap B_n$ adalah saling asing.

**Thorema 2.7.** : Jika $B_1$,$B_2$,.......,$B_n$ adalah koleksi dari even-even saling asing dan lengkap, maka untuk even A:

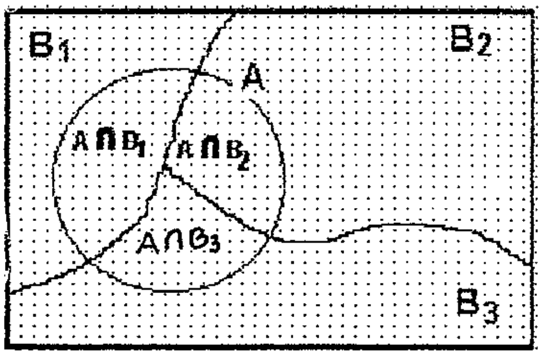
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i)$$

**Bukti :**

Misal $B_1$,$B_2$,....,$B_n$ adalah peristiwa-peristiwa yang saling asing dan bergabung sempurna yaitu $B_1 \cup B_2 \cup .... \cup B_n = \Omega$ (ruang sampel) sehingga didapat:

$$P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+....+P(B_n) = 1$$

Perhatikan contoh diagram venn dibawah ini :



Terlihat bahwa kejadian A merupakan gabungan dari sejumlah kejadian yang saling terpisah atau saling asing $B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$, $B_3 \cap A$, ...., $B_n \cap A$ sehingga didapat:

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup .... \cup (B_n \cap A)$$

Dengan menggunakan sifat-sifat probabilitas diperoleh,

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ........ \cup (A \cap B_n)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ........ + P(A \cap B_n)$$

$$P(A) = P(B_1)\, P(A \mid B_1) + P(B_2)\, P(A \mid B_2) + ........... + P(B_n)\, P(A \mid B_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i) \qquad \text{(hukum probabilitas bersyarat)}$$

**2.6.4. Hukum Total Probabilitas Diaplikasikan Pada Ekspektasi.**

Nilai ekspektasi X didefinisikan sebagai :

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Sedangkan nilai ekspektasi bersyarat X jika diberikan $Y = y_j$ adalah :

$$E[X| Y = y_j] = \sum_i x_i \; P(X = x_i | Y = y_j)$$

Dengan hukum total probabilitas didapat bahwa :

$$E[X] = \sum_j \; E[X| Y = y_j]\, P(Y = y_j)$$

**Bukti :**

$$E[X] = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

$$E[X] = \sum_i x_i \sum_j P(X = x_i | Y = y_j) P(Y = y_j)$$

$$E[X] = \sum_j \sum_i x_i P(X = x_i | Y = y_j) P(Y = y_j)$$

$$E[X] = \sum_j E[X | Y = y_j] P(Y = y_j)$$

Persamaan diatas biasa disebut dengan hukum total probabilitas yang diaplikasikan pada ekspektasi.

## 2.7. Solusi Dari Persamaan Linear Simultan Dengan Metode Faktorisasi LU

Persamaan linear simultan terdapat hampir disetiap cabang matematik terapan. Persamaan tersebut mengandung satu set n persamaan dengan n variabel. Bentuk umum persamaan linear simultan adalah:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Dimana: setiap a adalah konstanta koefisien

b adalah konstanta

Jika persamaan diatas ditulis dalam bentuk persamaan matrik menjadi:

$$A\,x = b$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A = matrik koefisien berordo n x n

Persamaan diatas dapat diselesaikan dengan metode faktorisasi LU. Seperti dikemukakan oleh Cullen (1) matrik koefisien pada persamaan linear simultan dapat difaktorkan menjadi matrik segitiga bawah (L) dan matrik unit segitiga atas (U), masing-masing berordo n x n, dengan syarat bahwa $|A| \neq 0$.

**Definisi 2.6. :** Sebuah matrik bujur sangkar C disebut sebagai matrik segitiga atas jika $C_{ij} = 0$ untuk $i > j$ dan disebut matrik unit segitiga atas jika matrik itu adalah segitiga atas dengan setiap $C_{ii} = 1$. Matrik L adalah segitiga bawah jika transpase $L^T$-nya adalah segitiga atas.

Perlu diingat jika sebuah matrik berordo n x n merupakan matrik segitiga bawah dan sekaligus juga matrik unit segitiga atas berarti matrik tersebut adalah matrik identitas berordo n x n.

Pandang matrik bujur sangkar non singular berordo n x n dibawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat difaktorkan kedalam bentuk perkalian matrik LU.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan L adalah matrik segitiga bawah dan U adalah matrik unit segitiga atas. Sehingga dapat ditulis :

$$L\,U = A$$

Untuk menjelaskan bagaimana metode faktorisasi LU dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dengan n persamaan dan n variabel. Terlebih dahulu diberikan teorema sebagai dasar dari metode faktorisasi LU.

**Teorema 2.8.** : Jika matrik bujur sangkar A berordo n x n adalah non singular maka faktorisasinya adalah unik

Bukti :

Untuk menunjukan keunikannya diasumsikan bahwa $A = L_1U_1$ dan $L_2U_2$ dengan $L_1$ dan $L_2$ adalah matrik segitiga bawah serta $U_1$ dan $U_2$ adalah matrik unit segitiga atas. Karena A non singular berarti $L_2$ dan $U_1$ juga non singular, sehingga $L_2$ dan $U_1$ mempunyai invers.

$$L_1 U_1 = L_2 U_2 \qquad \Rightarrow \qquad L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$$

dimana matriks $L_2^{-1}L_1$ adalah matrik segitiga bawah dan matrik $U_2\ U_1^{-1}$adalah matrik unit segitiga atas. Karena matrik identitas adalah matrik segitiga bawah sekaligus matrik unit segitiga atas, sehingga :

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I \qquad \Rightarrow \qquad L_1 = L_2 \text{ dan } U_1 = U_2$$

dengan demikian faktorisasinya unik.

Sekarang akan diberikan cara memfaktorkan matrik A.

$$L\,U = A$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1. Menentukan kolom pertama dari L

Kalikan baris-baris dari L dengan kolom pertama dari U, diperoleh :

$l_{11} = a_{11}$

$l_{21} = a_{21}$

:

$l_{n1} = a_{n1}$, sehingga

$l_{i1} = a_{i1}$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$

2. Menentukan baris pertama dari U

Kalikan baris pertama dari L dengan kolom-kolom dari U, didapat

$l_{11}U_{12} = a_{12}$

$l_{11}U_{13} = a_{13}$

:

$l_{11}U_{1n} = a_{1n}$, sehingga

$U_{1j} = a_{1j} / l_{11}$ untuk $j = 2,3,\ldots,n$ dan $l_{11} \neq 0$

3. Menentukan kolom kedua dari L

Kalikan baris-baris dari L dengan kolom kedua dari U, diperoleh

$(l_{21}U_{12}) + (l_{22} \times 1) = a_{22}$

$(l_{31}U_{12}) + (l_{32} \times 1) = a_{32}$

:

$(l_{n1}U_{12}) + (l_{n2} \times 1) = a_{n2}$

sehingga :

$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}U_{12}$ untuk $i = 2,3,\ldots,n$

4. Menentukan baris kedua dari U

Kalikan baris kedua dari L dengan kolom-kolom dari U, didapat

$l_{21} U_{13} + l_{22} U_{23} = a_{23}$

$l_{21} U_{14} + l_{22} U_{24} = a_{24}$

:

$l_{21} U_{1n} + l_{22} U_{2n} = a_{2n}$

sehingga:

$$U_{2j} = \frac{a_{2j} - l_{21} U_{1j}}{l_{22}} \quad \text{untuk } j = 3,4,\ldots\ldots,n \quad \text{dan } l_{22} \neq 0$$

5. Selanjutnya menentukan kolom 3 dari L dan baris 3 dari U dengan menggunakan operasi yang sama sampai semua anggota dari L dan U didapatkan.

Persamaan umum dari L dan U yaitu :

$l_{i1} = a_{i1}$ untuk $i = 1,2,\ldots\ldots,n$

$U_{1j} = a_{1j} / l_{11}$ untuk $j = 2,3,\ldots\ldots,n$ dan $l_{11} \neq 0$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-i} l_{ik} U_{kj} \quad \text{untuk} \quad \begin{cases} j = 2,3,\ldots.n \\ i = j, j+1,\ldots.,n \\ \text{untuk setiap harga } j \end{cases}$$

$$U_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} U_{kj}}{l_{ii}} \quad \text{untuk} \quad \begin{cases} i = 2,3,\ldots.,n \\ j = i+1, i+2,\ldots.,n \\ \text{untuk setiap harga } i \end{cases}$$

dimana $l_{ii} \neq 0$

Suatu matrik bujur sangkar A berordo n x n non singular akan mempunyai matrik faktorisasi L dan U berordo n x n yang non singular juga.

Setelah didapat matrik faktorisasi dari A maka persamaan linier simultan dapat ditulis: A x = b

sehingga: LU x = b

persamaan diatas dapat ditulis

L d = b dengan U x = d

Matrik d dapat ditentukan menggunakan substitusi kedepan dari matrik L dan b.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dari perkalian matrik L dan d serta dengan menggunakan sifat kesamaan suatu matrik diperoleh:

$$l_{11} d_1 = b_1$$

$$d_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \qquad l_{11} \neq 0$$

$$l_{21} d_1 + l_{22} d_2 = b_2$$

$$d_2 = \frac{b_2 - l_{21} d_1}{l_{22}}, \qquad l_{22} \neq 0$$

$$\vdots$$

$$l_{n1} d_1 + l_{n2} d_2 + l_{n3} d_3 + \ldots\ldots + l_{nn} d_n = b_n$$

$$d_n = \frac{b_n - (l_{n1} d_1 + l_{n2} d_2 + l_{n3} d_3 + \ldots + l_{n(n-1)} d_{n-1})}{l_{nn}}$$

dengan $l_{nn} \neq 0$

Secara umum bentuk dari matrik d yaitu:

$$d_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$d_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j}{l_{ii}}$$ , untuk i = 2,3,.....,n dengan $l_{11}$ dan $l_{ii} \neq 0$

Solusi dari x dapat dicari dengan substitusi kebelakang dari matrik U dan d.

$$\begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$x_n = d_n$

$\vdots$

$x_2 + U_{23}x_3 + \ldots\ldots + U_{2n}\, x_n = d_2$

$x_2 = d_2 - (U_{23}x_3 + \ldots\ldots + U_{2n}x_n)$

$x_1 + U_{12}x_2 + U_{13}x_3 + \ldots\ldots + U_{1n} = d_1$

$x_1 = d_1 - (U_{12}x_2 + U_{13}\, x_3 + \ldots\ldots + U_{1n}x_n)$

Secara umum solusi dari persamaan linear simultan adalah :

$x_n = d_n$

$x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij} x_j$ untuk i = n-1,n-2,......,1