BAB II

RANTAI MARKOV WAKTU DISKRIT (HOMOGEN)

2.1. Definisi Rantai Markov

Menurut Scheerer, Anne. E. (1969), proses stokhastik adalah himpunan variabel acak yang merupakan fungsi waktu atau disebut juga proses acak (*random processes*).

Himpunan harga-harga yang mungkin untuk suatu variabel acak X_k dari suatu proses stokhastik $\{X_k, k \geq 0\}$ disebut ruang keadaan, dimana X_k menyatakan keadaan sistem itu pada waktu k. Jika suatu proses stokhastik mempunyai sifat :

$$P\{X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_k = x_k\}$$
$$= P\{X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k\} \text{..........................} (2.1.1)$$

untuk setiap harga $x_0, x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ untuk sebarang k dan $x_0, x_1, x_2, ..., x_{k+1} \in S$ (ruang state), maka proses tersebut disebut dengan proses Markov atau rantai Markov. Dengan kata lain bahwa rantai Markov merupakan proses stokhastik yang khusus, yaitu suatu proses stokhastik di mana untuk meramalkan masa yang akan datang maka masa lalu tidaklah mempunyai pengaruh apabila masa sekarang diketahui.

Definisi 2.1.1 : (Rantai Markov)

Suatu proses stokhastik $\{X_0, X_1, ..., X_k, ...\}$ memiliki sifat Markov, jika untuk setiap n dan m, distribusi bersyarat pada $X_{k+1}, ..., X_{k+m}$ bergantung pada $\{X_0, X_1, ..., X_k\}$ adalah sama dengan distribusi bersyarat yang hanya bergantung pada X_k saja. Suatu proses dengan sifat Markov tersebut disebut dengan proses Markov.Jika ruang keadaan pada proses Markov terhitung, maka proses Markov tersebut disebut rantai Markov.

Sebagai contoh ilustrasi dari pengertian rantai Markov ini adalah misalnya diketahui X_k merupakan keadaan mesin pada hari ke-k. Di sini setiap k, misalkan $X_k = 0$ atau 1, untuk 0 jika mesin dalam keadaan rusak dan 1 jika mesin dalam keadaan baik. Di sini $S = \{0,1\}$, ruang state $\{0, 1\}$ untuk setiap X_k. Pada suatu hari mesin dapat dalam keadaan rusak atau baik. Seandainya pada hari ke-k diketahui rusak, maka peluangnya pada hari itu (ke-k) dapat diperbaiki (berarti pada hari berikutnya mesin dalam keadaan baik) = p (misalkan), atau $P(X_{k+1}=1 \mid X_k = 0) = p$. Sedangkan jika pada hari ke-k mesin diketahui baik, maka peluang dari berikutnya dalam keadaan rusak adalah = q (misalkan), atau $P(X_{k+1}=0 \mid X_k = 1) = q$. Jadi keadaan mesin pada hari esok hanya tergantung pada keadaan mesin pada hari ini, tidak pada hari-hari sebelumnya.

Proposisi 2.1.2 :

Suatu proses stokhastik $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k$ memiliki sifat Markov jika dan hanya jika untuk setiap k distribusi bersyarat pada X_{k+1} dengan diberikan X_0, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adalah fungsi yang hanya bergantung pada X_k.

Bukti :

Misalkan ruang keadaan S terhitung , maka untuk

$P(X_{k+1} = j_1, \ldots, X_{k+m} = j_m \mid X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k)$

$$= \frac{P(X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_k=i_k, \ldots X_{k+m}=j_m)}{P(X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_k=i_k)}$$

$$= \frac{P_0(X_0)\, P(X_0,X_1)\, P(X_1,X_2) \ldots P(X_{k+m-1},X_{k+m})}{P_0(X_0)\, P(X_0,X_1)\, P(X_1,X_2) \ldots P(X_{k-1},X_k).}$$

$$= P(X_k, X_{k+1}) . P(X_{k+1}, X_{k+2}) \ldots\ldots P(X_{k+m-1}, X_{k+m})$$

$$= P(X_{k+1} = j_1 \mid X_0 = i_0, \ldots\ldots, X_k = i_k \ ) .$$

$$P(X_{k+2} = j_2 \mid X_0 = i_0, \ldots\ldots, X_k = i_k, X_{k+1} = j_1 \ ) \ldots\ldots$$

$$P(X_{k+m} = j_m \mid X_0 = i_0, \ldots\ldots, X_{k+m-1} = j_{m-1} \ ) .$$

$$= P(X_{k+1} = j_1 \mid X_k = i_k \ ) P(X_{k+2} = j_2 \mid X_{k+1} = j_1 \ ) \ldots\ldots$$

$$P(X_{k+m} = j_m \mid X_{k+m-1} = j_{m-1}) .$$

Persamaan tersebut mengikuti hipotesis distribusi bersyarat pada waktu akan datang hanya bergantung pada keadaan i_k. Maka distribusi bersyarat tesebut adalah bergantung pada $X_k = i_k$.

Jika $X_0, X_1, \ldots, X_k$ untuk setiap k distribusi bersyarat pada X_{k+1} diberikan $X_0, X_1, \ldots, X_k$ adalah fungsi yang bergantung pada X_k dan berdasarkan definisi (2.1.1) maka $X_0, X_1, \ldots, X_k$ bersifat Markov.

Suatu rantai Markov $\{X_0, X_1, \ldots, X_k\}$ dikatakan memiliki hukum transisi homogen jika distribusi pada $X_{k+1}, \ldots, X_{k+m}$ yang diberikan $X_k = y$, tergantung pada keadaan saat waktu k, misal y , namun tidak bergantung pada waktu sebelum y.

Jadi secara tidak langsung peluang transisi menyatakan bahwa peluang transisi tidak berubah /tetap dalam waktu (waktu homogen) yang disebut dengan peluang stasioner.

2.2. Peluang Transisi k-langkah

Menurut Scheerer, Anne E. (1969) himpunan pada keadaan/kedudukan x_0, x_1, x_2 , ..., x_n, berhubungan dengan setiap rantai Markov adalah merupakan himpunan peluang transisi.

Definisi 2.2.1 : (Peluang Transisi)

Peluang transisi, q_{ij} merupakan peluang pada sistim yang bergerak dari keadaan x_i ke x_j dalam 1 langkah (pada satu percobaan atau dalam satu interval waktu). Untuk notasi lebih mudah $q_{ij} = P(x_j \mid x_i)$.

Oleh karena q_{ij} adalah peluang, untuk setiap i dan j, maka $q_{ij} \geq 0$ dan untuk setiap i

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij} = 1$$

pada setiap langkah sistim bergerak dari keadaannya (*state*) di dalam keadaannya yang sama atau keadaan yang lain. $P(x_j \mid x_i)$ adalah besarnya peluang pada keadaan x_j dengan syarat keadaan sebelumnya adalah x_i.

Karena q_{ij} mempunyai peluang bersyarat maka harus dipenuhi sifat :

1. $0 \leq q_{ij} \leq 1$ untuk semua i dan j.
2. $\sum_{j=0}^{n} q_{ij} = 1$ untuk semua i.

sebagaimana ditunjukkan dengan :

$$\begin{aligned} q_{i0} + q_{i1} + \ldots + q_{in} &= P(X_k = 0 \mid X_{k-1} = i) + P(X_k = 1 \mid X_{k-1} = i) + \ldots \\ &\quad + P(X_k = n \mid X_{k-1} = i) \\ &= P[(X_k = 0) \cup (X_k = 1) \cup \ldots \cup (X_k = n) \mid X_{k-1} = i)] \\ &= P[X_k \in S \mid X_k = i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Definisi 2.2.2 : (Matriks Transisi)

Menurut Scheerer, Anne E. (1969) bahwa matrik transisi pada suatu sistim dengan n keadaan $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, dan peluang transisi q_{ij} ; $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, adalah :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02}\cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12}\cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan tersebut semua angka q_{ij} dalam bentuk matrik transisi adalah non-negatif dan jumlahan baris $\sum_{j=0}^{n} q_{ij} = 1$ untuk setiap i.

2.2.1. Peluang Transisi Bersyarat k-Langkah

Menurut Feller (1968), $Q_{ij}^{(k)}$ merupakan besar peluang pada transisi dari x_i ke x_j dalam k-langkah atau dengan kata lain $Q_{ij}^{(k)}$ adalah peluang bersyarat menuju keadaan x_j dalam k-langkah dengan keadaan awal x_i , sehingga transisi yang dibuat adalah $x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_j$.

Peluang transisi bersyarat k=1-langkah dinyatakan dengan :

$$Q_{ij}^{(1)} = Q_{ij}$$

dan untuk transisi bersyarat k=2-langkah dinyatakan dengan :

$$Q_{ij}^{(2)} = \sum_{v=0}^{n} Q_{iv}\, Q_{vj}$$

Dengan induksi maka untuk transisi bersyarat k=k-langkah :

$$Q_{ij}^{(k)} = \sum_{v=0}^{n} Q_{iv}\, Q_{vj}^{(k-1)}$$

Sehingga untuk k=k+1-langkah diperoleh :

$$Q_{ij}^{(k+1)} = \sum_{v=0}^{n} Q_{iv}\, Q_{vj}^{(k)} \quad \ldots\ldots\ldots(2.2.1.1)$$

Untuk lebih lanjut dari pers.(2.2.1.1) diperoleh persamaan Chapman-Kolmogorov :

$$Q_{ij}^{(m+s)} = \sum_{v=0}^{n} Q_{iv}^{(m)}\, Q_{vj}^{(s)} \quad \ldots\ldots\ldots(2.2.1.2)$$

Bukti :

$$Q_{ij}^{(m+s)} = P(X_{m+s}=j|X_0=i)$$

$$= P(X_{m+s}, X_m \mid X_0)$$

$$= P(X_{m+s}=j|X_m=v).P(X_m=v|X_0=i)$$

$$= \sum_{v=0}^{n} Q_{vj}^{(m+s-m)} Q_{iv}^{(m-0)}$$
$$= \sum_{v=0}^{n} Q_{vj}^{(s)} Q_{iv}^{(m)}$$
$$= \sum_{v=0}^{n} Q_{iv}^{(m)} Q_{vj}^{(s)}$$

dimana :

$Q_{vj}^{(s)}$ adalah besarnya peluang bahwa rantai Markov bergerak dari keadaan v ke keadaan j dalam s-langkah dengan keadaan sebelumnya pada keadaan ke v.

$Q_{iv}^{(m)}$ adalah besarnya peluang bahwa rantai Markov bergerak dari keadaan i ke keadaan v dalam m langkah dengan keadaan sebelumnya pada i.

$Q_{ij}^{(m+s)}$ adalah besarnya peluang bahwa rantai Markov bergerak dari keadaan i ke keadaan j dalam (m+s) langkah dengan keadaan sebelumnya pada i.

Untuk peluang bersyarat dari peubah acak X yang dimulai dari keadaan i ke keadaan j setelah k-langkah dan selama proses membuat transisi ke dalam beberapa keadaan $Q_{ij}^{(k)}$ harus memenuhi :

1. $Q_{ij}^{(k)} \geq 0$ untuk semua i = j = n = 0, 1, 2, ..., n
2. $\sum_{j=0}^{n} Q_{ij}^{(k)} = 1$ untuk semua i.

Notasi peluang transisi bersyarat k-langkah dinyatakan dengan :

$$Q^{(k)} = \begin{bmatrix} q_{00}^{(k)} & q_{01}^{(k)} & \dots & q_{0n}^{(k)} \\ q_{10}^{(k)} & q_{11}^{(k)} & \dots & q_{1n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n0}^{(k)} & q_{n1}^{(k)} & \dots & q_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Dimana $Q^{(k)}$ merupakan multiple dari matriks Q Q Q ... Q sejumlah k.

Contoh 2.2.1 :

Terdapat rantai Markov dengan dua keadaan, yaitu keadaan 0 (hari cerah) dan keadaan 1 (hari hujan).Andai peluang hari hujan kemudian cerah = 1/3, dan peluang hari cerah kemudian hujan = 1/2, dapat dinyatakan dengan matriks :

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $Q^2 = QQ = \begin{bmatrix} 5/12 & 7/12 \\ 7/18 & 11/18 \end{bmatrix}$

dan $Q^4 = QQQQ = Q^2 Q^2 = \begin{bmatrix} 173/432 & 259/432 \\ 259/648 & 389/648 \end{bmatrix}$

Jika pada 1 Mei hari cerah , maka peluang pada tanggal 3 Mei hari cerah adalah 5/12, dan peluang tanggal 5 Mei hari cerah adalah 173/432.

2.2.2. Peluang Transisi Tak-bersyarat k-Langkah

Menurut Scheerer (1969) distribusi peluang awal pada suatu sistem merupakan distribusi peluang dimulainya himpunan suatu pengamatan , yang ditulis dengan $P^0(x_i) = p_i^{(0)}$, karena merupakan peluang maka $p_i^{(0)} \geq 0$ untuk setiap i dan $\sum_{i=0}^{n} p_i^{(0)} = 1$.Peluang ini secara umum dinyatakan dalam bentuk vektor P_0, yaitu vektor peluang awal :

$$P_0 = [\, p_0^{(0)} \quad p_1^{(0)} \ \dots\ p_n^{(0)} \,]$$

Jika suatu rantai Markov dengan dua keadaan dan pengamatan dimulai pada keadaan pertama (dalam contoh 2.2.1 dimulai pada keadaan 0) maka vektor peluang awal yang diperoleh adalah :

$$P_0 = [\, 1 \quad 0 \,]$$

Suatu rantai Markov dalam keadaan x_i pada $t = 0$ dan kemudian bergerak dari x_i ke x_j pada $t=1$. Peluang bahwa sistim dengan keadaan $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ berada dalam x_j pada saat $t = 1$ adalah :

$$\sum_{i=0}^{n} P^{(0)}\left(X_i\right)P\left(X_j / X_i\right) = \sum_{i=0}^{n} p_i^{(0)} q_{ij} = p_j^{(1)} \quad \text{.......................(2.2.2.1)}$$

di mana p_j adalah distribusi peluang pada sistim pada $t = 1$ dan hal ini serupa dengan peluang awal vektor P_o (di mana : matrik 1-baris umumnya disebut dengan vektor).

Himpunan pada $p_j^{(1)}$ adalah distribusi peluang pada saat $t=1$ dinyatakan dengan vektor :

$$P_1 = \left[p_0^{(1)} \quad p_1^{(1)} \quad \ldots \quad p_n^{(1)} \right]$$

Dengan cara yang sama, suatu proses pada x_j saat $t=2$ jika $x_i = 1$ dan bergerak dari x_i ke x_j, sehingga dapat dihitung peluang $p_j^{(2)}$, bahwa sistem di x_j saat $t = 2$ dari $p_j^{(1)}$ adalah :

$$p_j^{(2)} = \sum_{i=0}^{n} p_i^{(1)} q_{ij} \text{ , dimana } p_j^{(2)} \geq 0 \text{ untuk semua } j$$

dan $\sum_{j=0}^{n} p_j^{(2)} = 1$, dan dinyatakan dengan vektor P_2 :

$$P_2 = [\, p_0^{(2)} \quad p_1^{(2)} \quad \ldots \quad p_n^{(2)} \,] \quad \text{.......................................(2.2.2.2)}$$

Setelah diketahui P_2, maka untuk $t=3$:

$$p_j^{(3)} = \sum_{j=0}^{n} p_i^{(2)} q_{ij} \quad \text{..(2.2.2.3)}$$

dinyatakan dengan vektor $P_3 = [\, p_0^{(3)} \quad p_1^{(3)} \ldots p_n^{(3)} \,]$.

Sehingga dengan cara yang sama untuk t=k sistem di x_j dengan peluang :

$$p_j^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} p_i^{(k-1)} q_{ij} \qquad \text{...(2.2.2.4)}$$

dan dinyatakan dengan vektor $P_k = [\, p_0^{(k)} \quad p_1^{(k)} \ \dots \ p_n^{(k)}\,]$.

Peluang rantai tersebut berada di x_j dengan k-langkah adalah jumlahan dari i pada peluang rantai pada x_i setelah (k-1)-langkah dan langkah berikutnya dari x_i ke x_j .

Dalam penggunaannya ke suatu proses Markov apabila diketahui :

$$P_0 = \left[p_0^{(0)} \cdot p_1^{(0)} \quad \dots \quad p_n^{(0)} \right]$$

dan :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

maka operasi perkalian elemen ke-i pada P_0 dengan elemen kolom ke-j pada Q akan menghasilkan :

$$P_0 Q = \begin{pmatrix} p_0^{(0)} & p_1^{(0)} & \cdots & p_n^{(0)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} p_0^{(0)} q_{i0} \qquad \sum_{i=0}^{n} p_1^{(0)} q_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{n} p_n^{(0)} q_{in} \right)$$

$$= \left[p_0^{(1)} \quad p_1^{(1)} \quad \dots \quad p_n^{(1)} \right]$$

$$= P_1$$

untuk k = 1 maka diperoleh :

$$P_1Q = \left(p_0^{(1)} \quad p_1^{(1)} \quad \cdots \quad p_n^{(1)}\right)\begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} p_i^{(1)} q_{i0} \quad \sum_{i=0}^{n} p_i^{(1)} q_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{n} p_i^{(1)} q_{in}\right)$$

$$= \left[p_0^{(2)} \quad p_1^{(2)} \quad \cdots \quad p_n^{(2)}\right]$$

$$= P_2$$

Dengan induksi untuk k = k-1 akan diperoleh:

$$P_{k-1}Q = \left(p_0^{(k-1)} \quad p_1^{(k-1)} \quad p_2^{(k-1)} \cdots p_n^{k-1}\right)\begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} p_i^{(k-1)} q_{i0} \quad \sum_{i=0}^{n} p_i^{(k-1)} q_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{n} p_i^{(k-1)} q_{in}\right)$$

$$= \left[p_0^{(k)} \quad p_1^{(k)} \quad \cdots \quad p_n^{(k)}\right]$$

$$= P_k$$

Secara umum diperoleh persamaan :

$$P_k = P_{k-1}Q \quad \text{...(2.2.2.5)}$$

dimana :

P_k : peluang transisi tak-bersyarat k-langkah

Q : matrik koleksi peluang transisi bersyarat yang homogen k-1 : peluang transisi tak-bersyarat k-1 langkah.

Sehingga untuk peluang transisi dari :

$$P_k = P_{k-1}Q$$

$$= P_{k-2}Q.Q$$

$$= P_{k-2}\,Q^{(2)}$$

$$= P_0Q^{(k)}$$

Contoh 2.2.2 :

Seperti pada contoh 2.2.1, vektor peluang awal $P_0 = [\,1 \quad 0\,]$.

Sehingga dengan persamaan (2.2.2.4) maka dapat dihitung :

$P_1 = P_0\,Q$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix} = [1/2 \quad 1/2]$$

$P_2 = P_1\,Q$

$$= [1/2 \quad 1/2]\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix} = [\,5/12 \quad 7/12\,]$$

Sehingga peluang pada tanggal 3 Mei hari cerah adalah 5/12 dan peluang hari hujan adalah 7/12.

2.3. RANTAI MARKOV ERGODIK

Dalam mempelajari rantai Markov keadaan ergodik dapat digunakan beberapa definisi sifat-sifat rantai Markov :

Definisi 2.3.1:

Keadaan j dikatakan accessible (dapat diperoleh) dari keadaan i, jika

$q_{ij}^{(k)} > 0$ untuk beberapa $k \geq 0$.

Hal ini berarti bahwa keadaan j diperoleh dari keadaan i dalam berhingga langkah jika dan hanya jika ada kemungkinan dari sistem untuk memasuki keadaan j dari keadaan i.

Definisi 2.3.2 : (keadaan yang saling berkomunikasi)

Jika keadaan j dapat diperoleh dari keadaan i dan sebaliknya keadaan i dapat diperoleh dari keadaan j, maka i dan j saling berkomunikasi.

Definisi 2.3.3: (rantai irreducible)

Suatu rantai Markov disebut irreducible (tak tereduksi) jika setiap keadaan berkomunikasi dengan setiap keadaan lain.

Definisi 2.3.4 :

Suatu keadaan i dikatakan periodik dengan periode T (T>1) jika $Q_{ij}^{(k)} = 0$, jika $n = mT$ adalah pergandaan T dan T bilangan bulat positif terbesar . Keadaan tidak periodik jika tidak terdapat T>1.

Berdasarkan definisi (2.3.4) dapat dikatakan bahwa keadan i faktor terbesar dari bilangan bulat n>1 dimana $q_{ij}^{(k)} > 0$. Jika periode dari keadaan i adalah 1 maka i disebut tidak periodik.

Definisi 2.3.5 :(keadaan ergodik)

Suatu keadaan i yang terus menerus tidak periodik dengan waktu pegulangan keadaan i (μ_i) dimana $\mu_i < \sim$ disebut Ergodik.

Jadi suatu keadaan tidak periodik yang berlangsung terus menerus dengan waktu pengulangan berhingga, maka rantai tersebut Ergodik.

Definisi 2.3.6:

Suatu rantai Markov berhingga dikatakan reguler jika rantai tersebut irreducible (tak tereduksi) dan aperiodik (tidak periodik).

Dari definisi (2.3.5) dan (2.3.6) dapat disimpulkan bahwa suatu rantai Markov yang reguler adalah Ergodik.

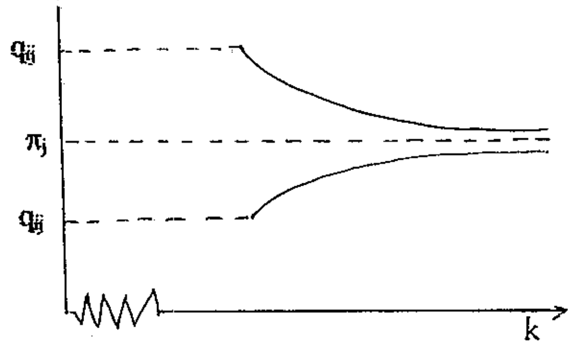
Definisi 2.3.7 :

Suatu rantai Markov disebut rantai ergodik jika rantai Markov tersebut ada kemungkinan untuk bergerak dari setiap keadaan ke setiap keadaan yang lain.

Jadi dari definisi (2.3.7) , rantai Markov adalah ergodik jika pangkat ke-k pada matriks transisi adalah positif. Dengan demikian rantai tersebut ada kemungkinan untuk bergerak dari setiap keadaan ke setiap keadazn yang lain dalam k-langkah.

2.4. Peluang Keadaan Tetap

Menurut Goodman, Roe (1988), besarnya peluang suatu sistem pada setiap keadaan di masa yang akan datang akan menjadi tidak tergantung dari keadaan awal (sekarang) bahkan peluang pada setiap keadaan j akan menuju satu harga tetap (*steady state*) yang dinotasikan dengan π_j baik dari arah atas atau dari arah bawah, yang ditunjukkan oleh gambar 2.4:



Gambar 2.4.

Hal ini berarti bahwa proses dalam keadaan tertentu j, setelah sejumlah besar transisi cenderung ke π_j yang tidak tergantung pada distribusi peluang awal yang didefinisikan dengan keadaan-keadaan dari suatu rantai Markov . Pada keadaan tetap ini tidak berarti proses tetap dalam satu keadaan . Sebaliknya proses berlanjut terus membuat transisi-transisi dari suatu keadaan ke keadaan lain pada tiap langkah k, peluang transisi 1-langkah dari keadaan i ke j tetap q_{ij} sehingga :

$$\pi_j > 0 \text{ , untuk } j = 0, 1, 2, \ldots , n$$

$$\pi_j = \sum_{j=0}^{n} \pi_j \, q_{ij} \text{ , untuk } j = 0, 1, 2, \ldots , n$$

$$\sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1)$$

Menurut Kemeny, J.G. ,Mirkil, H , Snell, J.L. ,dan Thompson, G.L. (1959), untuk matriks peluang transisi k-langkah $Q_{ij}^{(k)}$ jika k menuju ke tak hingga maka matriks tersebut merupakan matriks keadaan tetap yang memiliki baris-baris dengan elemen-elemen yang identik , artinya sisitim berada dalam keadaan j setelah sejumlah besar transisi dan peluang ini tidak tergantung pada keadaan awal i.

Sehingga jika P adalah vektor peluang transisi k-langkah dari rantai Markov (n+1)-keadaan yang berhingga, tak tereduksi dan tidak periodik, maka :

$$\lim_{k\to\infty} P^{(k)} = \Pi = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \dots \\ \pi_n \end{bmatrix}^T \qquad \text{.......................................(2.4.1.a)}$$

untuk matriks peluang transisi Q pada keadaan tetap dinyatakan dengan :

$$\lim_{k\to\infty} Q^{(k)} = \Pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_n \\ \pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_0 & \pi_1 & \dots & \pi_n \end{bmatrix} \qquad \text{... ....(2.4.1.b)}$$

dimana $0 < \pi_j < 1$ dan :

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = 1$$

untuk setiap i.

Definisi 2.4.1: (Distribusi Invarian)

Suatu peluang π yang dinyatakan dengan persamaan $\sum_{i=0}^{n} \pi_i q_{ij} = \pi_j$, untuk semua $j \in S$ (S = berhingga) disebut distribusi invarian atau distribusi keadaan tetap untuk Q.

Dari definisi 2.4.1 menunjukkan bahwa jika proses bergerak dengan distribusi peluang awal P_0, setelah sejumlah besar langkah maka akan diperoleh distribusi yang sama dengan Π , dan dapat dinyatakan dengan :

$$\lim_{k \to \infty} P^{(k)} = \Pi \quad \text{.......(2.4.2)}$$

Definisi 2.4.2 :

Vektor Π adalah distribusi stasioner untuk rantai Markov , dengan matriks transisi Q, jika :

$$\Pi = Q\,\Pi \quad \text{.......(2.4.3)}$$

Misalnya Π adalah distribusi stasioner , maka dengan induksi :

$$\Pi Q^2 = (\Pi Q)\, Q = \Pi Q = \Pi$$

dan secara umum dinyatakan dengan :

$$\Pi Q^k = \Pi \quad \text{.......(2.3.4)}$$

untuk setiap bilangan bulat k>0.